บทความวิชาการ

เกมไพ่เซตกับเรขาคณิตสัมพรรค

ชุติมา แสงจำปา* ลดามาศ สายเพชร และ จริยา อุ่ยยะเสถียร

บทคัดย่อ

เกมไพ่เซตเป็นเกมไพ่ที่เล่นโดยใช้ชุดไพ่ลักษณะเฉพาะซึ่งประกอบด้วยไพ่ทั้งหมด 81 ใบที่ไม่ซ้ำกันเลย โดยไพ่แต่ละใบจะมีสัญลักษณ์แตกต่างกันไป ในเกมนี้สิ่งสำคัญที่ผู้เล่นจะต้องค้นหา เรียกว่า "ชุดไพ่เซต" ซึ่งเป็นชุดไพ่ 3 ใบที่สัญลักษณ์บนไพ่ทั้งสามจะมีโครงสร้างและรูปแบบความสัมพันธ์ที่น่าสนใจ จากความสัมพันธ์นี้เอง ถ้าให้ไพ่แต่ละใบแทนจุดใน $AG(4,3)$ ซึ่งคือ เรขาคณิตสัมพรรคที่มีมิติ 4 และอันดับ 3 แล้วจะได้ว่า เซตของจุดทั้งหมดที่แทนไพ่ในชุดไพ่เซต คือ เซตของจุดที่อยู่บนเส้นเดียวกันนั่นเอง อย่างไรก็ตามเรขาคณิตประเภทนี้ยังไม่เป็นที่รู้จักเท่าใดนัก บทความนี้จึงแนะนำเรขาคณิตสัมพรรคให้กับผู้อ่านได้รู้จัก เพื่อที่จะสามารถนำสมบัติที่มีอยู่แล้วของจุดและเส้นใน $AG(4,3)$ มาอธิบายเหตุการณ์ต่างๆ ที่เกิดขึ้นในเกมไพ่เซตได้ นอกจากนี้ยังได้ให้แนวทางที่สามารถนำไปพัฒนารูปแบบของเกมได้ รวมถึงให้แนวการประยุกต์เรขาคณิตสัมพรรคกับคณิตศาสตร์ด้านอื่นๆ ไว้ด้วย

คำสำคัญ: เกมไพ่เซต เรขาคณิตสัมพรรค

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

*ผู้นิพนธ์ประสานงาน, e-mail: chutima.scp@gmail.com

SET Game and Affine Geometry

Chutima Sangchampa*, Ladamas Saiphet and Chariya Uiyyasathian

ABSTRACT

The SET Game is a card game using a specific deck of different 81 cards, each of which has unique symbols. The game is to find a "SET" which is a collection of three cards with a certain pattern of their symbols. Mathematically, the SET Game can be modeled using an affine geometry of dimension 4 and order 3, namely $AG(4,3)$, by viewing a card as a point in $AG(4,3)$. Consequently, a SET can be thought of as a set of three points which are co-linear. This article gives an introduction to an affine geometry so that we can use some known properties of lines and points in $AG(4,3)$ to explain certain situations in the SET game. Moreover, we provide several ways to modify the game rules. Finally, we apply some results in affine geometry to some related mathematical problems.

Keywords: SET Game, Affine geometry

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of science, Chulalongkorn University

*Corresponding author, email: chutima.scp@gmail.com

บทนำ

เกมไพ่เซตเป็นเกมไพ่ชนิดหนึ่งที่ได้รับความนิยมอย่างมากในสหรัฐอเมริกา ถูกคิดค้นขึ้นโดยนักพันธุศาสตร์ชาวอเมริกัน Marsha Jean Falco ซึ่งเกมนี้มีที่มาจากงานวิจัยของเธอในอดีตเกี่ยวกับลักษณะทางพันธุกรรมของสุนัขพันธ์เยอรมันเชพเพิร์ด (German Shepherd) เนื่องจากเธอต้องทำวิจัยร่วมกับสัตวแพทย์ เพื่อการสื่อสารที่ง่ายขึ้นเธอจึงเลือกใช้ไพ่ที่มีสัญลักษณ์แตกต่างกันแทนการบอกลักษณะทางพันธุกรรมที่ต่างกันของสุนัขแต่ละตัว และในภายหลังเธอเห็นว่าไพ่เหล่านี้น่าจะสามารถนำไปสร้างเป็นเกมเพื่อความสนุกสนานได้ เกมไพ่เซตจึงได้ถือกำเนิดขึ้น จนกระทั่งเป็นส่วนสำคัญที่ทำให้เธอได้ก่อตั้งบริษัท Set Enterprises, Inc. ขึ้นมา ทั้งยังได้ผลิตเกมอีกหลายชนิดตามมาอีกด้วย [1]

รูปที่ 1 *Marsha Jean Falco* และเครื่องหมายการค้าของ Set Enterprises, Inc. [1]

เกมไพ่เซตประกอบด้วยไพ่ทั้งหมด 81 ใบ ซึ่งไพ่แต่ละใบจะมีสัญลักษณ์บนไพ่ที่แตกต่างกันไปและไม่มีไพ่ที่ซ้ำกัน โดยมีรูปแบบความสัมพันธ์ของสัญลักษณ์บนไพ่ของชุดไพ่ 3 ใบในเกมที่มีความสำคัญซึ่งเรียกว่า “ชุดไพ่เซต” จากรูปแบบความสัมพันธ์นี้เอง พบว่ามีลักษณะคล้ายความสัมพันธ์ของจุดในโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แบบหนึ่งที่มีชื่อว่าเรขาคณิตสัมพรรค (Affine geometry : AG) ซึ่งเป็นเรขาคณิตประเภทหนึ่งที่ไม่ใช่เรขาคณิตแบบยุคลิดที่เราคุ้นเคย บทความนี้จะแสดงให้เห็นว่ารูปแบบความสัมพันธ์ของทั้งสองสิ่งนี้เหมือนกัน และสมบัติบางประการของเรขาคณิตสัมพรรคก็จะเป็นสิ่งที่เกิดขึ้นในเกมไพ่เซตเช่นกัน ทั้งนี้บทความนี้จะช่วยให้เราพบข้อสังเกตต่างๆ ที่เกิดขึ้นได้ในการเล่นเกมไพ่เซต และได้รู้จักเรขาคณิตชนิดนี้เพื่อนำไปประยุกต์ใช้ให้มากขึ้นต่อไป

