การประมาณค่าของพารามิเตอร์

๑. แนวความคิด และความหมายของการประมาณค่า (Estimation)

ในการศึกษาธรรมชาติของประชากรใดประชากรหนึ่ง สามารถทำได้โดยการศึกษาการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ที่แสดงธรรมชาติบางประการของประชากรนั้น แต่โดยทั่วไปแล้วฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X จะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ θ (ค่าคงที่ซึ่งแสดงคุณสมบัติบางประการของประชากร) ตัวหนึ่งหรือมากกว่า พารามิเตอร์ดังกล่าวนี้มักจะเป็นตัวที่ไม่ทราบค่า จึงจำเป็นต้องมีการประมาณค่า

ในการประมาณค่าของพารามิเตอร์ θ นั้น จะต้องใช้ข้อมูลที่ได้จากตัวอย่างสุ่ม $X_1,\ldots,X_n$ กล่าวคือเราจะค้นหาตัวสถิติ $\hat{\theta}=t(X_1,\ldots,X_n)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่มเป็นตัวประมาณ (estimator) ของ θ เช่น $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ของประชากรหนึ่ง เราใช้ตัวสถิติ $\hat{\mu}= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ เป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์ μ (ค่าเฉลี่ยของประชากร) เป็นต้น

ในการประมาณค่าของพารามิเตอร์ θ นั้น เราจะทำการกะประมาณว่า θ ควรมีค่าเท่าใด หรืออยู่ในช่วงใด กล่าวอีกนัยหนึ่ง เราจะทำการประมาณค่าเป็นจุด (point estimation) หรือประมาณค่าเป็นช่วง (interval estimation)

ในการประมาณค่าเป็นจุด เราสังเกตค่าของตัวแปร $X_1,\ldots,X_2$ ถ้าได้ค่าดังกล่าวเป็น $x_1,\ldots,x_n$ ตามลำดับ เราจะใช้ค่า $\hat{\theta}=t(x_1,\ldots,x_n)$ เป็นค่าประมาณ (estimate) ของ θ **ขอให้สังเกตว่าตัวประมาณเป็นฟังก์ชัน แต่ค่าประมาณเป็นค่าหนึ่งของฟังก์ชัน** ฉะนั้นปัญหาการประมาณค่าเป็นปัญหาเกี่ยวกับการค้นหาตัวประมาณที่ดี มากกว่าปัญหาของการหาค่าประมาณ ของพารามิเตอร์

ในการประมาณค่าเป็นช่วง เราพิจารณารูปการแจกแจงของตัวสถิติ $\hat{\theta} = t(X_1,\ldots,X_n)$ เป็นสำคัญ แล้วหาช่วงความเชื่อมั่น (confidence interval) ที่จะทำให้เราเชื่อมั่นในระดับที่ต้องการ ว่าค่าที่แท้จริงของ θ อยู่ในช่วงนั้น ตัวอย่างเช่น $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ ($\mu=0$) และความแปรปรวนเท่ากับหนึ่ง ($\sigma^2 = 1$) เราพิจารณารูปการแจกแจงของ $\mu=\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ แล้วเห็นว่าตัวสถิติ $\bar{X}$ มีการแจกแจงแบบปกติ จึงได้ว่า $\bar{X}- 1.96/\sqrt{n}$ ถึง $\bar{X}+1.96/\sqrt{n}$ เป็นช่วงความเชื่อมั่นขนาด ๙๕ เปอร์เซ็นต์ของ μ เป็นต้น

กล่าวโดยสรุป การประมาณค่าหมายถึงการใช้ข้อมูลจากตัวอย่างสุ่ม ในรูปของตัวสถิติ ในการประมาณว่าพารามิเตอร์ควรมีเท่าเท่าใด หรืออยู่ในช่วงใด

