บทความวิจัย

ทฤษฎีบทเมเนเลอัสและทฤษฎีบทเชวา กับบทบาทของการพิสูจน์

สุกัญญา หะยีสาและ* และ เอนก จันทรจรูญ

บทคัดย่อ

การพิสูจน์ถือเป็นหัวใจของการศึกษาคณิตศาสตร์ นักคณิตศาสตรศึกษาได้ศึกษาถึงบทบาทของการพิสูจน์ ซึ่งประกอบด้วย การตรวจสอบ การอธิบาย/การเห็นภาพ การสำรวจ/การค้นพบ การดำเนินการอย่างเป็นระบบ และการสื่อสาร ซึ่งจากบทบาทของการพิสูจน์ดังกล่าวจะส่งผลให้ผู้เรียนที่ศึกษาการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่างๆ พัฒนาความสามารถด้านการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ การอธิบายแสดงความเป็นเหตุเป็นผล ความเชื่อมโยงของบทนิยามและทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง ฝึกการอธิบายและการเขียนสื่อสารเพื่อยืนยันข้อความคาดการณ์ว่ามีความถูกต้องอย่างเป็นระบบ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการพิสูจน์ทฤษฎีบทซึ่งมีวิธีการที่หลากหลายในการแสดงแนวคิดของการให้เหตุผลเพื่อยืนยันว่าข้อความคาดการณ์มีความถูกต้อง ในบทความนี้ได้กล่าวถึงทฤษฎีบทเมเนเลอัส และทฤษฎีบทเชวา เพื่อให้มีความเข้าใจเกี่ยวกับบทบาทของการพิสูจน์

คำสำคัญ: ทฤษฎีบทเมเนเลอัส ทฤษฎีบทเชวา บทบาทของการพิสูจน์

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

*ผู้นิพนธ์ประสานงาน, e-mail: sukanyah@g.swu.ac.th

Menelaus' Theorem and Ceva's Theorem : The Roles of Proof

Sukanya Hajisalah*, and Anek Janjaroon

ABSTRACT

Proof is a heart of mathematics. Mathematics educators mentioned that proof plays a crucial role in teaching and learning mathematics. This paper summarized five important roles of proof in teaching and learning mathematics including verification, explanation/visualization, exploration/discovery, systematization and communication. People or students engaging in a proof of a mathematical assertion, especially a theorem with various ways in proving it, can learn how the mathematical statement goes via the roles of proof. This paper allows us to see an analysis of the five roles of proof in students' learning mathematics through proofs of two theorems, including Menelaus' theorem and Ceva's theorem.

Keywords: Menelaus' theorem, Ceva's theorem, Roles of proof

Department of Mathematics, Faculty of science, Srinakharinwirot University

*Corresponding author, email: sukanyah@g.swu.ac.th

บทนำ

ความรู้ทางเรขาคณิตมีจุดเริ่มต้นมาจากการสั่งสมความรู้ของชาวอียิปต์ ชาวบาบิโลเนียน รวมทั้งชนเผ่าอารยธรรมโบราณอื่นๆ ผ่านการทดลอง การสังเกต การเปรียบเทียบความเหมือนความต่าง การเดาลองผิดลองถูก ความรู้บางอย่างก็เป็นการเข้าใจโดยสัญชาตญาณ การค้นหาคำตอบในสมัยก่อนจึงเป็นเพียงต้องการการประมาณโดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อนำความรู้หรือข้อสรุปที่ได้มาใช้ในชีวิตจริง ซึ่งข้อมูลที่ได้อาจจะถูกต้องหรือไม่ถูกต้อง เช่น ชาวบาลิโลเนียน (2,000-1,600 ปีก่อนคริสต์ศักราช) ได้คิดค้นความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมเท่ากับสามเท่าของความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลาง สูตรปริมาตรของทรงกระบอกคือพื้นที่ฐานคูณสูง [1] ยุคที่สำคัญที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในการศึกษาเรขาคณิตรวมทั้งคณิตศาสตร์สาขาอื่นๆ เริ่มต้นขึ้นประมาณ 600 ปี ก่อนคริสต์ศักราช เมื่อมีการเริ่มใช้คำถามว่า “ทำไม” โดยคำตอบต้องการความเป็นเหตุเป็นผล [2] โดย ทาเลสแห่งมิเลตุส (Thales of Miletus ประมาณ 640-550 B.C.) ซึ่งถือเป็นบุคคลแรกที่เริ่มพิสูจน์ทฤษฎีบทต่างๆ ทางเรขาคณิต โดยพยายามให้เหตุผลแบบนิรนัย (deductive reasoning) มากกว่าการลองผิดลองถูก

จุดเปลี่ยนแปลงสำคัญของเรขาคณิตที่เกี่ยวกับการพิสูจน์เกิดขึ้นอีกครั้งประมาณ 300 B.C. ยุคลิดแห่งอะเล็กซานเดรีย (Euclid of Alexandria ประมาณ 450-380 B.C.) ได้เขียนหนังสือ “อิลิเมนต์ (Elements)” ทั้งหมด 13 เล่ม โดยได้รวบรวมผลงานของนักคณิตศาสตร์รุ่นก่อน และของนักคณิตศาสตร์ร่วมสมัย โดยจัดระบบผลงานที่มีอยู่ เสริมความรู้ที่ขาด และตัดทิ้งส่วนที่มี ผลงานชิ้นเอกนี้ยุคลิดสร้างขึ้นจากประสบการณ์และผลงานของนักคณิตศาสตร์รุ่นก่อนๆ และนักคณิตศาสตร์ร่วมสมัย เช่น[1]

1. กลุ่มของพีทาโกเรียน ซึ่งพบอยู่ในหนังสือเล่มที่ 1-4 เล่มที่ 7 และเล่มที่ 9
2. อาคีทัส ซึ่งพบอยู่ในหนังสือเล่มที่ 8
3. ยูโดซุส ซึ่งพบอยู่ในหนังสือเล่มที่ 5-6 และเล่มที่ 12
4. เธอีเตตุส ซึ่งพบอยู่ในหนังสือเล่มที่ 10 และ เล่มที่ 13

ในหนังสืออิลิเมนต์ ยุคลิดได้เรียบเรียงเป็นระบบและลำดับ อย่างมีเหตุผล โดยใช้เหตุผลแบบนิรนัย วิธีการนำเสนอของยุคลิดโดยการใช้วิธีเชิงสัจพจน์ (axiomatic method) ถือเป็นต้นแบบของคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ (pure mathematics) ตัวอย่างเช่นในอิลิเมนต์ เล่มที่ 1 ยุคลิดได้เรียบเรียงเกี่ยวกับเรื่องรูปสามเหลี่ยม เส้นตั้งฉาก เส้นขนาน พื้นที่ของรูปเหลี่ยมต่างๆ และทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยเริ่มต้นจากการกำหนดบทนิยาม (Definition) 23 บทนิยาม สัจพจน์ (Postulate) 5 ข้อ สิ่งที่เห็นจริงแล้ว (Common Notion) 5 ข้อ และทฤษฎีบท (Proposition) ที่เกี่ยวกับเรื่องดังกล่าวจำนวน 48 ทฤษฎี การพิสูจน์หรือบทสร้างในแต่ละทฤษฎีจะเริ่มอ้างอิงจากสัจพจน์ และสิ่งที่เห็นจริงแล้ว และอ้างอิงทฤษฎีที่พิสูจน์ได้มาก่อนหน้า หนังสืออิลิเมนต์ เป็นตำราที่มีชื่อเสียงมากและมีอิทธิพลต่อการสอนเรขาคณิตทั่วโลก สถาบันทั่วโลกใช้ในการเรียนการสอนมานานกว่า 2,000 ปี มีการปรับปรุงมากกว่า 1,000 ครั้ง นับได้ว่าเป็นตำราที่มีผู้อ่านมากที่สุดในโลกรองจากคัมภีร์ไบเบิล [1, 2]