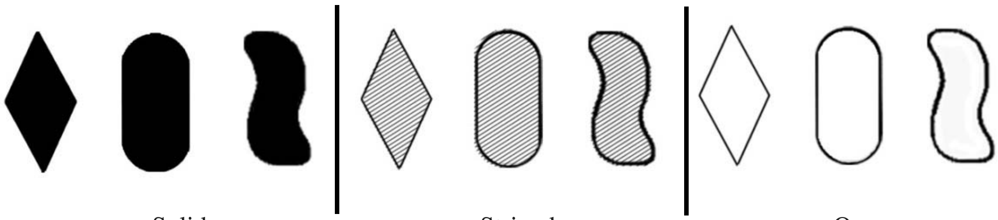
รูปที่ 2 *SET game* [2]

กฎกติกาของเกมไพ่เซต

ในเกมนี้จะมีไพ่ที่ใช้สำหรับเล่นเกมโดยเฉพาะ ซึ่งสัญลักษณ์บนหน้าไพ่ประกอบด้วยสมบัติ 4 ประการ คือ สี จำนวน รูปร่าง และลวดลาย โดยแต่ละสมบัติจะมี 3 รูปแบบที่แตกต่างกันดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 รูปแบบทั้งสามของแต่ละสมบัติ

สมบัติ	รูปแบบ		
สี	แดง (R)	เขียว (G)	ม่วง (P)
จำนวน	1 รูป	2 รูป	3 รูป
รูปร่าง	Oval	Diamond	Squiggle
ลวดลาย	Solid	Striped	Open

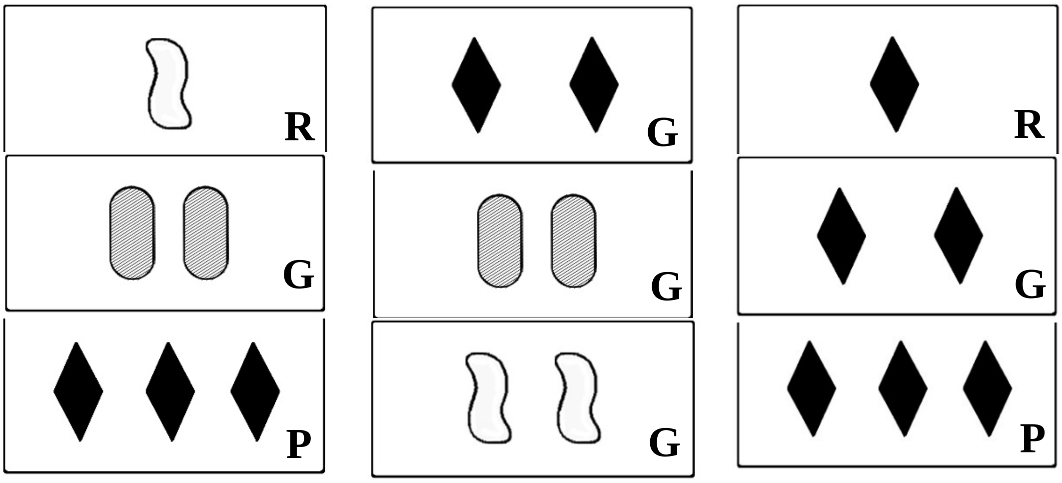


Solid Striped Open

รูปที่ 3 รูปร่างและลวดลายของสัญลักษณ์ (ไม่ระบุสี)

โดยไพ่แต่ละใบจะมีสัญลักษณ์ต่างกันทั้งหมด ดังนั้นจากสมบัติทั้งสี่ของไพ่แต่ละใบ จึงมีไพ่ในสำรับทั้งหมด $3^4 = 81$ใบ เพื่อความสะดวกในบทความนี้จะขอเรียกสมบัติทั้งสี่นี้ว่า *"สมบัติของไพ่"* และจะขอแทนสีของสัญลักษณ์บนไพ่ด้วยตัวอักษร R (สีแดง), G (สีเขียว) และ P (สีม่วง) ที่บริเวณมุมล่างด้านขวาของไพ่แต่ละใบ ซึ่งสิ่งสำคัญของเกมนี้อยู่ที่การค้นหา**ชุดไพ่สามใบเมื่อเราพิจารณาแต่ละสมบัติของไพ่ดังกล่าวทีละสมบัติแล้วพบว่าเหมือนกันทั้งหมด หรือแตกต่างกันทั้งหมด ที่เรียกว่า "ชุดไพ่เซต"** ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างชุดไพ่เซต



ชุดไพ่เซตชุดที่ 1 ชุดไพ่เซตชุดที่ 2 ชุดไพ่เซตชุดที่ 3

ชุดไพ่เซตชุดที่ 1 ทุกสมบัติของไพ่ทั้งสามมีรูปแบบต่างกัน

ชุดไพ่เซตชุดที่ 2 มีสมบัติเดียวที่ต่างกันของไพ่ทั้งสามใบ คือ ลวดลาย แต่สมบัติอื่นๆ เหมือนกันทั้งหมด

ชุดไพ่เซตชุดที่ 3 มีสองสมบัติของไพ่ที่ต่างกันทั้งสามใบ คือ สี และจำนวน แต่สองสมบัติที่เหลือมีรูปแบบเดียวกัน

