ตัวแบบของโซโล: กรอบแนวคิดในการวิเคราะห์การคิดเชิงคณิตศาสตร์
SOLO MODEL: A FRAMEWORK FOR ANALYZING MATHEMATICAL THINKING

*ณัชชา กมล**
Natcha Kamol*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สำนักวิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Program in Mathematics, Faculty of Education, Chiang Mai University.

***Corresponding author, E-mail:** natcha.ka@cmu.ac.th*

บทคัดย่อ

กรอบแนวคิดในการวิเคราะห์การคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่เป็นที่นิยมอีกแนวคิดหนึ่งคือ ตัวแบบของโซโล ซึ่งตัวแบบดังกล่าวใช้แนวคิดในการพิจารณาระดับการคิดของนักเรียนจากโครงสร้างของผลการเรียนรู้ที่นักเรียนตอบสนอง หรือโครงสร้างของลักษณะผลการเรียนรู้ที่ได้จากการสังเกต ซึ่งมีขั้นตอนในการพิจารณาคือ การพิจารณาถึงรูปแบบการตอบสนองของนักเรียนในแต่ละช่วงวัยก่อนเป็นอันดับแรก จากนั้นจึงดำเนินการวิเคราะห์ต่อว่า นักเรียนคนดังกล่าวมีระดับการคิดอยู่ในระดับใด นอกจากนี้ตัวแบบของโซโลยังสามารถนำมาใช้ในการวิเคราะห์ระดับการคิดเชิงเรขาคณิตแทนการวิเคราะห์ตามรูปแบบของแวนฮีลี่ได้อีกด้วย

คำสำคัญ: ตัวแบบของโซโล การคิดเชิงคณิตศาสตร์ ระดับการคิด

Abstract

A increasingly popular framework used to analyze mathematical thinking is the SOLO model which classifies students' thinking levels basing on the structure of outcomes of the student response or the structure of the observed learning outcomes. The procedural steps start from the modes of functioning generated by the students at each developmental stage. Afterward, the student's thinking is classified to a certain thinking level. The SOLO model could also be used to analyze the geometric thinking alternating the Van Hiele Model.

Keywords: SOLO Model, Mathematical Thinking, Thinking Level

บทนำ

ในการประเมินคุณภาพการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่เป็นที่รู้จักโดยส่วนใหญ่ คือ การประเมินโดยใช้กรอบแนวคิดของบลูม หรืออนุกรมวิธานของบลูม (Bloom Taxonomy) ซึ่งเป็นกรอบแนวคิดในการประเมินผลการเรียนรู้และออกแบบเครื่องมือในการวัดผล ส่วนการประเมินระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้น คนส่วนใหญ่จะรู้จักเฉพาะกรอบการประเมินระดับการคิดเชิงเรขาคณิตของแวนฮี่ลี (Van Hiele Model) เท่านั้น ซึ่งตัวแบบของของแวนฮีลี่เน้นการประเมินระดับ

การคิดเฉพาะเรขาคณิต ทำให้ไม่ครอบคลุมการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านอื่นๆ

ในปี ค.ศ. 1982 Biggs and Collis [1-2] ได้พัฒนากรอบแนวคิดในการวิเคราะห์และจำแนกระดับความคิดของนักเรียนในการเรียนรู้เนื้อหาวิชาต่างๆ ที่เรียกว่า ตัวแบบของโซโล (SOLO Model) หรือบางครั้งอาจเรียกว่า อนุกรมวิธานของโซโล (SOLO Taxonomy) ซึ่งตัวแบบดังกล่าวจะใช้แนวคิดในการประเมินผู้เรียนว่าผู้เรียนมีความเข้าใจต่อสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้อย่างไร โดยพิจารณาจากโครงสร้างของผลการเรียนรู้ที่ผู้เรียนตอบสนอง หรือโครงสร้างของลักษณะผลการเรียนรู้ที่ได้จากการสังเกต (The Structure of the Observed Learning Outcome) ทำให้ตัวแบบของโซโล (SOLO Model) กลายเป็นกรอบแนวคิดหนึ่งที่ได้รับความนิยมแพร่หลายในหลากหลายสาขาวิชา อาทิ สาขาวิชาประวัติศาสตร์ ภาษาอังกฤษ ภูมิศาสตร์ แม้กระทั่งในสาขาคณิตศาสตร์เองก็ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลาย โดยมีนักวิชาการทางคณิตศาสตรศึกษาได้นำกรอบแนวคิดดังกล่าวมาใช้อ้างอิง เพื่อจำแนกและประเมินความรู้ความเข้าใจ การคิดและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาต่างๆ เช่น ความรู้สึกเชิงจำนวน [3-4] การคิดเชิงความน่าจะเป็น [5-6] การคิดเชิงสถิติ [7-8] การคิดเชิงพีชคณิต [9-10] เป็นต้น

ตัวแบบของโซโล (SOLO Model)