๒. หลักเกณฑ์ในการเลือกตัวประมาณ

ตามที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ตัวสถิติ $\hat{\theta}$ ใดๆ อาจใช้เป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์ θ ได้ทั้งนั้น ปัญหาจึงมีอยู่ว่า เราควรเลือกใช้ตัวสถิติใด

การเลือกใช้ตัวสถิติในการประมาณค่าพารามิเตอร์ขึ้นอยู่กับจุดประสงค์ จึงไม่มีหลักเกณฑ์การเลือกเพียงเกณฑ์ใดเกณฑ์หนึ่งแต่อย่างเดียว เราต้องอาศัยคุณสมบัติหลายประการของตัวสถิติเป็นเกณฑ์ในการเลือก ทั้งนี้โดยการพิจารณาจากการแจกแจงของตัวอย่างเป็นสำคัญ

หลักเกณฑ์ที่ใช้ในการเลือกตัวประมาณมีหลายอย่างด้วยกัน แต่ที่สำคัญ ๆ และจะนำมากล่าวในที่นี้มีดังนี้

๒.๑ ความไม่เอนเอียง (unbiasedness) ตัวประมาณ $\hat{\theta}$ จะเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของพารามิเตอร์ θ ถ้าค่าคาดหมาย (expected value) ของ $\hat{\theta}$ มีค่าเท่ากับ θ

๒.๒ ความคงเส้นคงวา (Consistency) ตัวประมาณ $\hat{\theta}$ จะเป็นตัวประมาณที่คงเส้นคงวาของพารามิเตอร์ θ ถ้าความน่าจะเป็นของ $|\hat{\theta}-\theta| > \varepsilon$ เข้าสู่ศูนย์ในขณะที่ขนาดของตัวอย่างเพิ่มขึ้น

๒.๓ ความพอเพียง(sufficiency)ตัวประมาณ $\hat{\theta}=t(X_1,...,X_n)$ จะเป็นตัวประมาณที่พอเพียงของพารามิเตอร์ θ ถ้า $t_1,...,t_r$ เป็นตัวประมาณอื่นใดของ θ แล้ว ฟังก์ชันความหนาแน่นมีเงื่อนไขของ $t_1,...,t_r$ เมื่อกำหนด t ให้ เป็นฟังก์ชัน ที่ไม่ขึ้นอยู่กับ θ

๒.๔ ความมีประสิทธิภาพ (efficiency) ในหลายกรณี เราอาจสร้างตัวประมาณ $\hat{\theta}=t(X_1,...,X_n)$ ซึ่งทำให้ $\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)$ มีการแจกแจงแบบปกติซึ่งมีค่าเฉลี่ยเข้าใกล้ศูนย์ ในขณะที่ขนาดของตัวอย่างเพิ่มมากขึ้น ในบรรดาตัวประมาณดังกล่าว อาจมีตัวประมาณตัวหนึ่ง หรือมากกว่า มีความแปรปรวน ต่ำกว่าความแปรปรวนของตัวประมาณอื่น ในขณะที่ขนาดของตัวอย่างเพิ่มขึ้น ตัวประมาณเช่นนี้เรียกว่าตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพของพารามิเตอร์ θ

๒.๕ การมีความแปรปรวนต่ำสุด (minimum variance) ตัวประมาณ $\hat{\theta}$ จะเป็นตัวประมาณที่มีความแปรปรวนต่ำสุดของพารามิเตอร์ θ ถ้าความแปรปรวนของ $\hat{\theta}$ มีค่าไม่มากกว่าความแปรปรวน ของตัวประมาณใด ๆ ของ θ

๒.๖ การมีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด (minimum mean-square error) ตัวประมาณ $\hat{\theta}$ จะเป็นตัวประมาณที่มีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดของพารามิเตอร์ θ ถ้าค่าคาดหมายของ $(\hat{\theta}-\theta)^2$ มีค่าต่ำสุด