เกมนี้สามารถเล่นแข่งขันกันหลายคน หรือเล่นคนเดียวก็สามารถทำได้ ซึ่งการเล่นคนเดียวก็เป็นการท้าทายตนเองแบบหนึ่ง เริ่มต้นเล่นเกมจะเปิดไพ่ 12 ใบลงบนโต๊ะ จากนั้นผู้เล่นแต่ละคนจะต้องแข่งขันกันค้นหาชุดไพ่เซตจากไพ่บนโต๊ะ หากพบชุดไพ่เซตแล้วให้พูดคำว่า “เซต” ซึ่งถ้าใครพูดคำว่าเซตออกมาแล้วจะต้องหยิบไพ่สามใบนั้นขึ้นมาทันที หากไพ่สามใบนั้นเป็นชุดไพ่เซตผู้เล่นคนนั้นก็จะได้รับหนึ่งแต้ม ในทางกลับกันถ้าไม่ใช่ชุดไพ่เซตหรือหยิบไพ่ช้าก็จะถูกหักหนึ่งแต้มเช่นกัน จากนั้นไพ่สามใบใหม่ก็จะถูกเปิดเพิ่มเพื่อแทนไพ่ที่ถูกนำออกไปแล้ว แต่ระหว่างเกมอาจเกิดเหตุการณ์ที่ผู้เล่นทุกคนเห็นตรงกันว่าไม่มีชุดไพ่เซตในไพ่ 12 ใบได้ (อาจเป็นไปได้ว่ามี แต่ไม่มีผู้เล่นคนใดสังเกตเห็น) ในกรณีนี้สามารถเปิดไพ่เพิ่มได้อีกครั้งละสามใบจนกว่าจะมีชุดไพ่เซตเกิดขึ้น ถึงแม้จะมีการเปิดไพ่เพิ่มจนมีจำนวนมากกว่า 12 ใบ แต่หากจำนวนไพ่ยังมากกว่า 12 ใบอยู่ ก็จะไม่เปิดไพ่ใบใหม่ลงมาแทนไพ่เซตที่ถูกหยิบออกไป การเล่นจะดำเนินเกมลักษณะเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งใช้ไพ่หมดทั้งสำรับ และไม่สามารถหาชุดไพ่เซตได้อีก ผู้ที่มีแต้มมากที่สุดหลังจบเกมก็จะเป็นผู้ชนะ [3]

การเล่นเกมไพ่นี้มีข้อสังเกตว่า ในกรณีที่ไม่มีชุดไพ่เซตปรากฏบนโต๊ะนั้น เราจะต้องเปิดไพ่เพิ่มอีกกี่ใบจึงจะแน่ใจได้ว่ามีชุดไพ่เซตอยู่ในนั้นอย่างแน่นอน ซึ่งคำตอบที่ว่า**จำนวนไพ่ที่มากที่สุดที่ไม่มีชุดไพ่เซตอยู่เลยคือกี่ใบ**นั้นได้เคยมีการหาคำตอบโดยอาศัยการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์มาแล้ว ซึ่งคำตอบคือจำนวนไพ่จะต้องไม่เกิน 20 ใบ แต่สิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาเรื่องนี้คือ ในงานวิจัยของ Pellegrino [4] ที่ตีพิมพ์เป็นภาษาอิตาลีได้ตอบคำถามนี้ไว้แล้วก่อนที่จะเกิดเกมไพ่เซตนี้ ซึ่งถูกนำมาศึกษาเพิ่มเติมภายหลังอีกครั้งโดย Hill [5] จน MacLagan [6] ได้นำงานวิจัยของ Pellegrino [4] มาอธิบายเชื่อมโยงกับเกมไพ่เซตนี้ โดยพิสูจน์ผ่านเรขาคณิตสัมพรรค ดังที่จะแสดงให้เห็นภายหลังว่าเกมไพ่เซตมีโครงสร้างเดียวกับสิ่งนี้ น้อยคนที่จะรู้จักเรขาคณิตชนิดนี้ซึ่งก็มีความน่าสนใจไม่น้อยไปกว่าเรขาคณิตแบบยูคลิดที่เรารู้จักกันดีเลย ดังนั้นอย่างไรก็ตามเราควรทำความรู้จักกับเรขาคณิตสัมพรรคกันก่อนในหัวข้อถัดไป

เรขาคณิตสัมพรรค (Affine geometry: AG)

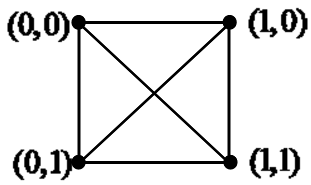
เมื่อกล่าวถึงคำว่าเรขาคณิตเรามักจะเคยชินกับ*เรขาคณิตแบบยุคลิด* [7, 8] ที่มีเนื้อหาอยู่ในบทเรียนตั้งแต่ระดับมัธยมศึกษา ซึ่งกล่าวถึงจุด เส้น และการวัด (มุม, ระยะทาง) เป็นสำคัญ โดยสิ่งเหล่านี้มีอยู่เป็นอนันต์ในเรขาคณิตประเภทนี้ ดังเช่น จากสัจพจน์ของ Ruler [8] ในเรขาคณิตแบบยุคลิด จะได้ว่าทุกเส้นบรรจุจุดอยู่เป็นจำนวนอนันต์จุด อีกทั้งในเส้นตรงสามารถวัดมุมได้ คือ 180 องศา และถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมที่อยู่ตรงข้ามกันจะมีขนาดเท่ากัน หรือเมื่อกล่าวถึงวงกลมจะหมายถึงเซตของจุดที่ห่างจากจุดๆ หนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน แต่ทว่าในเรขาคณิตสัมพรรคนั้นทุกสิ่งจะมีอยู่เป็นจำนวนจำกัด อีกทั้งไม่สนใจการวัดในทุกรูปแบบทั้งมุมและระยะทาง แต่สนใจเพียงความสัมพันธ์ และจำนวนของสิ่งต่างๆ เท่านั้น โดยมีบทนิยามซึ่งนำมาจาก Handbook of Combinatorial Designs [9] ดังต่อไปนี้