ตัวแบบของโซโล [1-2] ถือเป็นเครื่องมือหนึ่งในการวิเคราะห์และจำแนกระดับพฤติกรรมการรู้คิดที่แตกต่างกันของนักเรียน โดยใช้การพิจารณาโครงสร้างของลักษณะผลการเรียนรู้ของนักเรียนที่แสดงออกต่อระดับความซับซ้อนของสถานการณ์ปัญหาที่เผชิญ ซึ่งข้อมูลที่ได้เกิดจากการที่ครูผู้สอนใช้การสังเกตโครงสร้างของพฤติกรรมที่แสดงออกของนักเรียน เช่น การแสดงออกโดยการอธิบายวิธีคิด การเขียนแสดงความคิดในการแก้ปัญหา เป็นต้น

การวิเคราะห์การคิดตามแนวคิดของโซโลนั้นได้จำแนกโครงสร้างของการพิจารณาผลการเรียนรู้ของนักเรียน 2 องค์ประกอบที่เกี่ยวเนื่องกัน นั่นคือ องค์ประกอบแรก เป็นการมองที่ลำดับขั้นพัฒนาการ (Modes) ส่วนองค์ประกอบที่ 2 เป็นการพิจารณาที่ระดับของการตอบสนองในแต่ละขั้นพัฒนาการ (Levels Within Each Modes) โดยลำดับขั้นพัฒนาการในองค์ประกอบแรกจำแนกเป็น 5 ขั้น คือ ขั้นการใช้ประสาทสัมผัส (Sensorimotor Stage) ขั้นการใช้ภาพเป็นสื่อ (Ikonic Stage) ขั้นรูปธรรม-สัญลักษณ์ (Concrete-Symbolic Stage) ขั้นแบบแผน (Formal Stage) และขั้นหลังแบบแผน (Post-Formal Stage) ซึ่งทั้ง 5 ขั้นข้างต้นมีความหมายและลักษณะคล้ายคลึงกับขั้นพัฒนาการทางสติปัญญาของเพียเจต์ (Piaget's Stages of Intellectual Development) โดยมีขั้นของการพัฒนาที่ค่อยๆ เปลี่ยนแปลงไปจากระดับการคิดที่อาศัยสิ่งที่เป็นรูปธรรมไปสู่การคิดที่มีลักษณะที่เป็นนามธรรมมากขึ้นเรื่อยๆ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. ขั้นการใช้ประสาทสัมผัส (Sensorimotor Stage) อยู่ในช่วงระยะแรกเกิด ที่เด็กในวัยนี้จะมีพัฒนาการการเรียนรู้จากการตอบสนองต่อสิ่งรอบตัว ในลักษณะรูปธรรมเท่านั้น

2. ขั้นการใช้ภาพเป็นสื่อ (Ikonic Stage) อยู่ในช่วงอายุประมาณ 18 เดือน เด็กในช่วงวัยนี้จะมีพัฒนาการกว่าขั้นการใช้ประสาทสัมผัส โดยเด็กสามารถเรียนรู้ผ่านการจินตนาการภายในหรือผ่านรูปภาพ

3. ขั้นรูปธรรม-สัญลักษณ์ (Concrete-Symbolic Stage) อยู่ในช่วงอายุประมาณ 6 ปี เด็กในช่วงวัยนี้มีพัฒนาการการเรียนรู้คาบเกี่ยวระหว่างการเรียนรู้เชิงรูปธรรมกับการเรียนรู้

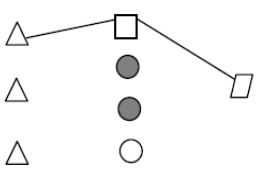
เชิงนามธรรมในรูปของสัญลักษณ์ โดยเด็กจะสามารถแปลงสิ่งต่างๆ รอบตัวที่เป็นรูปธรรมให้เป็นระบบของสัญลักษณ์โดยใช้ภาษาของตนเองและนำสัญลักษณ์นั้นไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน

4. ขั้นแบบแผน (Formal Stage) อยู่ในช่วงอายุประมาณ 14 ปี เด็กในช่วงวัยนี้มีการพัฒนาการทางความคิดที่มีลักษณะเป็นนามธรรม มีระบบระเบียบมากขึ้น สามารถสร้างสมมุติฐานเพื่อกำหนดทางเลือกในการแก้ปัญหา

5. ขั้นหลังแบบแผน (Post-Formal Stage) อยู่ในช่วงอายุประมาณ 20 ปี ซึ่งช่วงวัยดังกล่าวถือว่าเป็นช่วงวัยที่มีพัฒนาการสูงสุด นั่นคือนอกจากสามารถมองสิ่งต่างๆ ในเชิงนามธรรมได้แล้ว ยังสามารถประยุกต์ใช้แนวคิดเพื่อนำไปสู่ทฤษฎีหรือการสร้างทฤษฎีใหม่ๆ ได้ด้วยตัวเอง เกิดเป็นนวัตกรรมระดับสูงในหลายๆ สาขาวิชา