การเรียบเรียงตำราอิลิเมนต์โดยใช้วิธีเชิงสัจพจน์ของยุคลิดนั้น จุดที่มีความแตกต่างจากปัจจุบันที่เด่นชัดคือ การไม่มีการกำหนดคำอนิยามที่จะมาช่วยในการพิสูจน์ เพราะในปัจจุบันที่คณิตศาสตร์ซึ่งได้พัฒนามาตามยุคตามสมัย ระบบเชิงสัจพจน์จะประกอบด้วย คำอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ และใช้ตรรกศาสตร์ในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ต่างๆ เพื่อสรุปเป็นกฎหรือทฤษฎีบท การพิสูจน์ไม่สำคัญเฉพาะสำหรับการ

ศึกษาคณิตศาสตร์เท่านั้น จากงานวิจัยทางคณิตศาสตรศึกษาพบว่าการพิสูจน์ยังมีบทบาทต่างๆ ที่ส่งผลต่อการพัฒนาผู้เรียนดังที่จะนำเสนอในหัวข้อต่อไป

บทบาทของการพิสูจน์

การพิสูจน์นับว่าเป็นส่วนสำคัญของคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจถือได้ว่าเป็นหัวใจของคณิตศาสตร์ [3] คณิตศาสตร์ทุกสาขาถูกพัฒนาขึ้นอย่างเป็นระบบโดยเริ่มจากการสร้างข้อคาดการณ์ต่างๆ ขึ้น พิสูจน์ข้อความคาดการณ์เหล่านั้นทำให้ได้ทฤษฎีซึ่งเป็นที่ยอมรับ นักคณิตศาสตร์รุ่นก่อนแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีหรือข้อความทางคณิตศาสตร์ และนักคณิตศาสตร์รุ่นต่อมาศึกษาการพิสูจน์ของรุ่นก่อนเพื่อใช้เป็นแนวทางในการพัฒนาทฤษฎีบทต่อๆไป ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าการพิสูจน์มีบทบาทสำคัญในการศึกษาและพัฒนาคณิตศาสตร์

การศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ในทุกระดับ โดยเฉพาะในระดับมหาวิทยาลัย ผู้เรียนมีความจำเป็นต้องได้รับประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ จากการทำความเข้าใจเนื้อหา ความหมายหรือยอมรับทฤษฎีต่างๆ ในวิชาคณิตศาสตร์ ผ่านการอ่านบทพิสูจน์หรือลงมือพิสูจน์ข้อความต่างๆ ด้วยตนเอง นักคณิตศาสตรศึกษาได้ศึกษาถึงบทบาทของการพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งในที่นี้จะกล่าวถึง 5 บทบาทที่สำคัญ ดังนี้ [4-7]

1. การตรวจสอบ (Verification)

บทบาททั่วไปของการพิสูจน์ก็คือเราใช้การพิสูจน์เพื่อตรวจสอบข้อความหรือข้อความคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ว่าข้อความหรือข้อความคาดการณ์เหล่านั้นเป็นจริงหรือถูกต้องหรือไม่โดยใช้หลักการทางตรรกศาสตร์

2. การอธิบาย/การเห็นภาพ (Explanation/Visualization)

การพิสูจน์มีบทบาทเพื่อช่วยให้เข้าใจว่าทำไมข้อความหรือข้อคาดการณ์นั้นเป็นจริง การพิสูจน์จะช่วยอธิบายให้เราเห็นลักษณะ สมบัติ โครงสร้าง หรือความสัมพันธ์ของสิ่งต่างๆ ที่กล่าวถึงในทฤษฎีบทหรือข้อความทางคณิตศาสตร์ ให้ชัดเจนขึ้น เช่นเห็นเงื่อนไขที่จำเป็นที่จะได้มาซึ่งข้อสรุป ทำให้เห็นภาพของบทนิยามในการเชื่อมโยงมาสู่ทฤษฎีบทต่างๆ เป็นต้น

3. การสำรวจ/การค้นพบ (Exploration/Discovery)

การพิสูจน์โดยทั่วไปจะมาหลังจากที่เราได้สำรวจหรือค้นพบทฤษฎีบทต่างๆ เพื่อเป็นการตรวจสอบหรือยืนยันว่าทฤษฎีบทเหล่านั้นเป็นจริง แต่อย่างไรก็ตามการพยายามที่จะพิสูจน์สิ่งหนึ่งอาจทำให้ค้นพบแนวคิดหรือทฤษฎีบทที่แตกต่างออกไป ตัวอย่างเช่นการพยายามที่จะพิสูจน์สัจพจน์การขนานของเรขาคณิตแบบยุคลิคทำให้เราได้มาซึ่งข้อความที่สมมูลกับสัจพจน์ดังกล่าว และยิ่งไปกว่านั้นทำให้ได้ค้นพบเรขาคณิตนอกระบบยุคลิค

4. การดำเนินการอย่างเป็นระบบ (Systematization)

การพิสูจน์เป็นการดำเนินการให้เหตุผลเพื่อได้มาซึ่งข้อสรุปหรือผลจากสิ่งที่ค้นพบอย่างเป็นนิรนัยตามระบบสัจพจน์ บทนิยาม หรือทฤษฎีบทก่อนหน้า การพิสูจน์ทำให้เห็นโครงสร้างเชิงสัจพจน์ทางคณิตศาสตร์ เห็นความสัมพันธ์ในการบูรณาการและการเชื่อมโยงองค์ความรู้ภายในวิชาคณิตศาสตร์

5. การสื่อสาร (Communication)

การนำเสนอการพิสูจน์ทฤษฎีบทหรือข้อค้นพบต่างๆ ผ่านหนังสือ วารสาร หรือสื่ออื่นๆ เป็นการแสดงว่าความรู้ทางคณิตศาสตร์ใหม่ๆ ได้ถูกสื่อสารออกไป การพิสูจน์ช่วยส่งเสริมกระบวนการทางสังคม กล่าวคือในการพิสูจน์หรืออ่านการพิสูจน์ข้อความใดข้อความหนึ่งอาจต้องมีการพูดคุย ติดต่อ ถกเถียง หรืออภิปรายแนวคิดต่างๆ ระหว่างบุคคลหนึ่งกับอีกบุคคลหนึ่ง เช่น ระหว่างนักคณิตศาสตร์ด้วยกันเอง ระหว่างครูกับนักเรียน เป็นต้น นอกจากนี้การพิสูจน์ยังมีบทบาทสำคัญในการพัฒนาผู้เรียนในด้านการเขียนนำเสนอแสดงขั้นตอนต่างๆ เพื่อให้ผู้อื่นยอมรับข้อความคาดการณ์ให้มีความสมเหตุสมผล จนสามารถยอมรับได้เป็นทฤษฎี