บทนิยามที่ 1 *เรขาคณิตสัมพรรค* คือ เรขาคณิตที่ประกอบด้วยเซตจำกัดของจุด และเซตจำกัดของเส้นที่มีโครงสร้างความสัมพันธ์ที่สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. สองจุดใดๆ จะอยู่บนเส้นเดียวกันเพียงเส้นเดียวเท่านั้น
2. มีสมบัติความขนาน (parallelism) นั่นคือ เมื่อ p เป็นจุดใดๆ และ l เป็นเส้นที่ไม่บรรจุจุด p จะมีเส้น l' เท่านั้นที่บรรจุจุด p และขนานกับ l (ไม่บรรจุจุดใดๆ ใน l)
3. (Triangle axiom) ถ้า A,B,C เป็นสามจุดที่ไม่มีคู่จุดใดอยู่บนเส้นเดียวกัน และจุด A',B' (ไม่ใช่จุด A,B,C) ที่ทำให้เส้น $A'B'$ ขนานกับเส้น AB แล้วจะมีเส้นที่บรรจุจุด A' ที่ขนานกับ AC และ จะมีเส้นที่บรรจุจุด B' ที่ขนานกับ BC โดยที่สองเส้นนี้จะตัดกันที่จุดๆ หนึ่งให้ชื่อว่า C'
4. มีจุดสามจุดที่ไม่อยู่บนเส้นเดียวกันเลย

จากบทนิยามจะเห็นว่าความสัมพันธ์ในเรขาคณิตสัมพรรคได้ถูกกล่าวถึงไปแล้วบางส่วน กล่าวคือ จุดสองจุด P_1, P_2 จะสัมพันธ์กันเมื่อทั้งคู่อยู่บนเส้นเดียวกัน จุด P จะสัมพันธ์กับเส้น l เมื่อจุด P อยู่บนเส้น l (เส้น l บรรจุจุด P) เส้น l_1 จะสัมพันธ์กับเส้น l_2 เมื่อบรรจุจุดเดียวกันอย่างน้อยหนึ่งจุด (l_1 ตัดกับ l_2) แต่สองเส้นใดๆ จะมีจุดร่วมกันไม่เกินหนึ่งจุด เพราะถ้าหากมีมากกว่าหนึ่งจุด จะทำให้มีสองจุดจากจุดเหล่านั้นที่อยู่บนสองเส้นซึ่งเป็นไปไม่ได้ ซึ่งนอกจากจุด และเส้น ในเรขาคณิตนี้ยังมีปริภูมิย่อยอื่นๆ อีก อย่างไรก็ตามทุกอย่างก็มีอยู่เป็นจำนวนจำกัด จึงมีพารามิเตอร์ d ที่เรียกว่า *"มิติ"(dimension)* ใช้แสดงจำนวนของปริภูมิเหล่านี้ กล่าวคือ เมื่อเรขาคณิตสัมพรรคมีมิติ d จะมีปริภูมิย่อย d ปริภูมิ ที่มีมิติตั้งแต่ 0 ถึง $d-1$ ตัวอย่างเช่น เมื่อ $d=3$ จะประกอบด้วยจุด เส้นและระนาบที่มีมิติเป็น 0 1 และ 2 ตามลำดับ แต่ปริภูมิย่อยที่มีมิติ t $(3 \le t \le d-1)$ จะเรียกว่า "*t-แฟลต (t-flat)*" ยกเว้นมิติ $d-1$ จะเรียกว่า *ไฮเปอร์เพลน (Hyperplane)* และเราจะนิยามความสัมพันธ์ระหว่างปริภูมิมิติต่างๆ เหล่านี้ในทำนองเดียวกันกับความสัมพันธ์ระหว่างจุดกับเส้นที่ว่าเส้นบรรจุจุดปริภูมิที่มีมิติ t $(2 \le t \le d-1)$ ก็จะบรรจุปริภูมิที่มีมิติ $t-1$ เช่นกัน

เมื่อพิจารณาเรขาคณิตสัมพรรคที่มิติเท่ากับสอง ซึ่งมีชื่อเรียกเฉพาะว่า *ระนาบสัมพรรค (Affine plane)* [10] ซึ่งมีการนำไปศึกษาต่อมากมาย เนื่องจากในระนาบจะประกอบด้วยจุดและเส้นเท่านั้น และยังสามารถแสดงด้วยภาพได้ เรขาคณิตสัมพรรคขนาดที่เล็กที่สุดที่สอดคล้องกับบทนิยาม ประกอบด้วย จุดสี่จุด และเส้นหกเส้น ดังรูปที่ 4 โดยมีบทพิสูจน์ของ Wallis [10] กล่าวไว้ว่าเป็นเรขาคณิตสัมพรรคแบบเดียวที่มีเส้นสองเส้นบรรจุจุดทั้งหมดในปริภูมิ และยังมีค่าคงที่อีกหนึ่งค่าที่เกิดตามมาอีกด้วย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้



รูปที่ 4 ตัวอย่างเรขาคณิตสัมพรรคที่มิติเท่ากับสอง

ทฤษฎีบทที่ 1 [10] สำหรับระนาบสัมพรรคใดๆ จะมีพารามิเตอร์ n ซึ่งทุกเส้นจะบรรจุจุดจำนวน n จุด และแต่ละจุดจะอยู่บนเส้นจำนวน $n+1$ เส้น

บทพิสูจน์ ถ้ามีเส้นสองเส้นบรรจุจุดทั้งหมดในระนาบ จะได้ว่าระนาบนั้นคือ $AG(2,2)$ จึงเหลือเพียงกรณีที่ ไม่มีสองเส้นใดๆ ที่บรรจุจุดทั้งหมดในระนาบ

พิจารณาเส้น 2 เส้นใดๆ ในระนาบ ให้ชื่อว่า l และ m โดยให้ l บรรจุจุด $a_1, a_2, \ldots, a_n$

และพิจารณาจุด p ที่ไม่อยู่บนเส้นทั้งสองนี้

จะได้ว่า p จะอยู่บนเส้นที่บรรจุจุด p กับแต่ละจุด a_i บนเส้น l รวมทั้งหมด n เส้น โดยให้ชื่อว่า $pa_1, pa_2, \ldots, pa_n$ (แสดงได้โดยไม่ยากว่า n เส้นนี้แตกต่างกันจากบทนิยามที่ 1) และจากบทนิยามที่ 2 จุด p จะอยู่บนเส้นที่ขนานกับ l อีกหนึ่งเส้นด้วย นั่นคือจะมีทั้งหมด $n+1$ เส้นที่บรรจุจุด p

