บทความวิจัย

การกำหนดชื่อเชิงการจัดของกราฟพีเตอร์เซนทั่วไป และกราฟลอลลิพอพสำหรับบางกรณี

กัณฐ์ญารัตธ์ ฐิติวัฒนาการ และ สรศักดิ์ ลี้รัตนาวลี*

บทคัดย่อ

ให้ $G = (V, E)$ เป็นกราฟเชิงเดียวและเชื่อมโยง มีจุดยอด n จุด และมีเส้น m เส้น โดย $f: V \longrightarrow \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ เป็นการกำหนดชื่อจุดยอดของกราฟ G เมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง ซึ่งนำไปสร้างฟังก์ชัน $f^C: E \longrightarrow \mathbb{N}$ ที่เรียกว่าการกำหนดชื่อเส้นหรือการกำหนดชื่อเชิงการจัดของกราฟ G โดย เส้น $uv \in E$ ที่ $f(u) > f(v)$ ถูกกำหนดชื่อเป็น $f^C(uv) = \binom{f(u)}{f(v)}$ ถ้า f^C เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้วเรียก f^C ว่าการกำหนดชื่อเชิงการจัดที่เหมาะสม และถ้ากราฟ G มีการกำหนดชื่อเชิงการจัดที่เหมาะสม แล้วเรียก G ว่าเป็น กราฟการจัดหมู่ ในบทความนี้แสดงว่า กราฟ พีเตอร์เซนทั่วไป $GP(n, 3)$ และ กราฟลอลลิพอพ $H_{g, l}$ เมื่อ $3 \leq g \leq 6$ และ $g - 1 \leq l$ เป็นกราฟการจัดหมู่

คำสำคัญ: การกำหนดชื่อเชิงการจัด กราฟพีเตอร์เซนทั่วไป กราฟลอลลิพอพ กราฟการจัดหมู่

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

*ผู้นิพนธ์ประสานงาน, e-mail: sorasak.l@cmu.ac.th

Combinatorial Labelings of Generalized Petersen Graphs and Lollipop Graphs for Some Cases

Kanyarat Thitiwatthanakan and Sorasak Leeratanavalee*

ABSTRACT

Suppose $G = (V, E)$ is a simple and connected graph with n vertices and m edges. A vertex-labeling is a bijective function $f: V \longrightarrow \{1, 2, 3, ..., n\}$. f induces a mapping $f^c: E \longrightarrow \mathbb{N}$ called the edge-labeling or combinatorial labeling of G. f^c is defined by $f^c(uv) = \binom{f(u)}{f(v)}$ for any edge $uv \in E$ where $f(u) > f(v)$. If f^c is injective, we say that it is a valid combination labeling. If G has a valid combination labeling, then G is called a combination graph. In this article, Generalized Petersen graphs $GP(n, 3)$ and Lollipop graphs $H_{g,l}$ where $3 \le g \le 6$ and $g - 1 \le l$ are considered to be combination graphs.

Keywords: combinatorial labeling, Generalized Petersen graphs, Lollipop graphs, combination graphs

Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University.

*Corresponding author, email: sorasak_l@cmu.ac.th

บทนำ

การศึกษาด้านทฤษฎีกราฟมีผู้ศึกษามาอย่างแพร่หลาย เนื่องจากสามารถนำมาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาต่างๆ ได้ เช่น การแก้ปัญหาด้านการจัดการทรัพยากร การคมนาคมขนส่ง และการวางระบบสาธารณูปโภค ซึ่งหนึ่งในหัวข้อที่น่าสนใจของทฤษฎีกราฟ คือ การกำหนดชื่อจุดยอดและเส้นของกราฟ

ในปี ค.ศ. 2005 มีการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับการกำหนดชื่อเชิงการจัดของกราฟ โดย Suresh Manjanath Hegde และ Sudhakar Shetty [1] โดยมีการนำจำนวนนับมากำหนดชื่อให้กับแต่ละจุดยอดของกราฟและใช้การจัดหมู่ในการกำหนดชื่อให้กับแต่ละเส้นของกราฟซึ่งค่าที่ได้แตกต่างกัน