๓. วิธีหาตัวประมาณ

ปัญหาการประมาณค่าเป็นปัญหาของการค้นหาตัวประมาณที่ดีตามเกณฑ์บางประการ จึงได้มีผู้เสนอวิธีการสำหรับใช้ในการหาตัวประมาณหลายวิธีด้วยกัน วิธีการที่จะกล่าวถึงในที่นี้มีดังนี้

๓.๑ วิธีโมเมนต์ (method of moments) เป็นวิธีที่เก่าแก่ที่สุด เสนอโดยคาร์ล เพียร์สัน (Karl Pearson) เมื่อประมาณ ค.ศ.๑๘๙๔

ตัวประมาณที่หาได้โดยวิธีโมเมนต์ โดยทั่วไปแล้วเป็นตัวประมาณที่คงเส้นคงวา มีความเอนเอียงน้อยและเป็นตัวประมาณที่มีการแจกแจงแบบปกติในแนวโน้ม (asymtotically normal) ภายใต้เงื่อนไขกลางๆ ทั่วไป แต่มักเป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพต่ำ และมีความแปรปรวนไม่ต่ำ

ตัวประมาณที่หาได้โดยวิธีโมเมนต์ เป็นตัวประมาณที่หาได้ง่าย และใช้ได้ดีในกรณีที่ใช้หาค่าประมาณเบื้องต้นของพารามิเตอร์ แล้วนำเอาไปใช้หาตัวประมาณโดยวิธีอื่นอีกทีหนึ่ง

๓.๒ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (method of maximum likelihood)เป็นวิธีที่ฟิชเชอร์ (R.A. Fisher) เสนอไว้เมื่อปี ค.ศ.๑๙๑๒ และ ปรับปรุงแก้ไขให้เหมาะสมยิ่งขึ้นภายหลัง วิธีนี้เป็นที่นิยมแพร่หลายมาก เพราะตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นตัวประมาณที่หาได้ง่าย และมีคุณสมบัติที่พึงปรารถนาหลายประการ

ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพ และคงเส้นคงวาและถ้าพารามิเตอร์ใดมีตัวประมาณที่พอเพียงแล้ว ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดจะเป็นตัวประมาณที่พอเพียง ของพารามิเตอร์นั้น (พารามิเตอร์บางตัวไม่มีตัวประมาณที่พอเพียง) อย่างไรก็ตามตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดไม่จำเป็นจะต้องเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง แต่โดยทั่วไปแล้ว ถ้ามีความเอนเอียงเราก็สามารถปรับปรุงให้เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงได้

คุณสมบัติที่อำนวยความสะดวกอย่างยิ่งประการหนึ่งของตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดคือความไม่แปรปรวน (invariance) กล่าวคือ ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ และถ้า $u(\theta)$ เป็นฟังก์ชันค่าเดียวของ θ แล้ว $u(\hat{\theta})$ จะเป็นตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ $u(\theta)$ ด้วย

๓.๓ วิธีไคสแควร์ต่ำสุด(method of minimum chi-square) เป็นวิธีการหาตัวประมาณที่มีลักษณะคล้ายคลึงกับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และยิ่งกว่านั้นคุณสมบัติของตัวประมาณที่ได้มาโดยวิธีนี้ ก็ยังคล้ายคลึงกับคุณสมบัติของตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดด้วย

๓.๔ วิธีกำลังสองต่ำสุด (method of least

squares) เป็นวิธีที่นิยมใช้กันแพร่หลายวิธีหนึ่ง วิธีนี้มีรากฐานมาจากทฤษฎีการประมาณเชิงเส้นและเป็นวิธีที่คิดขึ้นโดยเกาส์ (K.F.Gauss) และมาร์คอฟ (A.A.Markov)