ต่อไปพิจารณา $n+1$ เส้นดังกล่าว เช่นเดียวกันจากบทนิยามที่ 2 จะมีเพียงหนึ่งเส้นจาก $n+1$ เส้นนี้ซึ่งขนานกับเส้น m ส่วน n เส้นที่เหลือจะต้องตัดกับเส้น m เส้นละ 1 จุดที่ต่างกัน จำนวนทั้งหมด n จุด เนื่องจากสองเส้นใดๆ ต้องตัดกันหนึ่งจุด และแต่ละจุดบนเส้น m จะต้องอยู่บนเส้นเดียวกับจุด p เพียงหนึ่งเส้น

เนื่องจาก l, m เป็นเส้นใดๆ ดังนั้นทุกเส้นจึงบรรจุจุด n จุด และในทำนองเดียวกัน แต่ละจุดจะอยู่บนเส้น $n+1$ เส้น เพราะ p เป็นจุดใดๆ ในระนาบที่ไม่อยู่บนเส้น l และเส้น m □

ในทำนองเดียวกันเราสามารถพิสูจน์ได้ด้วยว่า เมื่อมิติมากกว่าสองก็จะมีพารามิเตอร์ n ที่ทุกเส้นบรรจุจุด n จุด และจะเรียกค่านี้ว่า *"อันดับ" (order)* ซึ่งเรขาคณิตสัมพรรคที่มีมิติ d และอันดับ n จะแทนด้วยสัญลักษณ์ $AG(d,n)$ ดังนั้นในรูปที่ 3 ก็คือ $AG(2,2)$ นอกจากนี้ Cheowitzo [11] ได้กล่าวถึงจำนวนจุดในแต่ละปริภูมิย่อยไว้ว่าประกอบด้วยจุดทั้งหมดกี่จุด ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2 [11] ให้ $A = AG(d,n)$ ถ้า U เป็นปริภูมิย่อย t มิติ ของ A เมื่อ $1 \le t \le d-1$ จะได้ว่า U มีจุดทั้งหมด n^t จุด

จากทฤษฎีบทที่ 2 จะได้ว่า $AG(d,n)$ มีจุดทั้งหมด n^d จุด เราจึงสามารถเขียนแทนจุดต่างๆ ใน $AG(d,n)$ ได้ด้วยเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ [12] ที่มีมิติ d อันดับ n หรือ เวกเตอร์ d ตำแหน่ง โดยแต่ละตำแหน่งเป็นสมาชิกของเซต F ที่มีสมาชิก n ตัว ซึ่งจะมีจำนวนเวกเตอร์ดังกล่าวเท่ากับจำนวนจุดพอดี รวมถึงเส้นก็เขียนแทนด้วยเซต $\{\bar{v} + k\bar{w} : k \in F\}$ โดยที่ $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในปริภูมิ V ได้ นอกจากนี้ก็ยังมีสิ่งที่น่าสนใจอื่นๆ ในปริภูมิเหล่านี้อีกเช่น จำนวนเส้นทั้งหมด และจุดหนึ่งจะอยู่บนเส้นจำนวนกี่เส้นใน $AG(d,n)$ ที่เป็นไปได้ว่าจะมีจำนวนเท่ากับจำนวนชุดไพ่เซตในเกม และไพ่ใบหนึ่งจะอยู่ในชุดไพ่เซตได้ทั้งหมดกี่ชุด ตามลำดับ

ทฤษฎีบทที่ 3 [10] ให้ $A = AG(d,n)$ จะได้ว่า

1. A จะมีเส้นทั้งหมด $\dfrac{n^d(n^d-1)}{n(n-1)}$ เส้น
2. จุดใดๆ ใน A จะอยู่บนเส้นทั้งหมด $\dfrac{n^d-1}{n-1}$ เส้น

บทพิสูจน์ 1. เมื่อนับเส้นที่บรรจุคู่จุดใดๆ ใน $AG(d,n)$ จะมีเส้นทั้งหมด $\binom{n^d}{2}$ เส้น โดยที่แต่ละเส้นจะถูกนับซ้ำเท่ากับจำนวนคู่จุดใดๆ บนเส้นเดียวกันเท่ากับ $\binom{n}{2}$ ครั้ง ดังนั้นจำนวนเส้นทั้งหมดคือ

$$\binom{n^d}{2} \div \binom{n}{2} = \frac{n^d(n^d-1)}{n(n-1)}$$ เส้น

2. ให้ $\bar{v}$ เป็นจุดใดๆ ใน A จะได้ว่ามีจุดอื่นๆ นอกจาก $\bar{v}$ อีก n^d-1 จุด นั่นคือจะมีเส้นที่บรรจุจุดเหล่านี้และจุด $\bar{v}$ อยู่ n^d-1 เส้น โดยที่แต่ละเส้นจะถูกนับซ้ำ $n-1$ ครั้งเท่ากับจำนวนจุดบน 1 เส้นที่ไม่รวมจุด $\bar{v}$ ดังนั้นเส้นทั้งหมดที่บรรจุจุด $\bar{v}$ คือ $\dfrac{n^d-1}{n-1}$ เส้น □

สังเกตว่าเมื่อมิติมีค่ามากกว่าสอง เราจะไม่สามารถแสดงให้เห็นด้วยภาพได้ แต่ยังสามารถนับจำนวนปริภูมิย่อยต่าง ๆ ที่ต้องการทราบค่าได้จากพารามิเตอร์ทั้งสองและทฤษฎีบทที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ซึ่งตัวอย่างที่น่าสนใจซึ่งต้องนำไปใช้ในหัวข้อถัดไปคือ $AG(4,3)$ ซึ่งประกอบด้วย จุด เส้น ระนาบ และ *3*-แฟลต ซึ่งมีจุดทั้งหมด $3^4 = 81$ จุด และเส้นทั้งหมด $\dfrac{3^4(3^4-1)}{3(3-1)} = 1080$ เส้น โดยแต่ละจุดจะอยู่บน 2 เส้น นอกจากนี้เมื่อ $t = 2,3$ ในแต่ละ t-แฟลต จะมีจุด 3^t จุด นั่นทำให้จำนวนเส้นในแต่ละ t-แฟลตมีเส้นทั้งหมด $\dfrac{3^t(3^t-1)}{3(3-1)}$ เส้น โดยใช้วิธีการนับเช่นเดียวกันกับการนับเส้นทั้งหมด ในทำนองเดียวกันหากต้องการนับจำนวน t-แฟลต ก็สามารถทำได้ไม่ยากด้วยวิธีการนับที่คล้ายกัน