จากนั้นปี ค.ศ. 2012 มีการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับการกำหนดชื่อจุดยอดและเส้น โดย Pak Ching Li [2] ซึ่งได้ศึกษากราฟต้นไม้ k ภาคบริบูรณ์ (complete k-ary trees) กราฟคาเทอพิลลาร์ (caterpillars) กราฟพีเตอร์เซนทั่วไป (generalized Petersen graphs) $GP(n, 1)$, $GP(n, 2)$ กราฟวีล (wheel graphs) และ กราฟกริด (grid graphs) ว่าเป็นกราฟการจัดหมู่ อีกทั้งแสดงว่ากราฟสองส่วนแบบบริบูรณ์ (complete bipartite graphs) ไม่เป็นกราฟการจัดหมู่

ผู้ศึกษาจึงมีความสนใจในการศึกษาการกำหนดชื่อเชิงการจัดที่เหมาะสมของกราฟพิเศษบางชนิดที่ยังไม่มีผู้ศึกษามาก่อน ได้แก่ กราฟพีเตอร์เซนทั่วไป $GP(n, 3)$ และ กราฟลอลลิพอพ (lollipop graphs) $H_{g,l}$ เมื่อ $3 \leq g \leq 6$ และ $g - 1 \leq l$ โดยใช้แนวคิดที่ขยายจากทฤษฎีเดิม

โดยในการศึกษานี้ ให้ $G = (V, E)$ เป็นกราฟเชิงเดียวและเชื่อมโยง มีจุดยอด n จุด และมีเส้น m เส้น โดย $f: V \longrightarrow \{1, 2, 3, ..., n\}$ เป็นการกำหนดชื่อจุดยอดของกราฟ G เมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง ซึ่งถูกนำไปสร้าง $f^c: E \longrightarrow \mathbb{N}$ ที่เรียกว่าฟังก์ชันกำหนดชื่อเส้นหรือการกำหนดชื่อเชิงการจัด (combinatorial labelings) ของกราฟ G โดยเมื่อเส้น $uv \in E$ ที่ $f(u) > f(v)$ ถูกกำหนดชื่อเป็น $f^c(uv) = \binom{f(u)}{f(v)}$ ถ้า f^c เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้วเรียก f^c ว่าการกำหนดชื่อเชิงการจัดที่เหมาะสม (valid combination labelings) และถ้ากราฟ G มีการกำหนดชื่อเชิงการจัดที่เหมาะสมแล้วจะเรียก G ว่าเป็น กราฟการจัดหมู่ (combination graphs)

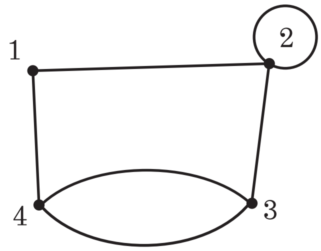
อุปกรณ์และวิธีการทดลอง

ในหัวข้อนี้กล่าวถึงความรู้พื้นฐานของกราฟที่ถูกนำมาใช้ในการศึกษาครั้งนี้ ได้แก่ บทนิยาม และตัวอย่างพอสังเขป โดยอ้างอิงตาม [3]

บทนิยาม 1 กราฟ (graph) หรือ กราฟไม่ระบุทิศทาง (undirected graph) G คือคู่อันดับ (V,E) โดยที่ V เป็นเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่างของสมาชิกที่เรียกว่าจุดยอด (vertices) และ E เป็นเซตจำกัดของคู่ไม่อันดับของสมาชิกใน V เรียกสมาชิก ของ E ว่าเส้น (edges) โดยทั่วไปจะแทนกราฟ G ด้วยแผนภาพ โดยสมาชิกของ V จะถูกแทนด้วยจุดยอด และสมาชิกของ E จะถูกแทนด้วยเส้นที่เชื่อมระหว่าง 2 จุดยอดนั้น

หมายเหตุ เนื่องจากการนำทฤษฎีกราฟไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาบางปัญหา เมื่อแปลงปัญหามาเป็นกราฟพบว่า บางครั้งระหว่างจุดสองจุดอาจมีเส้นเชื่อมมากกว่าหนึ่งเส้น หรือเส้นๆ หนึ่งอาจมีจุดปลายทั้งสองเป็นจุดเดียวกันดังนั้นในการศึกษาทฤษฎีกราฟจึงเป็นที่ตกลงว่าการเขียนเซตของเส้นเป็นไปได้ที่จะมีสมาชิกซ้ำกัน

ตัวอย่าง 1 ให้ $G = (V,E)$ เป็นกราฟ โดยที่ $V = \{1,2,3,4\}$ และ $E = \{\{1,2\}, \{2,2\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{3,4\}\}$ จะสามารถเขียนแทนกราฟ G ได้ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 กราฟ G