การฝึกผู้เรียนให้พิสูจน์ทฤษฎีบทต่างๆ สามารถพัฒนาผู้เรียนในด้านของการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ การอธิบายแสดงความเป็นเหตุเป็นผล ความเชื่อมโยงของบทนิยามและทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง ฝึกการอธิบายและการเขียนสื่อสารเพื่อยืนยันข้อความคาดการณ์ว่ามีความถูกต้องอย่างให้เป็นระบบ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการพิสูจน์ทฤษฎีบทซึ่งมีวิธีการที่หลากหลายในการแสดงแนวคิดของการให้เหตุผลเพื่อยืนยันว่ามีความถูกต้อง ซึ่งทำให้ได้แนวทางของการพิสูจน์ที่แตกต่างออกไป

สำหรับการศึกษาเรขาคณิตในระดับประถมศึกษา และระดับมัธยมศึกษาในปัจจุบัน เป็นการศึกษาเรขาคณิตแบบยุคลิด (Euclidean Geometry) โดยมีแนวคิดในเรื่องของระยะทาง มุม พื้นที่ ปริมาตร เรียนเกี่ยวกับสิ่งที่สัมผัสได้ด้วยมือ เช่น สามารถสร้างเส้นขนานได้ด้วยไม้บรรทัด แต่เมื่อผู้เรียนศึกษาเรขาคณิตในระดับที่สูงขึ้น จะได้ศึกษาเกี่ยวกับเรขาคณิตเชิงภาพฉาย (Projective Geometry) ซึ่งมีความแตกต่างไปจากเดิมเพราะไม่มีเรื่องการขนาน ไม่เกี่ยวข้องกับการวัด แต่เน้นศึกษาความสัมพันธ์พื้นฐานระหว่างจุด เส้น และระนาบ เพื่อให้ผู้อ่านเห็นถึงความสำคัญเกี่ยวกับบทบาทของการพิสูจน์ในการพัฒนาผู้เรียน [4] ผู้เขียนขอยกตัวอย่างการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่มีวิธีการที่หลากหลาย โดยขอยกตัวอย่างทฤษฎีในวิชาสำรวจเรขาคณิต 2 ทฤษฎีที่มีความน่าสนใจ เป็นทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ของจุด และเส้น สามารถใช้ความรู้ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เช่นเรื่อง ความคล้าย เส้นขนาน อัตราส่วนของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม พิสูจน์ทฤษฎีดังกล่าวได้ ทฤษฎีบท 2 ทฤษฎีนี้ได้แก่ ทฤษฎีบทเมเนเลอัส (Menelaus' theorem) และทฤษฎีบทเชวา (Ceva's Theorem)

ข้อตกลงที่ใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทเมเนเลอัสและทฤษฎีบทเชวา

ทฤษฎีบทเมเนเลอัสจะกล่าวถึงการอยู่ร่วมเส้นตรง (collinear) ของจุดที่อยู่บนด้านหรือส่วนต่อของด้านของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีใจความดังนี้ [8]

กำหนด ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ซึ่งมีจุด, P, Q และ R อยู่บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน AB, BC และ CA ตามลำดับ จุด P, Q และ R อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ $\frac{AP}{PB}\frac{BQ}{QC}\frac{CR}{RA} = -1$

สำหรับทฤษฎีบทเชวาจะกล่าวถึงการจวบ (concurrent) กันของเส้นที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดที่อยู่บนด้านตรงข้ามจุดยอดดังกล่าว ซึ่งมีใจความดังนี้ [8]

กำหนด ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ซึ่งมีจุด L, M และ N อยู่บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ และ $\overline{CN}$ ตัดที่จุดเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ $\frac{AN}{NB}\frac{BL}{LC}\frac{CM}{MA}=1$

ในการพิสูจน์ทฤษฎีดังกล่าวอาศัยความรู้พื้นฐานในเรื่องของความคล้าย เส้นขนาน พื้นที่ และยอมรับข้อตกลงบางประการในเรื่องของ จุดแบ่งภายใน และจุดแบ่งภายนอกส่วนของเส้นตรง ดังนี้

“ถ้าจุด P แบ่ง $\overline{AB}$ ออกเป็นสองส่วนคือ $\overline{AP}$ และ $\overline{PB}$ อัตราส่วนการแบ่ง คือ $\frac{AP}{PB}$ จะเป็นบวกหรือลบขึ้นอยู่กับว่า P เป็นจุดแบ่ง<u>ภายใน</u>หรือ<u>ภายนอก</u>”

ถ้า P เป็นจุดแบ่งภายใน ดังรูป

จะได้ว่า $\frac{AP}{PB}>0$

และ ถ้า P เป็นจุดแบ่งภายนอก ดังรูป

จะได้ว่า $\frac{AP}{PB}<0$

กล่าวคือ ถ้า P เป็นจุดแบ่งภายในอัตราส่วนการแบ่งจะมีค่าเป็นบวก แต่ถ้า P เป็นจุดแบ่งภายนอกอัตราส่วนการแบ่งจะมีค่าเป็นลบ

ทฤษฎีบทเมเนเลอัส (Menelaus’ theorem)

Menelaus of Alexandria ได้แสดงเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ สำหรับจุดสามจุดจะอยู่บนเส้นเดียวกัน ดังนี้

ทฤษฎีบทเมเนเลอัส

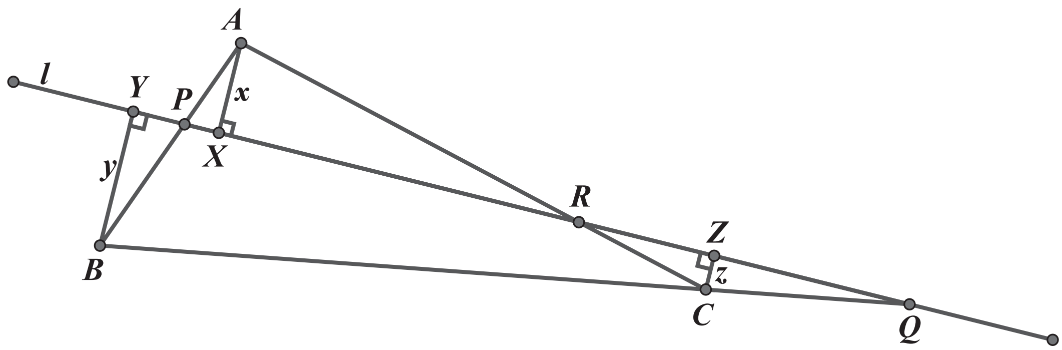
กำหนด ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ซึ่งมีจุด P, Q และ R อยู่บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน AB, BC และ CA ตามลำดับ จุด P, Q และ R อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ $\frac{AP}{PB}\frac{BQ}{QC}\frac{CR}{RA}=-1$