หลังจากทำความรู้จักกับเรขาคณิตสัมพรรคแล้ว เราสังเกตว่าจำนวนไพ่ในเกมไพ่เซตมีจำนวนเท่ากับจำนวนจุดใน $AG(4,3)$ และมีความสัมพันธ์ระหว่างไพ่แต่ละใบอยู่ เช่นเดียวกันกับจุดแต่ละจุดในเรขาคณิตสัมพรรค แต่หากพิจารณาไพ่ 3 ใบที่แทนจุดที่อยู่บนเส้นเดียวกันแล้ว ไพ่เหล่านั้นจะมีความสัมพันธ์กันอย่างไรในเกม ซึ่งข้อสังเกตนี้เองจะเป็นส่วนสำคัญที่จะศึกษาเพิ่มเติมในหัวข้อต่อไป

การสร้างแบบจำลองไพ่เซตโดยใช้ $AG(4,3)$

ในงานวิจัยของ Tucker [13] ได้ตั้งข้อสังเกตไว้ว่าชุดไพ่ในเกมไพ่เซตสามารถแปลงให้อยู่ในรูปของ $AG(4,3)$ ได้โดยให้ไพ่แต่ละใบแทนจุดแต่ละจุด โดยในที่นี้เราจะให้จุดแทนด้วยเวกเตอร์ที่มี 4 ตำแหน่ง และให้แทนแต่ละตำแหน่งด้วยสมบัติแต่ละสมบัติของไพ่ คือ สี จำนวน รูปร่าง และลวดลายตามลำดับ นอกจากนี้แต่ละตำแหน่งจะมีสามรูปแบบที่ต่างกันเช่นเดียวกับจุดที่แต่ละตำแหน่งของจุดมาจาก $\mathbb{Z}_3$ ซึ่งมีสมาชิกที่ต่างกันสามตัว ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 แสดงการกำหนดค่าของสมบัติสี่ประการของไพ่ด้วยค่าเวกเตอร์ 4 มิติ บน $\mathbb{Z}_3$

ค่าของสมบัติของไพ่	**-1**	**0**	**1**
สี	แดง (R)	เขียว (G)	ม่วง (P)
จำนวน	1 รูป	2 รูป	3 รูป
รูปร่าง	Oval	Diamond	Squiggle
ลวดลาย	Solid	Striped	Open

ตัวอย่างเช่น ไพ่ที่มีสัญลักษณ์ Solid Diamond สีเขียวจำนวนสองรูป คือเวกเตอร์ (0, 0, 0, -1) และไพ่ที่มีสัญลักษณ์ Open Squiggle สีแดงจำนวน 1 รูป คือเวกเตอร์ (-1, -1, 1, 1) เป็นต้น

จากการแทนด้วยเวกเตอร์ ทำให้ได้ว่าชุดไพ่เซต 3 ใบ คือ 3 เวกเตอร์ซึ่งรวมกันได้เวกเตอร์ 0 เนื่องจากถ้ามีสมบัติหนึ่งที่รูปแบบเหมือนกันผลรวมของทั้งสามเวกเตอร์ในตำแหน่งเดียวนั้นก็จะเป็นพหุคูณของ 3 ซึ่งคือ 0 ในฟีลด์นี้ ในทำนองเดียวกันถ้าสมบัตินั้นแตกต่างกันทั้งหมดผลรวมก็จะเป็น 0 ด้วย และเมื่อกล่าวถึงเส้นใน $AG(4,3)$ นั้นสามารถเขียนแทนเซต $\{\bar{v}+k\bar{w} : k\in\mathbb{Z}_3\}$ สำหรับทุกเวกเตอร์ $\bar{v},\bar{w}$ โดยที่ $\bar{w}\neq 0$ ซึ่งแต่ละเส้นประกอบด้วยจุดสามจุดซึ่งเท่ากับจำนวนไพ่ในชุดไพ่เซตพอดี จึงมีความเป็นไปได้ว่าชุดไพ่เซตเมื่อแปลงเป็นจุดแล้วจะอยู่บนเส้นเดียวกันในปริภูมิ

ทฤษฎีบทที่ 3 [13] ไพ่สามใบจะเป็นชุดไพ่เซต ก็ต่อเมื่อ จุดสามจุดที่แทนไพ่ดังกล่าวอยู่บนเส้นเดียวกันใน $AG(4,3)$

บทพิสูจน์ ให้ $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ใน $AG(4,3)$ ซึ่งเป็นชุดของไพ่เซตก็ต่อเมื่อ $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 = \bar{0}$

นั่นคือ $\bar{v}_1 + (\bar{v}_1 + (\bar{v}_2 - \bar{v}_1)) + (\bar{v}_1 - (\bar{v}_2 - \bar{v}_1)) = \bar{0}$

เนื่องจาก $\bar{v}_3 = -\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = 2\bar{v}_1 - \bar{v}_2$

จะได้ว่าเวกเตอร์ $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ และ $\bar{v}_3$ อยู่ในรูปสมาชิกของเซต

$\{\bar{v}_1 + k\left(\bar{v}_2 - \bar{v}_1\right) : k \in \mathbb{Z}_3\}$ ซึ่งเป็นเซตของจุดบนเส้นเดียวกันใน $AG(4,3)$ □

จากทฤษฎีบทที่ผ่านมา จะพบข้อสังเกตบางประการในเกมนี้กับสมบัติจุด และเส้นของ $AG(4,3)$ ดังนี้