การตอบสนองของนักเรียนในแต่ละบริบทอาจมีระดับที่แตกต่างกัน เช่น นักเรียนที่ตอบสนองออกมาในขั้นการใช้ภาพเป็นสื่อในบริบทของวิชาสังคมศาสตร์ไม่จำเป็นที่จะต้องตอบสนองออกมาในขั้นการใช้ภาพเป็นสื่อในวิชาวิทยาศาสตร์ นั่นคือ การตอบสนองของนักเรียนในแต่ละบริบทอาจไม่เหมือนกันก็ได้ นอกจากนี้นักเรียนในช่วงวัยเดียวกันบางคนอาจมีลำดับขั้นพัฒนาการที่แตกต่างจากคนอื่นๆ กล่าวคือ นักเรียนบางคนสามารถตอบสนองในลำดับขั้นพัฒนาการขั้นรูปธรรม-สัญลักษณ์ แต่อาจมีบางคนที่สามารถตอบสนองได้แต่ขั้นการใช้ภาพเป็นสื่อ เป็นต้น ซึ่งนักเรียนในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาส่วนใหญ่จะมีลำดับขั้นพัฒนาการในขั้นรูปธรรม-สัญลักษณ์ โดยในแต่ละขั้นพัฒนาการที่กล่าวมาข้างต้น ยังสามารถจำแนกระดับการเรียนรู้ของนักเรียนเป็นระดับย่อยๆ ในแต่ละขั้นพัฒนาการเป็น 5 ระดับดังต่อไปนี้

ระดับ 1 ก่อนโครงสร้าง (Prestructural) เป็นระดับการเรียนรู้ของนักเรียนที่ตอบสนองต่อสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ต่ำกว่าระดับความรู้ความเข้าใจในช่วงวัยของตนเอง กล่าวคือ นักเรียนกลุ่มนี้จะเรียนรู้ได้ช้ากว่านักเรียนปกติในช่วงวัยเดียวกัน โดยลักษณะการตอบสนองของนักเรียนคือ การแสดงออกในรูปของคำพูด เช่น “หนูไม่เข้าใจในคำถาม” “ทำไม่ได้” “ไม่รู้” หรือท่าทางที่แสดงความสับสน ไม่เข้าใจในประเด็นปัญหาหรือเข้าใจผิด เมื่อลงมือแก้ปัญหาหรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ นักเรียนมักจะนำข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้มาใช้ในการแก้ปัญหาหรือให้เหตุผล โดยนักเรียนกลุ่มนี้จะไม่สามารถแก้ปัญหาที่เหมาะสมกับช่วงวัยของตนได้ ดังภาพที่ 1 ซึ่งแสดงรูปแบบหรือลักษณะการตอบสนองของนักเรียนในระดับก่อนโครงสร้าง เมื่อนักเรียนเผชิญกับสถานการณ์ปัญหา

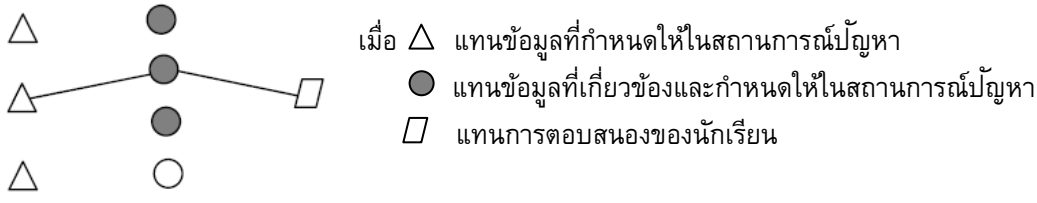


เมื่อ △ แทนข้อมูลที่กำหนดให้ในสถานการณ์ปัญหา
□ แทนการอ้างสิ่งไม่เหมาะสมหรือการใช้ข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหา
▱ แทนการตอบสนองของนักเรียน

ภาพที่ 1 แสดงลักษณะการตอบสนองของนักเรียนในระดับก่อนโครงสร้าง

ที่มา: Chick, H. (1998). Cognition in the Formal Modes: Research Mathematics and the SOLO Taxonomy. *Mathematics Education Research Journal.* 10(2): 7.

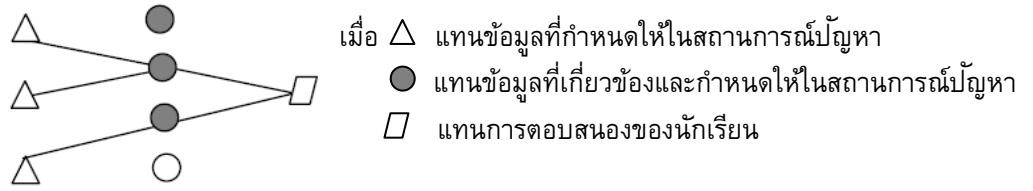
ระดับ 2 โครงสร้างเดียว (Unistructural) เป็นระดับการเรียนรู้ของนักเรียนที่อยู่ในช่วงวัยของตนเอง แต่อยู่ในระดับต่ำ กล่าวคือ นักเรียนที่แสดงออกในระดับนี้จะมีความเข้าใจในประเด็นปัญหาที่เผชิญ รู้ว่าสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ดังกล่าวเกี่ยวข้องกับอะไร ต้องการให้นักเรียนทำอะไร แต่เมื่อนักเรียนดำเนินการแก้ปัญหาดังกล่าว นักเรียนใช้ข้อมูลที่กำหนดให้หรือประเด็นที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหาดังกล่าวเพียงประเด็นเดียวในการแก้ปัญหาหรือหาข้อสรุป ทำให้นักเรียนไม่สามารถแก้ปัญหานั้นๆ ได้หรืออาจได้ข้อสรุปที่ไม่สมเหตุสมผลหรือไม่ถูกต้อง ดังภาพที่ 2 ที่แสดงรูปแบบหรือลักษณะการตอบสนองของนักเรียนในระดับโครงสร้างเดียว เมื่อนักเรียนเผชิญกับสถานการณ์ปัญหา โดยนักเรียนใช้ข้อมูลที่กำหนดให้ (△) เพียงข้อมูลเท่านั้นมาช่วยในการแก้ปัญหา