พิสูจน์ตอนที่ 1 สิ่งที่กำหนด จุด P, Q และ R อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $\frac{AP}{PB}\frac{BQ}{QC}\frac{CR}{RA}=-1$

การพิสูจน์แบบที่ 1

แนวคิดในการพิสูจน์ใช้ความรู้ในเรื่องสามเหลี่ยมคล้าย และใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย นั่นคือ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันอัตราส่วนของด้านที่สมนัยกันจะเท่ากัน และใช้ข้อตกลงเบื้องต้นในเรื่องของอัตราส่วนของจุดแบ่งภายในและภายนอกส่วนของเส้นตรง และใช้ความรู้ทางพีชคณิตในการหาผลคูณของอัตราส่วนที่ต้องการ



ลากเส้นตรง l ผ่านจุด P, R และ Q (จากสิ่งที่กำหนด)
ลากเส้นจากจุด A, B และ C มาตั้งฉากกับเส้นตรง l ที่จุด X, Y และ Z ตามลำดับ
ให้ระยะ AX, BY และ CZ ยาว x, y, z ตามลำดับ

เพราะว่า $A\hat{P}X = B\hat{P}Y$ และ $A\hat{X}P = B\hat{Y}P$ จะได้ $\Delta AXP \sim \Delta BYP$

$A\hat{R}X = C\hat{R}Z$ และ $A\hat{X}R = C\hat{Z}R$ จะได้ $\Delta AXR \sim \Delta CZR$

$B\hat{Q}Y = C\hat{Q}Z$ และ $B\hat{Y}Q = C\hat{Z}Q$ จะได้ $\Delta BYQ \sim \Delta CZQ$

จากสมบัติของสามเหลี่ยมคล้ายและเนื่องจาก Q เป็นจุดแบ่งภายนอกของด้าน BC

ดังนั้น จะได้ $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{x}{y}$, $\dfrac{CR}{RA} = \dfrac{z}{x}$ และ $\dfrac{BQ}{QC} = -\dfrac{y}{z}$

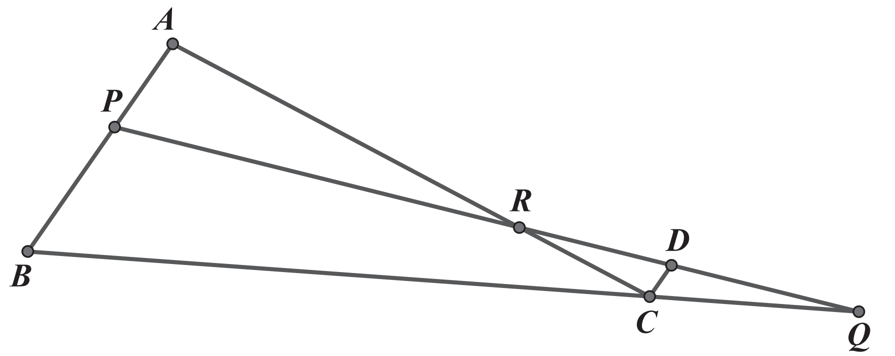
นั่นคือ $$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA} = \frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{z}\right)\cdot\frac{z}{x}$$

ดังนั้น $$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA} = -1$$

นั่นคือ ถ้าจุด P, Q และ R อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกันแล้ว $\dfrac{AP}{PB}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CR}{RA} = -1$

การพิสูจน์แบบที่ 2

แนวคิดในการพิสูจน์ใช้ความรู้ในเรื่องสามเหลี่ยมคล้าย และใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้ายในการแสดงความสัมพันธ์ของอัตราส่วนที่ได้ ให้เป็นไปตามอัตราส่วนที่ต้องการ และใช้ข้อตกลงเบื้องต้นในเรื่องของอัตราส่วนของจุดแบ่งภายในและภายนอกส่วนของเส้นตรง และใช้ความรู้ทางพีชคณิตในการหาผลคูณของอัตราส่วนที่ต้องการ



ลาก $\overline{CD}$ ให้ขนานกับ $\overline{BA}$

เพราะว่า $Q\hat{D}C = Q\hat{P}B$ และ $C\hat{Q}D = B\hat{Q}P$ จะได้ $\Delta CDQ \sim \Delta BPQ$

ดังนั้น $\frac{DC}{PB} = \frac{CQ}{BQ}$ หรือ $DC = \frac{(CQ)(PB)}{BQ}$

เพราะว่า $D\hat{R}C = P\hat{R}A$ และ $R\hat{D}C = R\hat{P}A$ จะได้ $\Delta RDC \sim \Delta RPA$

ดังนั้น $\frac{DC}{PA} = \frac{CR}{AR}$ หรือ $DC = \frac{(CR)(PA)}{AR}$

นั่นคือ $\frac{(CR)(PA)}{AR} = \frac{(CQ)(PB)}{BQ}$

เพราะฉะนั้น $(CR)(PA)(BQ) = (CQ)(PB)(AR)$

$$\frac{(CR)(PA)(BQ)}{(CQ)(PB)(AR)} = 1$$

หรือ $$\frac{(AP)(BQ)(CR)}{(PB)(QC)(RA)} = 1$$

แต่พิจารณา ΔABC ซึ่งพบว่า P และ R เป็นจุดแบ่งภายในของด้าน AB และ CA

แต่ Q เป็นจุดแบ่งภายนอกของด้าน BC ดังนั้น $\frac{BP}{PA} > 0$, $\frac{CR}{RA} > 0$ และ $\frac{BQ}{QC} < 0$

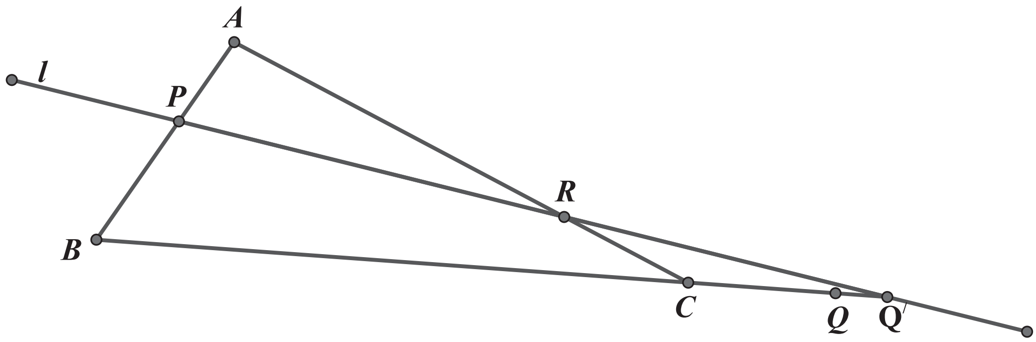
ดังนั้น $$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$$

นั่นคือ ถ้าจุด P, Q และ R อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกันแล้ว $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$

พิสูจน์ตอนที่ 2 สิ่งที่กำหนด $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ จุด P, Q และ R อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน

แนวคิดในการพิสูจน์ ใช้การพิสูจน์ทางอ้อม โดยการกำหนดให้ จุด Q ไม่ได้อยู่บนเส้นเดียวกับ l ซึ่งผ่านจุด P และ R โดยให้ l ตัด $\overrightarrow{BC}$ ที่ Q' และแสดงให้ได้ว่าจุด Q และ Q' เป็นจุดเดียวกัน