1. ประกอบด้วยจุดทั้งหมด $3^4 = 81$ จุด เท่ากับจำนวนไพ่ทั้งหมด

2. แต่ละเส้นบรรจุจุดสามจุดเท่านั้น ซึ่งเท่ากับจำนวนไพ่ในหนึ่งชุดไพ่เซต

3. สองจุดใดๆ จะอยู่บนเส้นเพียงเส้นเดียว นั่นคือมีอีกเพียงจุดเดียวที่จะอยู่บนเส้นเดียวกันกับสองจุดนั้นเทียบได้กับเหตุการณ์ที่ว่าหากหยิบไพ่มาสองใบใดๆ แล้วจะมีไพ่เพียงใบเดียวเท่านั้นที่จะรวมกันเป็นชุดไพ่เซตได้ เพราะหากเราเลือกหยิบไพ่เพียงสองใบแต่ละสมบัติของไพ่ก็จะมีโอกาสเกิดแค่สองแบบกล่าวคือรูปแบบเหมือนกัน หรือต่างกันเท่านั้น ซึ่งอาจส่งผลให้แต่ละสมบัติของไพ่ใบที่สามที่จะรวมกันเป็นชุดไพ่เซตจะต้องมีรูปแบบเหมือนกัน หากสองใบแรกเหมือนกัน และต้องแตกต่างจากสองใบแรกหากสองใบแรกต่างกันนั่นเอง ซึ่งเป็นไปได้ว่าจะมีไพ่เพียงใบเดียวที่มีสัญลักษณ์สอดคล้องกับสมบัติดังกล่าว

4. ประกอบด้วยเส้น 1080 เส้นซึ่งเท่ากับจำนวนชุดไพ่เซตทั้งหมด หากเราพิจารณาชุดไพ่สามใบโดยให้ลำดับมีความสำคัญ การเลือกไพ่สองใบแรกจากเหตุผลในข้อ 3. ก็จะเป็นการบังคับไพ่ใบที่สามทันทีนั่นคือ จะเลือกได้ทั้งหมด $3^4(3^4-1)$ ชุด แต่เนื่องจากชุดไพ่เซตที่ต่างกันลำดับของไพ่ไม่มีความสำคัญ จึงเกิดชุดไพ่แบบเดียวกันแต่เรียงลำดับต่างกันแบบละ 3! ชุด ดังนั้นชุดไพ่เซตที่เป็นไปได้คือ $\dfrac{3^4(3^4-1)}{3!} = 1080$ ชุดนั่นเอง

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่าความสัมพันธ์ของชุดไพ่เซตในเกม และเซตของจุดบนเส้นเดียวกันใน $AG(4,3)$ เป็นสิ่งเดียวกันเมื่อกำหนดให้ไพ่แทนด้วยจุดตามที่แสดงไว้ในหัวข้อที่ผ่านมานั่นเอง ดังนั้นข้อสงสัยที่เราให้ความสนใจตั้งแต่เริ่มแรกที่ว่า**จำนวนไพ่ที่มากที่สุดที่ไม่มีชุดไพ่เซตอยู่เลยมีจำนวนกี่ใบ** จึงเป็นคำถามเดียวกับคำถามที่ว่าเซตของจุดที่สามจุดใดๆ ในเซตไม่อยู่บนเส้นเดียวกันมีขนาดใหญ่ที่สุดเท่าใดใน $AG(4,3)$ ซึ่งเซตที่มีสมบัติดังกล่าวในเรขาคณิตสัมพรรคนั้น เป็นที่รู้จักกันในชื่อว่า cap ซึ่งในบทนิยามของ Hill [5] กล่าวไว้ว่า k-cap คือ เซตของจุด k จุดใน $AG\left(d,n\right)$ ที่สามจุดใดๆ ในเซตดังกล่าวไม่อยู่บนเส้นเดียวกัน และให้เซตของ cap ที่ใหญ่ที่สุดใน $AG\left(d,n\right)$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $m\left(d,n\right)$ ซึ่งมีทฤษฎีของ Pellegrino [4] กล่าวไว้ตั้งแต่ปี 1971 รองรับอยู่แล้วว่า $m\left(4,3\right) = 20$ นั่นคือ จำนวนไพ่มากสุดที่ไม่มีชุดไพ่เซตอยู่เลยคือ 20 ใบนั่นเอง

นอกจากนี้หากเราจะนำเรขาคณิตสัมพรรคอื่น ๆ มาสร้างเป็นเกมไพ่เซตลักษณะคล้าย ๆ กัน โดยปรับเปลี่ยนจำนวนไพ่ ลดหรือเพิ่มสมบัติของไพ่น่าจะสามารถทำได้ไม่ยากนัก ซึ่งใช้จำนวนไพ่ที่เทียบได้กับจำนวนจุด จำนวนสมบัติของไพ่ที่เทียบได้กับมิติ และจำนวนรูปแบบของแต่ละสมบัติที่เทียบได้กับอันดับของเรขาคณิตสัมพรรคนั้น โดยปรับให้มากขึ้นหรือน้อยลงได้ตามที่เราต้องการ ตัวอย่างเช่น

1. $AG(3,3)$ สร้างเป็นเกมไพ่เซตที่มีทั้งหมด $3^3 = 27$ ใบ โดยสัญลักษณ์บนไพ่แต่ละใบจะมีสามลักษณะ แต่ละลักษณะมีสามรูปแบบ และเงื่อนไขชุดไพ่เซตยังคงเดิม แต่เนื่องจากจำนวนลักษณะ และจำนวนไพ่ที่น้อยลงก็จะทำให้เกมนี้ง่ายขึ้น อาจจะเหมาะสำหรับผู้เริ่มต้นเล่น

2. $AG(3,4)$ สร้างเป็นเกมไพ่เซตที่มีทั้งหมด $4^3 = 64$ ใบ โดยสัญลักษณ์ของไพ่แต่ละใบจะมีสามลักษณะ แต่ละลักษณะมีสี่รูปแบบ และเงื่อนไขชุดของไพ่เซตยังคงเดิมแต่เพิ่มเป็นสี่ใบ ซึ่งอาจต้องปรับเปลี่ยนกติกาเริ่มต้นให้เล่นกับไพ่รอบหนึ่งมากกว่า 12 ใบ เนื่องจากจำนวนไพ่ในชุดไพ่เซตมีถึง 4 ใบ และเกมก็จะมีความซับซ้อนมากขึ้น