ภาพที่ 2 แสดงลักษณะการตอบสนองของนักเรียนในระดับโครงสร้างเดียว

ที่มา: Chick, H. (1998). Cognition in the Formal Modes: Research Mathematics and the SOLO Taxonomy. *Mathematics Education Research Journal.* 10(2): 7.

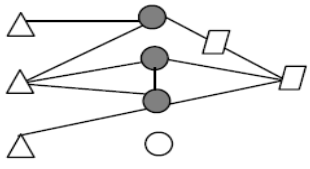
ระดับ 3 หลายโครงสร้าง (Multi-Structural) เป็นระดับการเรียนรู้ที่สูงกว่าระดับโครงสร้างเดียว นั่นคือ เมื่อนักเรียนเผชิญสถานการณ์ปัญหา นอกจากนักเรียนจะสามารถเข้าใจปัญหาได้อย่างท่องแท้แล้ว นักเรียนยังสามารถใช้ข้อมูลที่กำหนดให้หรือประเด็นที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหาดังกล่าวมาใช้ในการแก้ปัญหาตั้งแต่สองประเด็นขึ้นไป แต่ยังไม่สามารถสังเคราะห์หรือเชื่อมโยงความสัมพันธ์ในแต่ละประเด็นเข้าด้วยกันเพื่อประโยชน์ในการแก้ปัญหาได้ แม้ว่าบางครั้งอาจทำให้ได้คำตอบที่ถูกต้องก็ตาม ดังภาพที่ 3 ที่แสดงรูปแบบหรือลักษณะการตอบสนองของนักเรียนในระดับหลายโครงสร้าง ที่นักเรียนใช้ข้อมูลที่กำหนดให้ (△) มาใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งเป็นข้อมูลที่เกี่ยวข้อง (●) กับสถานการณ์ปัญหาดังกล่าว แต่นักเรียนขาดการเชื่อมโยงระหว่างข้อมูลที่เกี่ยวข้อง



ภาพที่ 3 แสดงลักษณะการตอบสนองของนักเรียนในระดับหลายโครงสร้าง

ที่มา: Chick, H. (1998). Cognition in the Formal Modes: Research Mathematics and the SOLO Taxonomy. *Mathematics Education Research Journal.* 10(2): 7.

ระดับ 4 เชื่อมโยง (Relational) เป็นระดับการเรียนรู้ที่นักเรียนมองปัญหาที่เผชิญในเชิงโครงสร้างที่สัมพันธ์กัน กล่าวคือ นักเรียนสามารถใช้ข้อมูลที่กำหนดให้ (△) ทั้งหมดหรือประเด็นทั้งหมดมาใช้ในการแก้ปัญหา และสามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของข้อมูล (●) ทั้งหมดได้อย่างสมเหตุสมผล และสอดคล้องกันจนทำให้ได้คำตอบที่ถูกต้องสมบูรณ์สมเหตุสมผล ดังภาพที่ 4

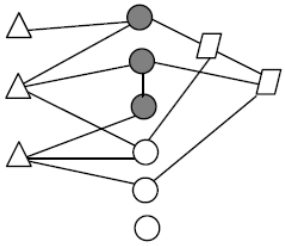


เมื่อ △ แทนข้อมูลที่กำหนดให้ในสถานการณ์ปัญหา
● แทนข้อมูลที่เกี่ยวข้องและกำหนดให้ในสถานการณ์ปัญหา
▱ แทนการตอบสนองของนักเรียน

ภาพที่ 4 แสดงลักษณะการตอบสนองของนักเรียนในระดับเชื่อมโยง

ที่มา: Chick, H. (1998). Cognition in the Formal Modes: Research Mathematics and the SOLO Taxonomy. *Mathematics Education Research Journal.* 10(2): 7.

ระดับ 5 นามธรรมขั้นขยาย (Extended Abstract) เป็นระดับการเรียนรู้ที่นักเรียนสามารถตอบสนองสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้เกินระดับการเรียนรู้ในช่วงวัยเดียวกัน กล่าวคือ นักเรียนกลุ่มนี้เรียนรู้ได้เร็วกว่าปกติ เมื่อเทียบกับเพื่อนในวัยเดียวกันเมื่อนักเรียนเผชิญสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนสามารถใช้การให้เหตุผลที่นอกเหนือไปจากข้อมูลที่มีอยู่ และสามารถสร้างองค์ความรู้หรือสมมุติฐานใหม่จากข้อมูลที่มีอยู่เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาที่ถูกต้องสมบูรณ์ ดังภาพที่ 5



เมื่อ △ แทนข้อมูลที่กำหนดให้ในสถานการณ์ปัญหา
● แทนข้อมูลที่เกี่ยวข้องและกำหนดให้ในสถานการณ์ปัญหา
▱ แทนการตอบสนองของนักเรียน
○ แทนข้อมูลที่ได้จากสมมุติฐานที่สร้างขึ้นเองจากสถานการณ์ปัญหา

ภาพที่ 5 แสดงลักษณะการตอบสนองของนักเรียนในระดับนามธรรมขั้นขยาย

ที่มา: Chick, H. (1998). Cognition in the Formal Modes: Research Mathematics and the SOLO Taxonomy. *Mathematics Education Research Journal.* 10(2): 7.