กรณีที่เส้นในกราฟมีจุดปลายของเส้นเป็นจุดเดียวกัน จะเรียกเส้นนั้นว่า วงวน (loops) และกรณีที่ 2 จุดยอดมีเส้นมากกว่า 1 เส้น จะเรียกเส้นเหล่านั้นว่า เส้นขนาน (multiple edges) เช่น จากรูปที่ 1 กราฟ G ข้างต้นมี เส้น {2,2} เป็นวงวน และมีเส้น {3,4}, {3,4} เป็นเส้นขนาน โดยกราฟที่ไม่มีทั้งวงวนและเส้นขนาน ถูกเรียกว่า กราฟเชิงเดียว (simple graphs)

หมายเหตุ จะเขียนแทนเส้น $\{u,v\}$ ในกราฟ G ด้วย uv

บทนิยาม 2 จะเรียกจุดยอด u และจุดยอด v ของกราฟ G ว่าเป็นจุดยอดประชิดกัน (adjacent vertices) ถ้ามีเส้นระหว่างจุดยอด u และจุดยอด v

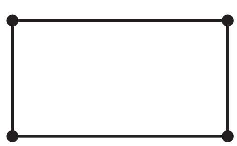
บทนิยาม 3 ให้ $G = (V,E)$ และ $S = (V', E')$ เป็นกราฟ จะกล่าวว่า S เป็นกราฟย่อย (subgraph) ของกราฟ G ถ้า $V' \subseteq V$ และ $E' \subseteq E$

บทนิยาม 4 ให้ $G = (V,E)$ เป็นกราฟ และ $u, v \in V$ วิถี $u - v$ ($u - v$ path) ในกราฟ G คือ กราฟย่อย $P = (V', E')$ ของกราฟ G โดยที่จะมีจำนวนนับ n ที่ทำให้ $V' = \{u, v_1, v_2, ..., v_n, v\}$ และ $E' = \{uv_1, v_1v_2, v_2v_3, ..., v_{n+1}v_n, v_nv\}$

วิถีที่มี n จุด แทนด้วย P_n โดยมี $n - 1$ เส้น ซึ่งกล่าวว่า P_n มีความยาว $n - 1$

รูปที่ 2 กราฟ P_4

กรณีที่วิถีมีจุดยอดที่เป็นจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน เรียกว่า วง (cycles) และแทนวงที่มี n จุด ด้วย C_n

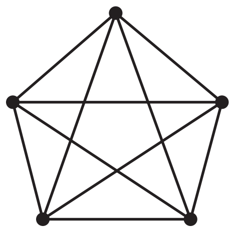


รูปที่ 3 กราฟ C_4

บทนิยาม 5 ให้ $G = (V,E)$ เป็นกราฟ สำหรับ $u, v \in V$ และ $u \neq v$ ถ้า G มีวิถี $u - v$ เรากล่าวว่า u เชื่อมโยง (connected) กับ v และจะกล่าวว่า G เป็นกราฟเชื่อมโยง (connected graphs) ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ $u, v \in V, u \neq v$ จะได้ว่า u เชื่อมโยงกับ v

ถ้า G ไม่ใช่กราฟเชื่อมโยง เราเรียก G ว่ากราฟไม่เชื่อมโยง (disconnected graphs)

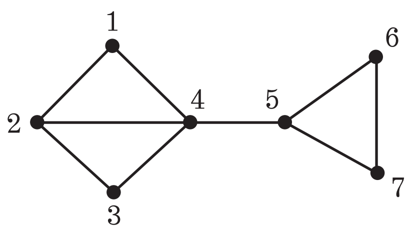
บทนิยาม 6 กราฟแบบบริบูรณ์ (complete graphs) เป็นกราฟที่ทุกคู่ของจุดยอดมีเส้นระหว่าง 2 จุดยอดนั้น กราฟแบบบริบูรณ์บนจุดยอด n จุด ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย K_n



รูปที่ 4 กราฟ K_5

บทนิยาม 7 เส้นตัด (bridges) คือ เส้นในกราฟเชื่อมโยง ที่เมื่อลบเส้นนั้นออก จะทำให้กราฟใหม่ที่ได้เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง

ตัวอย่าง 2 ให้ $H = (V, E)$ เป็นกราฟ โดยที่ $V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ และ $E = \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{6,7\}\}$ จะสามารถเขียนแทนกราฟ H ได้ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 กราฟ H