สมมติให้ จุด P, Q และ R ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ลากเส้นตรง l ผ่านจุด P และ R โดยให้ตัด $\overrightarrow{BC}$ ที่ Q'

ดังนั้น จากการพิสูจน์ในกรณีที่ 1 จะได้ว่า $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ'}{Q'C}\cdot\frac{CR}{RA} = -1$

แต่จากที่กำหนด $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA} = -1$

ดังนั้น $$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ'}{Q'C}\cdot\frac{CR}{RA} = \frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}$$

นั่นคือ $$\frac{BQ'}{Q'C} = \frac{BQ}{QC}$$

$$\frac{BQ'}{Q'C}+1 = \frac{BQ}{QC}+1$$

$$\frac{BQ'+Q'C}{Q'C} = \frac{BQ+QC}{QC}$$

ดังนั้น $Q'C = QC$

เนื่องจาก Q และ Q' อยู่บนส่วนต่อของด้าน BC ทางเดียวกันจึงสามารถสรุปได้ว่า Q และ Q' ต้องเป็นจุดเดียวกัน นั่นคือ P, Q และ R อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน

นั่นคือ ถ้า $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA} = -1$ แล้ว จุด P, Q และ R อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน

จากการพิสูจน์ตอนที่ 1 และตอนที่ 2 สามารถสรุปได้ว่า จุด P, Q และ R อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA} = -1$

ทฤษฎีบทเชวา (Ceva's Theorem)

Giovanni Ceva นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาเลียน ได้แสดงเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอเกี่ยวกับการพบกันที่จุด ๆ หนึ่งของเส้นที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมกับจุดที่กำหนดให้บนด้านตรงข้าม (Cevian) ดังนี้

ทฤษฎีบทเชวา

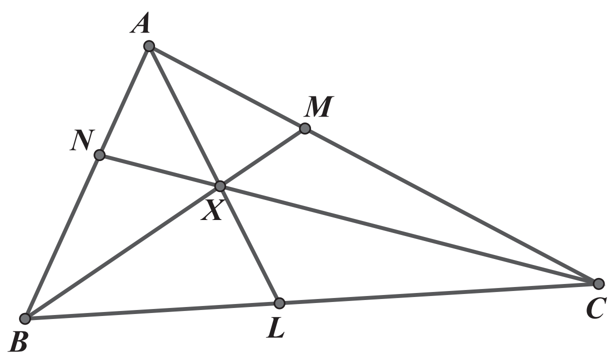
กำหนด ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ซึ่งมีจุด L, M และ N อยู่บนด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ $\overline{AL}$, $\overline{BM}$, และ $\overline{CN}$ ตัดที่จุดเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ $\dfrac{AN}{NB}\dfrac{BL}{LC}\dfrac{CM}{MA}=1$

พิสูจน์ตอนที่ 1 สิ่งที่กำหนด $\overline{AL}$, $\overline{BM}$, และ $\overline{CN}$ ตัดที่จุดๆ เดียวกัน ให้เป็นจุด X

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $\dfrac{AN}{NB}\dfrac{BL}{LC}\dfrac{CM}{MA}=1$

การพิสูจน์แบบที่ 1

แนวคิดในการพิสูจน์จะใช้ทฤษฎีบทเมเนเลอัสที่ได้มีการพิสูจน์แล้วมาอ้างอิง



พิจารณา ΔABL และ ΔACL ซึ่งมี $\overline{NC}$ และ $\overline{MB}$ ตัดด้านหรือส่วนต่อของด้านของรูปสามเหลี่ยมตามลำดับ

ดังนั้น จากทฤษฎีบทเมเนเลอัส

จะได้ว่า $$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BC}{CL}\cdot\frac{LX}{XA}=-1$$

และ $$\frac{AX}{XL}\cdot\frac{LB}{BC}\cdot\frac{CM}{MA}=-1$$

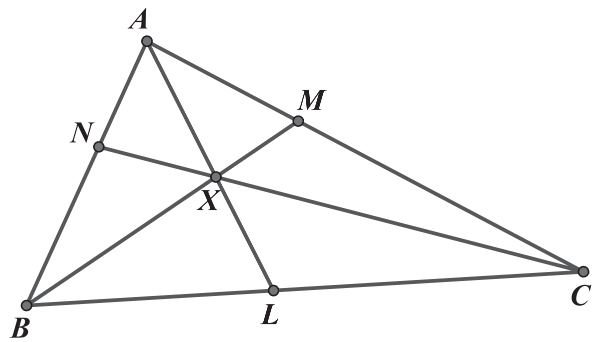
ดังนั้น $$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BC}{CL}\cdot\frac{LX}{XA}\cdot\frac{AX}{XL}\cdot\frac{LB}{BC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$$

นั่นคือ $$\frac{AN}{NB}\frac{BL}{LC}\frac{CM}{MA}=1$$

นั่นคือ ถ้า $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ และ $\overline{CN}$ ตัดที่จุด X แล้ว $\dfrac{AN}{NB}\dfrac{BL}{LC}\dfrac{CM}{MA}=1$

การพิสูจน์แบบที่ 2

แนวคิดในการพิสูจน์ใช้ความรู้ในเรื่องอัตราส่วนของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีฐานอยู่บนเส้นเดียวกันและมีจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมเป็นจุดเดียวกัน และหาความสัมพันธ์ของอัตราส่วนที่ได้ให้เป็นไปตามอัตราส่วนที่ต้องการ



เนื่องจาก $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ และ $\overline{CN}$ ตัดที่จุด X พิจารณา ΔABL และ ΔACL ซึ่งฐานของสามเหลี่ยมทั้งสองอยู่บนเส้นเดียวกัน และมีจุดยอดเป็นจุดเดียวกัน คือจุด A ดังนั้น ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองมีความยาวเท่ากัน กำหนดให้ส่วนสูงมีความยาวเป็น h

กำหนดให้ $[ABL]$ แทนพื้นที่ของรูป ΔABL และ $[ALC]$ แทนพื้นที่ของรูป ΔALC

เพราะฉะนั้น $$\frac{[ABL]}{[ALC]} = \frac{(\frac{1}{2})\cdot(BL)\cdot h}{(\frac{1}{2})\cdot(LC)\cdot h} = \frac{BL}{LC}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $\dfrac{[XBL]}{[XLC]} = \dfrac{BL}{LC}$

ดังนั้น $\dfrac{[ABL]}{[ALC]} = \dfrac{[XBL]}{[XLC]}$

นั่นคือ $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{[ABL]-[XBL]}{[ALC]-[XLC]} = \dfrac{[AXB]}{[AXC]}$

ในทำนองเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า $\dfrac{CM}{MA} = \dfrac{[BXC]}{[BXA]}$ และ $\dfrac{AN}{NB} = \dfrac{[CAX]}{[CBX]}$