แนวคิดของโซโลดังกล่าวข้างต้นเป็นผลให้การวิเคราะห์การเรียนรู้ของนักเรียนแต่ละคนมีความละเอียดและชัดเจนยิ่งขึ้น เนื่องจากการพิจารณาระดับการเรียนรู้ของนักเรียนนั้นไม่เพียงพิจารณาพฤติกรรมของนักเรียนว่าอยู่ในลำดับขั้นพัฒนาการ (Modes) ใดเท่านั้นยังสามารถพิจารณาในรายละเอียดต่อไปด้วยว่าในขั้นพัฒนาการดังกล่าว นักเรียนแสดงพฤติกรรมการเรียนรู้ออกมาในระดับไหน ซึ่งข้อมูลเหล่านี้จะเป็นผลดีต่อครูในการวิเคราะห์นักเรียนได้ลึกซึ้งมากขึ้น นอกจากนี้ Bigg and Collis [2] ยังได้เสนอแนะเกี่ยวกับการจำแนกลักษณะการตอบสนอง

ของนักเรียนแต่ละคนไว้ว่า เมื่อนักเรียนแสดงการตอบสนองต่อสถานการณ์ปัญหานั้นๆ ลำดับแรกให้พิจารณาก่อนว่า นักเรียนคนดังกล่าวมีลำดับขั้นพัฒนาการ (Modes) อยู่ในขั้นใด จากนั้นจึงดำเนินการวิเคราะห์ต่อเพื่อจำแนกว่า นักเรียนคนดังกล่าวมีลักษณะการตอบสนองอยู่ในระดับ (Levels) ใด จึงถือว่าสิ้นสุดขั้นตอน ซึ่งโดยปกตินักเรียนส่วนใหญ่จะมีลักษณะการตอบสนองอยู่ในสามระดับตรงกลางนั่นคือ ระดับโครงสร้างเดียว ระดับหลายโครงสร้าง และระดับเชื่อมโยง ส่วนระดับก่อนโครงสร้างจะตกอยู่ในลำดับขั้นพัฒนาการที่อยู่ก่อนหน้า และระดับนามธรรมขั้นขยายจะตกอยู่ในลำดับขั้นพัฒนาการที่สูงขึ้นไป ซึ่งสามารถอธิบายได้ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงลำดับขั้นพัฒนาการและระดับของการตอบสนองของนักเรียนตามตัวแบบของโซโล

ลำดับขั้นพัฒนาการ (Modes)	ระดับ (Levels)
ขั้นพัฒนาการลำดับถัดไป (Next)	5 นามธรรมขั้นขยาย (Extended Abstract)
ขั้นพัฒนาการเป้าหมาย (Target)	4 เชื่อมโยง (Relational) 3 หลายโครงสร้าง (Multistructural) 2 โครงสร้างเดียว (Unistructural)
ขั้นพัฒนาการก่อนหน้า (Previous)	1 ก่อนโครงสร้าง (Prestructural)

ที่มา: Biggs, J. B. and Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and intelligent behavior. *Reconceptuaization and Measurement Intelligence*. p. 65.

ดังนั้น ในการวิเคราะห์ระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้น ผู้วิเคราะห์จะต้องดำเนินการใน 2 ขั้นตอน คือ ขั้นตอนแรกเป็นการพิจารณาว่า นักเรียนที่ทำการวิเคราะห์นั้นมีลำดับขั้นพัฒนาการอยู่ในขั้นใดก่อน จากนั้นจึงดำเนินการในขั้นตอนที่สองต่อคือ การพิจารณาว่านักเรียนคนดังกล่าวมีลักษณะการตอบสนองอยู่ในระดับใดของขั้นการตอบสนอง ซึ่งโดยปกติจะมีลักษณะการตอบสนองอยู่ในสามระดับตรงกลางคือ ระดับโครงสร้างเดียว ระดับหลายโครงสร้าง และระดับเชื่อมโยงนั่นเอง