ในวิธีนี้ ถ้าตัวแปร X_i อยู่ในรูป $f_i(\theta_1,\ldots,\theta_p)+\varepsilon$ โดยที่ $f_i(\theta_1,\ldots,\theta_p)$ เป็นฟังก์ชันที่เรารู้ และ ε เป็นความคลาดเคลื่อน แล้ว ตัวประมาณแบบกำลังสองต่ำสุด $\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_p$ คือตัวประมาณซึ่งทำให้ $\sum_i [x_i - f_i(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_p)]^2$ มีค่าต่ำสุด

ในกรณีที่ $f_i(\theta_1,\ldots,\theta_p)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของพารามิเตอร์ $\theta_1,\ldots,\theta_p$ ตัวประมาณแบบกำลังสองต่ำสุดจะเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง และมีความแปรปรวนต่ำสุด

๓.๔ วิธีของเบย์ (method of Bayes) เป็นวิธีที่นิยมใช้แพร่หลายเช่นกัน ตามหลักการของเบย์ พารามิเตอร์ θ มีฟังก์ชันการแจกแจงเบื้องต้น (prior distribution) และมีฟังก์ชันความสูญเสีย (loss function) สำหรับตัวประมาณ $\hat{\theta}_i$ ต่างๆ ของ θ ค่าคาดหมายของฟังก์ชันความสูญเสียนี้เรียกว่า ความเสี่ยง (risk) ตัวประมาณแบบเบย์ คือ ฟังก์ชันซึ่งทำให้ค่าคาดหมายของความเสี่ยงมีค่าน้อยที่สุด

ในกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ตัวประมาณแบบเบย์จะมีความแตกต่างอย่างน้อยมาก จากตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

นอกจากที่กล่าวมาแล้วนี้ ยังมีวิธีหาตัวประมาณแบบอื่นอีกเช่นวิธีระยะต่ำสุด (method of minimum distance) วิธีมินิแมกซ์ (method of minimax) และวิธีของพิทมัน (method of Pitman)

๔. ความเชื่อมั่นของการประมาณค่า

การประมาณค่าเป็นช่วงมีรากฐานทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นผลงานของลาปลาซ (Laplace) ในการประมาณค่าเกี่ยวกับการแจกแจงแบบทวินาม มาตั้งแต่ปี ค.ศ. ๑๘๑๔ แต่แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณค่าเป็นช่วงด้วยช่วงความเชื่อมั่นที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบัน เป็นผลงานของเนย์แมน (J.Neyman) ตั้งแต่ปี ค.ศ.๑๙๓๗

มีวิธีสำหรับหาช่วงความเชื่อมั่น ดังนี้

๔.๑ วิธีใช้ปริมาณหมุน

๔.๒ วิธีใช้ตัวประมาณแบบจุด

๔.๓ วิธีใช้ตัวอย่างขนาดใหญ่

๔.๔ วิธีใช้ตารางและแผนภูมิ

ยังมีการประมาณค่าเป็นช่วงอีกแบบหนึ่ง ซึ่งเป็นผลงานของฟิชเชอร์ (R.A.Fisher) เรียกว่าช่วงความไว้วางใจ (Fiducial interval)

นอกจากนี้แล้วในปี ค.ศ.๑๙๕๘ เจฟฟรีย์ (H. Jeffreys) ยังได้ใช้ทฤษฎีของเบย์ในการหาช่วงความเชื่อมั่น เรียกว่าช่วงแบบเบย์ (Bayesian interval) อีกด้วย

ชาตรี เมืองนาโพธิ์

บรรณานุกรม

ประชุม สุวัตถี **ทฤษฎีการอนุมานเชิงสถิติ** สำนักพิมพ์ไอเดียนสโตร์ ๒๕๒๗

Fraser, D.A.S., Statistic : An Introduction. New York, John Wiley & Sons,Inc., 1958.

Hogg R.V. and A.T Craig, Introduction to Mathematical Statistics, 4th ed. New York, The Macmillan Co., 1974.

Mood A.M., F.A. Graybill, and D.E. Boes, Introduction to the Theory of Statistics, 3rd ed. New York, McGraw Hill, Inc.,1974.