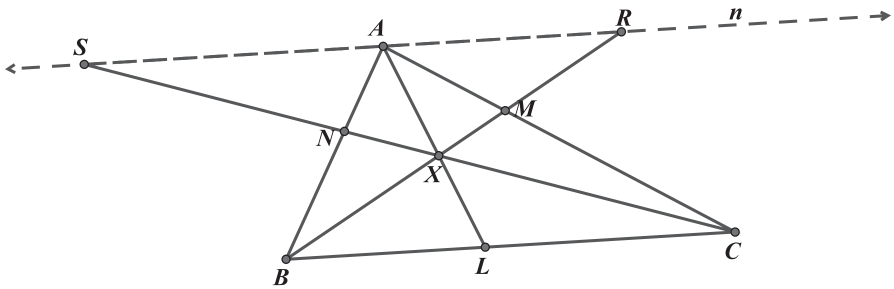
เพราะฉะนั้น $$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA} = \frac{[CAX]}{[CBX]}\cdot\frac{[AXB]}{[AXC]}\cdot\frac{[BXC]}{[BXA]}$$

นั่นคือ $$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA} = 1$$

นั่นคือ ถ้า $\overline{AL}$, $\overline{BM}$, และ $\overline{CN}$ ตัดที่จุด X แล้ว $\dfrac{AN}{NB}\cdot\dfrac{BL}{LC}\cdot\dfrac{CM}{MA} = 1$

การพิสูจน์แบบที่ 3

แนวคิดในการพิสูจน์ใช้ความรู้ในเรื่องสามเหลี่ยมคล้ายและใช้ความรู้ในเรื่องดังกล่าวหาความสัมพันธ์ของอัตราส่วนที่ได้ให้เป็นไปตามอัตราส่วนที่ต้องการ



ลากเส้น n ผ่านจุด A โดยให้ n ขนานกับ $\overleftrightarrow{BC}$

ลาก $\overrightarrow{CX}$ ตัด n ที่ S และ ลาก $\overrightarrow{BX}$ ตัด n ที่ R

เพราะว่า $A\hat{M}R = C\hat{M}B$ และ $M\hat{R}A = M\hat{B}C$ จะได้ $\Delta AMR \sim \Delta CMB$

ดังนั้น $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AR}{CB}$

เพราะว่า $L\hat{X}C = A\hat{X}S$ และ $X\hat{C}L = X\hat{S}A$ จะได้ $\Delta BNC \sim \Delta ANS$

ดังนั้น $\dfrac{BN}{NA} = \dfrac{CB}{SA}$

เพราะว่า $L\hat{X}C = A\hat{X}S$ และ $X\hat{C}L = X\hat{S}A$ จะได้ $\Delta XCL \sim \Delta XSA$

ดังนั้น $\dfrac{CL}{SA} = \dfrac{LX}{AX}$

เพราะว่า $B\hat{X}L = R\hat{X}A$ *และ* $B\hat{L}X = R\hat{A}X$ *จะได้* $\Delta BXL \sim \Delta RXA$

ดังนั้น $\dfrac{BL}{RA} = \dfrac{LX}{AX}$

จาก $\dfrac{CL}{SA} = \dfrac{LX}{AX}$ และ $\dfrac{BL}{RA} = \dfrac{LX}{AX}$ จะได้ว่า $\dfrac{CL}{SA} = \dfrac{BL}{RA}$ หรือ $\dfrac{CL}{BL} = \dfrac{SA}{RA}$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $\dfrac{AM}{MC}\dfrac{BN}{NA}\dfrac{CL}{BL} = \dfrac{AR}{CB}\dfrac{CB}{SA}\dfrac{SA}{RA}$

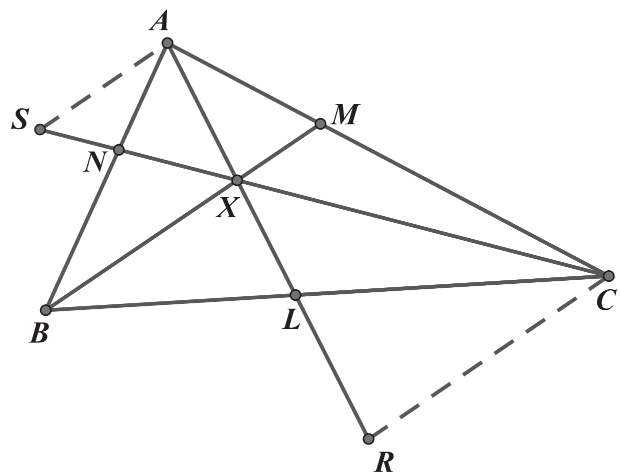
$$\frac{AM}{MC}\frac{BN}{NA}\frac{CL}{BL} = 1$$

หรือ $$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA} = 1$$

นั่นคือ ถ้า $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ และ $\overline{CN}$ ตัดที่จุด X แล้ว $\dfrac{AN}{NB}\cdot\dfrac{BL}{LC}\cdot\dfrac{CM}{MA} = 1$

การพิสูจน์แบบที่ 4

แนวคิดในการพิสูจน์ใช้ความรู้ในเรื่องสามเหลี่ยมคล้ายและใช้ความรู้ในเรื่องดังกล่าวหาความสัมพันธ์ของอัตราส่วนที่ได้ให้เป็นไปตามอัตราส่วนที่ต้องการเช่นเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบทเชวา ตอนที่ 1 แบบที่ 3



ลากเส้นผ่านจุด A ให้ขนานกับ $\overline{BM}$ และตัด $\overline{CN}$ ที่ S และ ลากเส้นผ่านจุด C ให้ขนานกับ $\overline{BM}$ และตัด $\overrightarrow{AL}$ ที่ R

เพราะว่า $A\hat{N}S = B\hat{N}X$ และ $N\hat{A}S = N\hat{B}X$ จะได้ $\Delta ANS \sim \Delta BXN$

ดังนั้น $\dfrac{AN}{NB} = \dfrac{AS}{BX}$

เพราะว่า $B\hat{L}X = C\hat{L}R$ และ $B\hat{X}L = C\hat{R}L$ จะได้ $\Delta BXL \sim \Delta CRL$

ดังนั้น $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{BX}{CR}$

เพราะว่า $A\hat{X}M = A\hat{R}C$ และ $X\hat{A}M = R\hat{A}C$ จะได้ $\Delta XAM \sim \Delta RAC$

ดังนั้น $\dfrac{CA}{MA} = \dfrac{RC}{XM}$ หรือ $CA = \dfrac{(RC)(MA)}{XM}$

เพราะว่า $X\hat{C}M = S\hat{C}A$ และ $X\hat{M}C = S\hat{A}C$ จะได้ $\Delta XCM \sim \Delta SCA$

ดังนั้น $\dfrac{CM}{CA} = \dfrac{XM}{AS}$ หรือ $CA = \dfrac{(AS)(CM)}{XM}$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{(RC)(MA)}{XM} = \dfrac{(AS)(CM)}{XM}$ หรือ $\dfrac{CM}{MA} = \dfrac{RC}{AS}$

นั่นคือ จะได้ว่า $\frac{AN}{NB}\frac{BL}{LC}\frac{CM}{MA}=\frac{AS}{BX}\frac{BX}{CR}\frac{RC}{AS}$

$$\frac{AN}{NB}\frac{BL}{LC}\frac{CM}{MA}=1$$

นั่นคือ ถ้า $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ และ $\overline{CN}$ ตัดที่จุด X แล้ว $\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$