ความสัมพันธ์ของระดับการคิดระหว่างตัวแบบของโซโลกับแวนฮีลี่

ถึงแม้ว่าตัวแบบของโซโลสามารถนำมาวิเคราะห์การคิดของนักเรียนในหลากหลายสาขาวิชา ซึ่งในสาขาคณิตศาสตร์นั้นสามารถที่จะใช้ในการวิเคราะห์ระดับการคิดในสาระการเรียนรู้ต่างๆ เช่น จำนวนและการดำเนินการ สถิติ ความน่าจะเป็น พีชคณิต เป็นต้น ซึ่งถือเป็นกรอบแนวคิดในการวิเคราะห์ระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้เช่นเดียวกับกรอบแนวคิดของแวนฮีลี่ แต่ในสาระการเรียนรู้เรขาคณิตนั้น ยังไม่มีการนำมาปรับใช้ เนื่องจากในการประเมินระดับการคิดเชิงเรขาคณิตนั้น นักวิชาการทางด้านคณิตศาสตร์ศึกษาส่วนใหญ่ใช้ตัวแบบของแวนฮีลี่ (Van Hiele Model) ในการวิเคราะห์ ซึ่งตัวแบบดังกล่าวถูกนำมาใช้ในการประเมินระดับการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนและออกแบบขั้นตอนการสอน 5 ขั้นตอน เพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตจากระดับหนึ่งไปสู่ระดับที่สูงขึ้นถัดไป โดยแบ่งระดับการคิดเชิงเรขาคณิตออกเป็น 5 ระดับ ประกอบด้วย ระดับ 0: การมองภาพ (Visualization) ระดับ 1: การวิเคราะห์ (Analysis) ระดับ 2:

การคิดนิรนัยเบื้องต้น (Informal Deduction) ระดับ 3: การพิสูจน์โดยการนิรนัย (Deductive) ระดับ 4: ระดับสูงสุด (Rigor) [11] โดยในแต่ละระดับการคิดนั้น นักเรียนไม่สามารถข้ามระดับใดระดับหนึ่งโดยไม่ผ่านระดับที่ต่ำกว่าได้

เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์จากทั้งตัวแบบของโซโลและแวนฮีลี่ พบว่า ระดับการคิดทั้งสองตัวแบบมีความสัมพันธ์กัน และระดับการคิดในบางระดับมีความสอดคล้องกัน ดังผลการเปรียบเทียบระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ระหว่างตัวแบบของโซโลกับแวนฮีลี่ ตามที่ Jurdak [12] ได้วิเคราะห์ความสัมพันธ์ไว้ดังแสดงในตารางที่ 2

ตารางที่ 2 การเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างระดับการคิดของโซโลกับแวนฮีลี่

ระดับการคิดของแวนฮีลี่	ระดับการคิดของโซโล
	ระดับก่อนโครงสร้าง (Prestructural) นักเรียนใช้ลักษณะหรือประเด็นที่ไม่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ที่กำหนดให้มาให้เหตุผลหรือแก้ปัญหา
ระดับ 0 การมองภาพ นักเรียนสามารถรับรู้ภาพที่เห็นได้ว่า มีลักษณะตามที่เขามองเห็น แต่ไม่เข้าใจสมบัติของมัน	*ระดับโครงสร้างเดียว (Unistructural)* นักเรียนใช้ข้อมูลหรือลักษณะที่ตรงประเด็นเพียงลักษณะเดียวในการหาข้อสรุปหรือนำข้อมูลที่กำหนดให้ทั้งหมดมาใช้ในการแก้ปัญหาเพียงข้อมูลเดียว
ระดับ 1 การวิเคราะห์ นักเรียนเข้าใจสมบัติของรูปเรขาคณิต แต่ไม่สามารถเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติต่างๆ ได้	*ระดับหลายโครงสร้าง (Multistructural)* นักเรียนใช้ข้อมูลหรือลักษณะที่ตรงประเด็นตั้งแต่สองลักษณะขึ้นไปในการแก้ปัญหา โดยยังเป็นการใช้ข้อมูลที่กำหนดให้แบบแยกส่วน ไม่มีการนำข้อมูลที่ได้มาวิเคราะห์ความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน ทำให้ไม่สามารถสังเคราะห์หรือเชื่อมโยงความสัมพันธ์แต่ละลักษณะเข้าด้วยกันได้
ระดับ 2 การคิดนิรนัยเบื้องต้น นักเรียนสามารถบอกความสัมพันธ์และเปรียบเทียบลักษณะเฉพาะและสมบัติต่างๆ ของรูปเรขาคณิตต่างๆ ได้	*ระดับเชื่อมโยง (Relational)* นักเรียนใช้ข้อมูลหรือลักษณะที่ตรงประเด็นทั้งหมดมาใช้แก้ปัญหา และสามารถวิเคราะห์และเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของข้อมูลทั้งหมดได้อย่างสมบูรณ์
ระดับ 3 การพิสูจน์โดยการนิรนัย นักเรียนสามารถเข้าใจและเขียนพิสูจน์โดยให้เหตุผลแบบนิรนัยอย่างมีระบบตามหลักพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ รู้จักตั้งกฎเกณฑ์และข้อโต้แย้งอย่างมีเหตุมีผล	*ระดับนามธรรมขั้นขยาย (Extended abstract)* นักเรียนสามารถสร้างองค์ความรู้หรือสมมุติฐานใหม่จากข้อมูลที่มีอยู่เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาที่ถูกต้องสมบูรณ์
ระดับ 4 ระดับสูงสุด นักเรียนมีความเข้าใจในโครงสร้างทางคณิตศาสตร์อย่างลึกซึ้ง สามารถคิดวิเคราะห์ลักษณะโครงสร้างและระบบสัจพจน์ได้เป็นอย่างดี	

ที่มา: Jurdak, M. (1991). Van Hiele levels and the SOLO taxonomy. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 22(1): 58.