3. $AG(3,5)$ สร้างเป็นเกมไพ่เซตที่มีทั้งหมด $5^3 = 125$ ใบ โดยสัญลักษณ์ของไพ่แต่ละใบจะมีสามลักษณะ แต่ละลักษณะมีห้ารูปแบบ และเงื่อนไขของชุดไพ่เซตยังคงเดิมซึ่งอาจจะกำหนดให้มี 3 4 หรือ 5 ใบต่อชุด ตามความเหมาะสมของเกม ซึ่งจะทำให้มีความน่าสนใจและไม่ยากเกินไปนัก

ท้ายที่สุดเรขาคณิตสัมพรรคไม่เพียงแต่เป็นโครงสร้างที่มีลักษณะเฉพาะอย่างที่เราได้กล่าวถึงไปแล้วเท่านั้น เรขาคณิตชนิดนี้ยังเกี่ยวข้องกับเนื้อหาคณิตศาสตร์อื่นๆ ที่น่าสนใจ ตัวอย่างเช่น Bartlett [14] ได้กล่าวไว้ว่า มีระนาบสัมพรรคอันดับ n หรือ $AG(2,n)$ ก็ต่อเมื่อ มีจตุรัสละตินขนาด $n \times n$ จำนวน $n-1$ จตุรัสที่แต่ละคู่ตั้งฉากกัน ส่วน Wallis [10] ได้กล่าวถึงการสร้างแผนแบบบล็อคจากเรขาคณิตสัมพรรคไว้ว่า ถ้ากำหนดจุดใน $AG(d,n)$ แทน ทรีตเมนต์ (treatment) และเส้นแทนบล็อก จะได้แผนแบบบล็อกที่มีพารามิเตอร์

$$(n^d, \frac{n^d(n^d-1)}{n(n-1)}, \frac{(n^d-1)}{(n-1)}, n, 1)$$

ซึ่งถ้าหากผู้อ่านมีความสนใจการนำเรขาคณิตสัมพรรคไปประยุกต์ใช้ก็สามารถสืบค้นเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิงที่ระบุไว้

สรุป

บทความนี้กล่าวถึงเกมไพ่เซตซึ่งไพ่ที่ใช้ในการเล่นมีลักษณะเฉพาะ โดยในเกมนี้มีชุดไพ่สามใบที่เรียกว่า “ชุดไพ่เซต” ซึ่งมีรูปแบบความสัมพันธ์ที่น่าสนใจ และสอดคล้องกับ “เส้น” ในเรขาคณิตสัมพรรคที่มีมิติ 4 อันดับ 3 $AG(4,3)$ ซึ่งเป็นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่ยังไม่เป็นที่รู้จักเท่าใด ดังนั้นจึงอธิบายให้ผู้อ่านรู้จักเรขาคณิตสัมพรรคพอสังเขป และใช้สมบัติของ $AG(4,3)$ ที่มีบทพิสูจน์อยู่แล้วในการอธิบายเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในเกมนี้ นอกจากนี้ได้ให้แนวทางที่อาจจะนำไปพัฒนารูปแบบของเกมให้น่าสนใจขึ้นจากการสร้างเกมจากเรขาคณิตสัมพรรค และการนำเรขาคณิตสัมพรรคไปประยุกต์กับคณิตศาสตร์อื่น ๆ ที่น่าสนใจเพิ่มเติมสำหรับผู้อ่านที่มีความสนใจจะศึกษาข้อมูลเพิ่มเติมไว้อีกด้วย

เอกสารอ้างอิง

1. Set Enterprise, Inc. 2015. Founder and Inventor: Marsha J. Falco. Available from URL: http://www.setgame.com/founder-inventor. 15 December 2016.
2. Laura. 2014. Set-the Card Game. Available from URL: https://laurapickens.wordpress.com /2014/04/09/set-the-card-game/.10 December 2016.
3. Set Enterprise, Inc. 2015. SET Instructions. Available from URL: http://www.setgame.com /sites/default/ files/instructions/SET%20INSTRUCTIONS%20-%20ENGLISH.pdf. 15 December 2016.
4. Pellegrino, G. 1971. Sul Massimo Ordine Delle calotte in $S_{4,3}$. Matematiche. 25: 149-157.
5. Hill, R. 1983. On Pellegrino's 20-Caps in $S_{4,3}$. In: Hammer, Peter L., editor. Combinatorics '81. Proceedings of the International Conference on Combinatorial Geometrics and their Applications. 7- 12 June 1981. Rome. Italy. Amsterdam. North Holland. p. 433-447.
6. Davis, B. L., and MacLagan, D. 2003. The Card Game SET. The Mathematical Intelligencer. 25: 33-40.
7. Norton, J. D. 2013. Euclidean Geometry the First Great Science. Available from URL: http://www.pitt.edu/~jdnorton/teaching/HPS_0410/chapters/non_Euclid_Euclid/index.html. 15 December 2016.
8. Millman, R. S., and Parker, G.D. 1991. Geometry a Metric Approach with Models. 2nd Edition. Springer.
9. Colbourn, C. J., and Dinitz, J. H. 2010. Handbook of Combinatorial Designs. 2nd Edition. Boca Raton. CRC Press. p. 706.
10. Wallis, W. D. 2007. Introduction to Combinatorial Designs. 2nd Edition. New York. Chapman & Hall/CRC. p. 35-48.
11. Cherowitzo, B. 2005. Affine Geometry. Available from URL: http://www.math.ucdenver.edu/ ~wcherowi/courses/m6221/pglc1e.html. 15 December 2016.
12. Hefferon, J. 2014. Definition of Vector Space. Linear algebra. p.78.
13. Tucker, C. 2007. Geometric Models of the Card Game SET. Rose-Hulman Undergrad. Math J. 8(1).
14. Bartlett, P. Latin Squares and Geometry. Available from URL: http://web.math.ucsb.edu/~padraic /mathcamp_2012/latin_squares/MC2012_LatinSquares_lecture4.pdf. 15 December 2016.

ได้รับบทความวันที่ 10 กุมภาพันธ์ 2561
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 24 เมษายน 2561