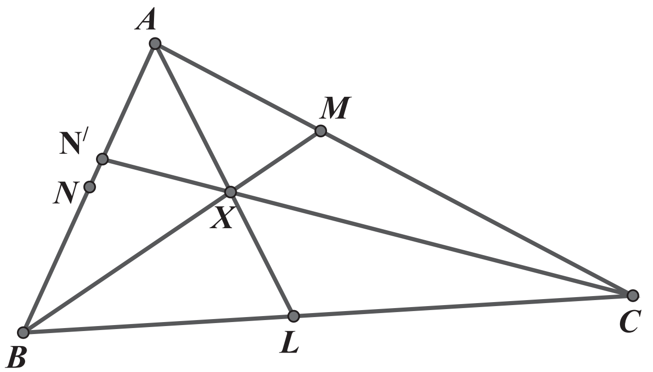
การพิสูจน์ตอนที่ 2 สิ่งที่กำหนดให้ $\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ และ $\overline{CN}$ ตัดที่จุดเดียวกัน

แนวคิดในการพิสูจน์ใช้การพิสูจน์ทางอ้อม โดยการกำหนดให้ จุด N ไม่ได้อยู่บนเส้นเดียวกับ $\overrightarrow{CX}$ โดยให้ $\overrightarrow{CX}$ ตัด $\overline{AB}$ ที่ N' และแสดงให้ได้ว่าจุด N และ N' เป็นจุดเดียวกัน

สมมุติให้ $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ และ $\overline{CN}$ ไม่ตัดที่จุดเดียวกัน

ให้เส้นตรง AL และ BM ตัดกันที่จุด X ลาก CX ตัดด้าน AB ที่จุด N'



ดังนั้น จากการพิสูจน์ตอนที่ 1 จะได้ว่า $\frac{AN'}{N'B}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$

แต่จากที่กำหนด $\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$

ดังนั้น $\frac{AN'}{N'B}=\frac{AN}{NB}$

นั่นคือ $\frac{AN'}{N'B}+1=\frac{AN}{NB}+1$

$$\frac{AN'+N'B}{N'B}=\frac{AN+NB}{NB}$$

$$\frac{AB}{N'B}=\frac{AB}{NB}$$

ดังนั้น $NB = N'B$

เนื่องจาก N และ N' เป็นจุดแบ่งด้าน AB อย่างภายในทั้งคู่และทำให้ได้อัตราส่วนของการแบ่งเท่ากัน ดังนั้นสรุปได้ว่า จุด N และ N' เป็นจุดเดียวกัน

เพราะฉะนั้น $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ และ $\overline{CN}$ ตัดที่จุดเดียวกัน

นั่นคือ ถ้า $\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$ แล้ว $\overrightarrow{AL}$, $\overline{BM}$ และ $\overline{CN}$ ตัดที่จุด X

จากการพิสูจน์ตอนที่ 1 และตอนที่ 2 สามารถสรุปได้ว่า $\overrightarrow{AL}$, $\overline{BM}$ และ $\overline{CN}$ ตัดที่จุดเดียวกันก็ต่อเมื่อ $\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$

บทบาทของการพิสูจน์ทฤษฎีบทเมเนเลอัสและทฤษฎีบทเชวาที่มีต่อผู้เรียน

ในการศึกษาทฤษฎีบทเมเนเลอัสและทฤษฎีบทเชวามีบทบาทของการพิสูจน์ที่ส่งผลต่อการพัฒนาผู้เรียนดังต่อไปนี้

บทบาทในการสำรวจและการค้นพบ ในกิจกรรมการเรียนการสอนทฤษฎีบทเมเนเลอัสและทฤษฎีบทเชวาผู้สอนอาจกำหนดให้ผู้เรียนทำกิจกรรมสำรวจ โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ซึ่งทำให้ผู้เรียนได้มีการสำรวจเกี่ยวกับจุดที่อยู่บนด้านหรือส่วนต่อของด้านจะมีเงื่อนไขใดบ้างที่ทำให้จุดทั้งสามจุดดังกล่าวอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน หรือ เส้นที่ลากจากจุดยอดไปยังด้านตรงข้ามจะมีเงื่อนไขใดบ้างที่ทำให้เส้นทั้งสามตัดกันที่จุดเดียวกัน โดยพยายามให้ผู้เรียนหาข้อสรุปเพื่อจะสร้างเป็นข้อความคาดการณ์ ผลจากการสำรวจและหาข้อสรุปอาจจะพิจารณาเป็นการพิสูจน์ในลักษณะที่ไม่เป็นทางการ ซึ่งผู้เรียนบางคนอาจจะยอมรับว่าสิ่งที่เขาค้นพบเป็นจริง จากการทำกิจกรรมสำรวจโดยใช้โปรแกรม GSP ดังกล่าว แต่อย่างไรก็ตาม ตามหลักของการศึกษาคณิตศาสตร์การพิสูจน์ในลักษณะนี้ยังไม่เพียงพอที่จะยอมรับข้อความคาดการณ์ที่ได้ว่าเป็นจริง การแสดงบทพิสูจน์ที่แสดงข้างต้นไม่ว่าจะเป็นการพิสูจน์แบบใดก็ตามจะเป็นสิ่งยืนยันว่าข้อความคาดการณ์ที่ได้นั้นเป็นจริง

บทบาทในการตรวจสอบ การพิสูจน์ที่แสดงข้างต้นไม่ว่าจะเป็นการพิสูจน์ในรูปแบบใดก็ตาม ซึ่งมีการใช้ข้อมูลมาอ้างอิงในลักษณะที่แตกต่างกันไม่ว่าจะเป็นในเรื่องสามเหลี่ยมคล้าย สมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย เรื่องเส้นขนาน สมบัติของเส้นขนาน ซึ่งการพิสูจน์ในแต่ละแบบที่แตกต่างกันข้างต้นเป็นการยืนยันอย่างเป็นระบบ มีการให้เหตุผลแบบนิรนัยเพื่อแสดงว่าข้อความคาดการณ์ดังกล่าวเป็นจริง

บทบาทในการดำเนินการอย่างเป็นระบบ สำหรับบทบาทในด้านนี้สามารถวิเคราะห์ได้ในการพิสูจน์ข้างต้นซึ่งมีความแตกต่างกันในแต่ละแบบของการพิสูจน์ โดยในการพิสูจน์จำเป็นต้องเขียนอธิบายอ้างอิงความรู้ในเรื่องที่นำมาอ้างในการพิสูจน์ ได้แก่ ในเรื่องสามเหลี่ยมคล้าย และใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย นั่นคือ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันอัตราส่วนของด้านที่สมนัยกันจะเท่ากัน รวมทั้งการใช้ข้อตกลงเบื้องต้นในเรื่องของอัตราส่วนของจุดแบ่งภายในและภายนอกส่วนของเส้นตรง และใช้ความรู้ทางพีชคณิตในการหาผลคูณของอัตราส่วนที่ต้องการ การพิสูจน์บางแบบอาจใช้การอ้างอิงทฤษฎีบทที่ได้มีการพิสูจน์มาแล้ว และในการพิสูจน์บางกรณีอาจต้องใช้การพิสูจน์ทางอ้อมซึ่งจะง่ายกว่าการพิสูจน์ทางตรง