ถึงแม้ว่า ระดับการคิดของแวนฮีลี่จะเป็นการวิเคราะห์ลักษณะการคิดของนักเรียนในเนื้อหาเรขาคณิตซึ่งแบ่งระดับการคิดเชิงเรขาคณิตออกเป็น 5 ระดับเท่ากับระดับการคิดตามตัวแบบของโซโล แต่ระดับการคิดที่สอดคล้องกันมีเพียง 4 ระดับเท่านั้น ซึ่งระดับการคิดก่อนโครงสร้าง (Prestructural) ในตัวแบบของโซโล นั้นไม่ปรากฏในระดับการคิดของแวนฮีลี่ ในขณะเดียวกันระดับการคิดในระดับ 4 ซึ่งเป็นระดับสูงสุดของระดับการคิดในแวนฮีลี่ก็ไม่ถูกกล่าวถึงในระดับการคิดตามตัวแบบของโซโล เมื่อพิจารณาถึงลักษณะการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่กล่าวไว้ในตัวแบบของโซโลและแวนฮีลี่ในแต่ละระดับที่สอดคล้องกัน พบว่า ลักษณะหรือรูปแบบการคิดของนักเรียนมีความคล้ายคลึงกันมาก ดังนั้นผู้เขียนจึงเชื่อว่าตัวแบบของโซโลก็น่าจะสามารถนำมาใช้ในการวิเคราะห์ระดับการคิดเชิงเรขาคณิตได้เฉกเช่นตัวแบบของแวนฮีลี่ ซึ่งสมมุติฐานที่ว่านี้ได้มีการพิสูจน์กัน โดยนำตัวแบบของโซโลมาวิเคราะห์ระดับการคิดเชิงเรขาคณิตในสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยม เพื่อเปรียบเทียบกับการวิเคราะห์ระดับการคิดในรูปแบบของแวนฮีลี่ [12] ดังรายละเอียดในตารางที่ 3

ตารางที่ 3 การเปรียบเทียบระดับการคิดเชิงเรขาคณิตตามตัวแบบของโซโลและแวนฮีลี่

พฤติกรรมที่แสดงออก	ระดับการคิดตามแนวคิดโซโล	ระดับการคิดตามแนวคิดแวนฮีลี่
ระบุรูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ได้บางส่วน แต่ไม่สามารถระบุรูปสี่เหลี่ยมชนิดเดียวกันที่เหลือได้ เนื่องจากใช้ข้อมูลที่ไม่ตรงเรื่องมาพิจารณา	*ระดับโครงสร้างเดียว (Unistructural)* ใช้องค์ประกอบเดียว (รูปสี่เหลี่ยม)	ระดับ 0: การมองภาพ (Visualization)
บอกชนิดของรูปสี่เหลี่ยมใดๆ ที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง แต่ไม่สามารถจัดรูปสี่เหลี่ยมดังกล่าวเข้ากลุ่มใดๆ ได้	*ระดับหลายโครงสร้าง (Multistructural)* ใช้ข้อมูลจากหลากหลายแง่มุมที่ไม่เกี่ยวข้องกันมาสร้างข้อสรุป (รูปสี่เหลี่ยม แต่ใช้สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมที่ไม่ตรงประเด็นมาพิจารณา)	ระดับ 1: การวิเคราะห์ (Analysis)
ระบุชนิดของรูปสี่เหลี่ยมใดๆ ที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง และสามารถบอกนิยามรูปสี่เหลี่ยมเหล่านั้นได้ จากการพิจารณาองค์ประกอบต่างๆ ของรูปสี่เหลี่ยมเหล่านั้น	*ระดับเชื่อมโยง (Relational)* ใช้ข้อมูลและความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกันทั้งหมดมาใช้ในการพิจารณาและสร้างความสัมพันธ์ (รูปสี่เหลี่ยม สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมนั้นๆ เงื่อนไขอื่นๆ ในการนิยามรูป)	ระดับ 2: *การคิดนิรนัยเบื้องต้น* (Informal deduction)
บอกนิยามของรูปสี่เหลี่ยมในได้ละชนิดได้ถูกต้องและตรวจสอบบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมต่างๆ เพื่อให้แน่ใจว่านิยามเหล่านั้นเปิดให้จัดรูปสี่เหลี่ยมให้เข้ากลุ่มได้อย่างถูกต้อง	*ระดับนามธรรมขั้นขยาย (Extended abstract)* ใช้ข้อมูลทั้งหมดที่มีอยู่อย่างเข้าใจ (รูปสี่เหลี่ยม สมบัติของรูป ความสัมพันธ์ระหว่างกัน) และสามารถนำข้อมูลเหล่านั้นมาพัฒนาแนวคิดใหม่ๆ หรือสร้างสมมติฐานและหลักการต่างๆ (ที่ตรวจสอบได้โดยข้อมูล)	ระดับ 3: การพิสูจน์โดยการนิรนัย (Deductive)

ที่มา: Jurdak, M. (1991). Van Hiele levels and the SOLO taxonomy. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 22(1): 60.

จากตารางที่ 3 พบว่า ในการวิเคราะห์ระดับการคิดของนักเรียนที่แสดงออกในสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมใดๆ นั้น นักเรียนที่มีระดับการคิดในระดับโครงสร้างเดียวตามตัวแบบของโซโล มีระดับการคิดสอดคล้องกับระดับการคิดในระดับ 0: การมองภาพตามตัวแบบของแวนฮีลี่ ในขณะเดียวกัน นักเรียนที่มีระดับการคิดระดับหลายโครงสร้าง ระดับเชื่อมโยง และระดับนามธรรมขั้นขยายก็สามารถประเมินได้ว่ามีระดับการคิดสอดคล้องกับระดับการคิดตามแนวคิดของโซโลในระดับ 1: การวิเคราะห์ ระดับ 2: การคิดนิรนัยเบื้องต้น และระดับ 3: การพิสูจน์โดยการนิรนัยตามลำดับ

ดังนั้นจึงพอสรุปได้ว่า ตัวแบบของโซโลนั้นสามารถนำมาใช้ในการวิเคราะห์ระดับการคิดเชิงเรขาคณิตได้เช่นเดียวกับตัวแบบของแวนฮีลี่ ซึ่งนักการศึกษาทางคณิตศาสตร์ หรือครูผู้สอนคณิตศาสตร์สามารถนำตัวแบบของโซโลมาใช้ในการวิเคราะห์ระดับการคิดเชิงเรขาคณิตแทนตัวแบบของแวนฮีลี่ได้ นอกจากนี้ตัวแบบของโซโลยังมีความน่าสนใจมากกว่าในเรื่องของการพิจารณาถึงลำดับขั้นพัฒนาการของนักเรียนในแต่ละช่วงวัย ก่อนที่จะดำเนินการวิเคราะห์ว่านักเรียนมีระดับการคิดอยู่ในระดับใด ซึ่งถือว่าเป็นการวิเคราะห์ที่ละเอียดและลึกซึ้งมากยิ่งขึ้น

สรุป

การวิเคราะห์ระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแบบของโซโล ถือเป็นกรอบแนวคิดหนึ่งในการวิเคราะห์ระดับการคิดที่มีความละเอียดได้ผลใกล้เคียงและสอดคล้องกับสิ่งที่นักเรียนแสดงออกมากที่สุด โดยในการพิจารณาระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้น ใช้การจำแนกโครงสร้างของการพิจารณาผลการเรียนรู้ของผู้เรียนออกเป็น 2 องค์ประกอบที่เกี่ยวเนื่องกัน โดยองค์ประกอบแรกเป็นการพิจารณาที่ลำดับขั้นพัฒนาการ (Modes) ว่านักเรียนมีลำดับขั้นพัฒนาการอยู่ในขั้นใด เมื่อทราบขั้นพัฒนาการของนักเรียนแล้วจึงพิจารณาองค์ประกอบที่ 2 นั่นคือ การพิจารณาว่า นักเรียนมีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในระดับใด โดยพิจารณาจากระดับของการตอบสนองในแต่ละขั้นพัฒนาการ (Levels within each Modes) นอกจากนี้ตัวแบบของโซโลยังสามารถนำมาใช้ในการวิเคราะห์ระดับการคิดเชิงเรขาคณิตแทนตัวแบบของแวนฮีลี่ได้อีกด้วย

เอกสารอ้างอิง

[1] Bigg, J.B.; and Collis, K. F. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: The SOLO Taxonomy (Structure of Observed Learning Outcomes).* New York: Academic Press.

[2] --------. (1991). Multimodel Learning and Intelligent Behavior. In *Reconceptualization and Measurement Intelligence*. H. Rowe (Ed.). pp. 57-76. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

[3] Jones, G. A., Thornton, C. A.; and Putt, L. J. (1994). A Model for Nurturing and Assessing Multidigit Number Sense among First grade Children. *Educational Studies in Mathematics.* 27: 117-143.

[4] Jones, G. A., et al. (1996, May). Multidigit Number Sense: A Framework for Instruction and Assessment. *Journal for Research in Mathematics Education.* 27(3): 310-336.

[5] --------. (1997). A Framework for Assessing and Nurturing Young Children's Thinking in Probability. *Educational Studies in Mathematics*. 32: 101-125.

[6] Tarr, J. E.; and Jones, G. A. (1997). A Framework for Assessing Middle School Students' Thinking in Conditional Probability and Independence. *Mathematics Education Research Journal.* 9: 39-59.

[7] Jones, G. A.; et al. (2000). A Framework for Characterizing Children's Statistical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*. 2(4): 269-307.

[8] Mooney, E. S. (2002). A Framework for Characterizing Middle School Students' Statistical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*. 4(1): 23-63.

[9] Kamol, N. (2005). *A Framework for Characterizing Lower Secondary School Students' Algebraic Thinking*. Dissertation, Ed.D. (Mathematics Education). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University.

[10] ณัชชา กมล. (2554). การพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลาย. ใน *รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์*. เชียงใหม่: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

[11] Sgroi, L. S. (2001). *Teaching Elementary and Middle School Mathematics: Raising the Standards*. Belmont, CA: Wadsworth/Thomson Learning.

[12] Jurdak, M. (1991). Van Hiele levels and the SOLO taxonomy. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 22(1): 57 – 60.