บทบาทของการอธิบาย ผลจากการวิเคราะห์การดำเนินการอย่างเป็นระบบ พบว่าในแต่ละแบบของการพิสูจน์ทฤษฎีบทเมเนเลอัส และทฤษฎีบทเชวา มีการใช้ความรู้เพื่ออ้างอิงในลักษณะที่แตกต่างกันไป ซึ่งจะมีผลต่อการเขียนอธิบายการพิสูจน์ในแต่ละแบบ การเขียนอธิบายการพิสูจน์จำเป็นต้องเรียงลำดับของเงื่อนไขหรือความรู้ต่างๆ ที่นำมาอ้างอิง ไม่ว่าจะเป็นในเรื่องของสามเหลี่ยมคล้าย เส้นขนาน อัตราส่วนของจุดแบ่ง รวมไปถึงข้อตกลงต่างๆ ที่นำมาใช้ในการพิสูจน์ โดยนำมาเขียนให้มีความสัมพันธ์กันเพื่อให้ได้มาตามข้อสรุปที่ต้องการ

บทบาทในด้านการสื่อสาร ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่นำเสนอมาแล้ว จะเห็นว่าแต่ละทฤษฎีบทมีแนวทางในการพิสูจน์ที่หลากหลาย ในบริบทของแต่ละวิธีก็มีแนวทางที่แตกต่างกัน สิ่งนี้เป็นการสื่อให้ผู้เรียนหรือผู้ที่ศึกษาแนวทางในการพิสูจน์ทฤษฎีบททั้งสองเห็นถึงแนวคิดในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่สามารถยืดหยุ่นได้ ปัญหาหนึ่งข้อสามารถแก้ปัญหาได้หลายวิธี แต่ละวิธีก็จะมีแนวทางที่แตกต่างกันไป สำหรับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในเรื่องของทฤษฎีบทเมเนเลอัสและทฤษฎีบทเชวา ผู้สอนสามารถกำหนดให้ผู้เรียนทำกิจกรรมกลุ่ม โดยให้มีการพูดคุย อภิปราย แสดงแนวคิด เพื่อส่งเสริมกระบวนการทางสังคม เพื่อให้ได้แนวคิดที่มาในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ที่ได้จากกิจกรรมสำรวจในขั้นต้น โดยผู้สอนเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องและให้คำแนะนำต่างๆ อีกทั้งเป็นการฝึกการเขียนนำเสนอ แสดงขั้นตอนให้มีความสมเหตุสมผล จนสามารถยอมรับได้เป็นทฤษฎี

จากข้างต้นจึงเห็นได้ว่า การศึกษาทฤษฎีบทเมเนเลอัส และทฤษฎีบทของเชวาที่มีการพิสูจน์ที่หลากหลาย มีผลที่เกี่ยวเนื่องต่อบทบาทของการพิสูจน์ ซึ่งสามารถพัฒนาผู้เรียนในด้านต่างๆ แต่ทั้งนี้อาจขึ้นอยู่กับรูปแบบของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในห้องเรียนที่ผู้สอนจะเป็นผู้วางแผนว่าจะดำเนินการอย่างไรเพื่อให้ผู้เรียนได้พัฒนาอันเป็นผลจากบทบาทของการพิสูจน์

สรุป

การพิสูจน์ทฤษฎีบทเมเนเลอัสและทฤษฎีบทเชวาสามารถช่วยส่งเสริมผู้เรียนในด้านบทบาทของการพิสูจน์ ในด้านการสำรวจ/การค้นพบ ซึ่งในกิจกรรมการเรียนการสอนสามารถทำได้โดยให้ผู้เรียนได้ค้นพบข้อความคาดการณ์ในเรื่องดังกล่าว ซึ่งอาจทำได้ โดยผ่านโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad (GSP) ที่ผู้สอนจัดเตรียมไว้เพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดข้อสงสัยในข้อความคาดการณ์ดังกล่าวและต้องการตรวจสอบข้อความคาดการณ์นี้ ถึงแม้ว่าการสำรวจ/การค้นพบดังกล่าวไม่ใช่ทฤษฎีใหม่ที่เกิดขึ้นในคณิตศาสตร์ก็ตาม จากนั้นก็เข้าสู่การพัฒนาบทบาทของการพิสูจน์ในเรื่องของการตรวจสอบ การอธิบาย รวมทั้งการดำเนินการอย่างเป็นระบบ โดยใช้ความรู้ต่างๆ ที่เกี่ยวข้องและสัมพันธ์กับข้อความคาดการณ์ที่ต้องการพิสูจน์ เช่น ในเรื่องของอัตราส่วนของจุดแบ่งภายใน ความรู้ในเรื่องสามเหลี่ยมคล้าย และอัตราส่วนที่เท่ากัน ซึ่งเป็นผลมาจากรูปสามเหลี่ยมคล้าย เพื่อพิจารณาความสัมพันธ์ที่ได้ ซึ่งในขั้นตอนนี้ผู้สอนอาจกำหนดให้ทำกิจกรรมกลุ่มเพื่อให้ผู้เรียนช่วยกันตรวจสอบหรืออธิบายข้อความดังกล่าว ซึ่งในระหว่างการทำกิจกรรมนี้ บทบาทในการพิสูจน์อีกข้อหนึ่งที่ผู้เรียนจะได้รับการพัฒนาได้แก่การสื่อสาร เพราะต้องมีการ พูดคุย อภิปรายแนวคิดต่างๆ เพื่อให้อธิบายหรือแสดงเหตุผลในการยอมรับข้อความคาดการณ์ดังกล่าว จนในที่สุดก็สามารถเขียนอธิบายแสดงเหตุผลอย่างเป็นขั้นตอนได้จนเป็นทฤษฎี

เอกสารอ้างอิง

1. Greenberg, M. J. 1980. Euclidean and Non-Euclidean Geometries. USA. W.H. Freeman and Company. p. 6-12.
2. Plangprasopchok, S. 2008. Foundations of Geometry. Bangkok. Pitakpress Company. p. 53-56. (in Thai)
3. Mammana, C., and Villani, V. 1998. Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. USA. p. 121-122.
4. Reid, D. A., and Knipping, C. 2010. Proof in Mathematics Education. USA. Sense Publishers. p. 73-77.
5. McCrone, S. M., and Martin, T. S. 2009. Formal Proof in High School Geometry: Student Perceptions of Structure, Validity, and Purpose. In Stylianou, D. A., Blanton, M. L., and Knuth, E. J., Editors. Teaching and Learning proof Across the Grades: a K-16 Perspective. New York: Routledge. p. 204-203.
6. de Villiers, M. 1990. The Role and Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras,* 24, 17-24.
7. Hanna, G. 2000. Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics.* 44(1-2): 5-23.
8. Posamentier, A. S. 1984. Excursions in Advanced Euclidean Geometry. Revised Edition. USA. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. p. 26-29, 40-42.

ได้รับบทความวันที่ 22 พฤศจิกายน 2559
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 21 มีนาคม 2560