พบว่า กราฟ H เป็นกราฟเชื่อมโยง และเมื่อลบเส้น $\{4,5\}$ ทำให้กราฟที่ได้ใหม่ เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง ดังนั้น เส้น $\{4,5\}$ เป็นเส้นตัด

บทนิยาม 8 การจัดหมู่ (combination) [4] ให้ A เป็นเซตของของ n สิ่งที่ต่างกัน สำหรับจำนวนเต็ม r ซึ่ง $0 \leq r \leq n$ การจัดหมู่ทีละ r สิ่งของเซต A คือ การเลือกเซตย่อยที่มีสมาชิก r ตัวจากเซต A และจะแทนจำนวนวิธีในการจัดหมู่ทีละ

r สิ่งของเซต A ด้วยสัญกรณ์ C_r^n หรือ $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ โดยที่ $C_r^n = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

ทฤษฎีบท 1 [4] ให้ n เป็นจำนวนนับ สำหรับจำนวนเต็ม r ซึ่ง $0 \le r \le n$ จะได้ว่า $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-r \end{pmatrix}$

ผลการทดลอง

ในหัวข้อนี้แสดงถึง การกำหนดชื่อเชิงการจัดของกราฟพีเตอร์เซนทั่วไป และกราฟลอลลิพอพสำหรับบางกรณี โดยมีขั้นตอนคือ กำหนดชื่อจุดยอดของกราฟดังกล่าว กำหนดชื่อเชิงการจัดของกราฟ หรือเป็นการกำหนดชื่อเส้นของกราฟโดยอาศัยการกำหนดชื่อจุดยอดที่ได้กำหนดมาในข้างต้น จากนั้นแสดงว่ากราฟดังกล่าวเป็นกราฟการจัดหมู่

1. กราฟพีเตอร์เซนทั่วไป *GP(n, k)*

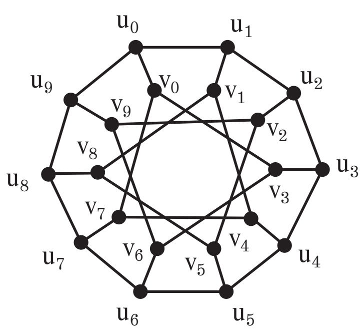
บทนิยาม 9 [5] ให้ n และ k เป็นจำนวนนับที่ $n \ge 3$, $1 \le k < \frac{n}{2}$

กราฟพีเตอร์เซนทั่วไป $GP(n, k) = (V, E)$ โดยที่ $V = \{u_i \mid i \in {}'_n\} \cup \{v_i \mid i \in {}'_n\}$ และ

$$E = \{u_i u_{i+1} \mid i \in {}'_n\} \cup \{u_i v_i \mid i \in {}'_n\} \cup \{v_i v_{i+k} \mid i \in {}'_n\}$$

หมายเหตุ จากบทนิยามจะเห็นได้ว่า $|V| = 2n$ และ $|E| = 3n$

โดยรูปถัดไปแสดงกราฟพีเตอร์เซนทั่วไป $GP(n, k)$ ในกรณีที่ $n = 10$, $k = 3$



รูปที่ 6 กราฟพีเตอร์เซนทั่วไป $GP(10, 3)$

การศึกษาครั้งนี้ จะแสดงว่ากราฟพีเตอร์เซนทั่วไป $GP(n, 3)$ เป็นกราฟการจัดหมู่โดยอาศัยบทตั้งต่างๆ ดังต่อไปนี้

บทตั้ง 1 ให้ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 3$ จะได้ว่า $\binom{2n-1}{2} < \binom{n+3}{3}$

การพิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 3$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\binom{n+3}{3} - \binom{2n-1}{2} &= \frac{(n+3)!}{3!n!} - \frac{(2n-1)!}{2!(2n-3)!} \\
&= \frac{(2n-3)!(n+3)! - 3(2n-1)!n!}{3!n!(2n-3)!} \\
&= \frac{1}{3!}\left[(n+3)(n+2)(n+1) - 3(2n-1)(2n-2)\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[n^3 - 6n^2 + 29n\right] \\
&= \frac{1}{6}n\left[(n-3)(n-3) + 20\right] > 0
\end{aligned}$$

บทตั้ง 2 ให้ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 3$ แล้ว $\binom{2n-2}{3} < \binom{n+4}{4}$

การพิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 3$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\binom{n+4}{4} - \binom{2n-2}{3} &= \frac{(n+4)!}{4!n!} - \frac{(2n-2)!}{3!(2n-5)!} \\
&= \frac{(n+4)!(2n-5)! - 4(n!)(2n-2)!}{4!n!(2n-5)!} \\
&= \frac{1}{4!}\left[(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) - 4(2n-2)(2n-3)(2n-4)\right] \\
&= \frac{1}{4!}\left[n^4 - 22n^3 + 179n^2 - 158n + 120\right] \\
&= \frac{1}{4!}\left[\begin{array}{l}(n^4 - 22n^3 + 121n^2) + (49n^2 - 140n + 100) + \\ (4n^2 - 16n + 16) + (5n^2 - 2n + 4)\end{array}\right] \\
&= \frac{1}{4!}\left[n^2(n-11)^2 + (7n-10)^2 + (2n-4)^2 + (5n^2 - 2n + 4)\right]
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $n \geq 3$ ดังนั้น $5n^2 \geq 3n > 2n$ และเป็นผลให้ $5n^2 - 2n + 4 > 0$
เพราะฉะนั้น

$$\binom{n+4}{4} - \binom{2n-2}{3} = \frac{1}{4!}\left[n^2(n-11)^2 + (7n-10)^2 + (2n-4)^2 + (5n^2 - 2n + 4)\right] > 0$$

บทตั้ง 3 ให้ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 3$ จะได้ว่า $\binom{n+5}{5} \neq \binom{2n}{4}$

การพิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 3$
ให้

$$\binom{n+5}{5} - \binom{2n}{4} = 0$$

$$\frac{(n+5)!}{5!n!} - \frac{(2n)!}{4!(2n-4)!} = 0$$

$$\frac{(n+5)!(2n-4)! - 5(2n)!n!}{5!n!(2n-4)!} = 0$$

$$\frac{1}{5!}\left[(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) - 5(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\right] = 0$$

$$\left[n^5 - 65n^4 + 325n^3 + 5n^2 + 334n + 120\right] = 0$$

$$n \approx 59.538$$

เกิดข้อขัดแย้งกับ n เป็นจำนวนนับ

บทตั้ง 4 ให้ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 3$ จะได้ว่า $\binom{2n}{4} < \binom{n+6}{6}$

การพิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 3$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\binom{n+6}{6} - \binom{2n}{4} &= \frac{(n+6)!}{6!n!} - \frac{(2n)!}{4!(2n-4)!} \\
&= \frac{1}{6!}\left[(n+6)(n+5)\ldots(n+1) - (5)(6)(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\right] \\
&= \frac{1}{6!}\left[n^6 + 21n^5 - 305n^4 + 2175n^3 + 304n^2 + 2124n + 720\right] \\
&= \frac{1}{6!}\left[n^6 + \left(16n^5 - 360n^4 + 2025n^3\right) + 5n^5 + 55n^4 + 150n^3 + 304n^2 + 2124n + 720\right] \\
&= \frac{1}{6!}\left[n^6 + n^3\left(4n-45\right)^2 + 5n^5 + 55n^4 + 150n^3 + 304n^2 + 2124n + 720\right] > 0
\end{aligned}$$

บทตั้ง 5 ให้ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 3$ จะได้ว่า $\binom{2n-2}{n-3} < \binom{2n-2}{n-2}$

บทตั้ง 6 ให้ n, k เป็นจำนวนนับที่ $n > k \geq 1$ แล้ว $\binom{n}{k} < \binom{n+1}{k+1}$

บทตั้ง 7 ให้ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 6$ จะได้ว่า $\binom{2n-1}{n-1} < \binom{2n}{n-2}$

บทตั้ง 8 ให้ n, k เป็นจำนวนนับที่ $n > k \geq 1$ จะได้ว่า $\binom{n}{k} < \binom{n+1}{k}$

บทตั้ง 9 ให้ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 5$ จะได้ว่า $\binom{2n-1}{n-4} < \binom{2n-1}{n-1}$

หมายเหตุ การพิสูจน์บทตั้ง 5 บทตั้ง 6 บทตั้ง 7 บทตั้ง 8 และบทตั้ง 9 พิสูจน์เช่นเดียวกับบทตั้ง 4

บทตั้ง 10 ให้ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 5$ จะได้ว่า $\binom{2n-1}{n-4} \neq \binom{2n-3}{n-3}$

บทตั้ง 11 ให้ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 5$ จะได้ว่า $\binom{2n-1}{n-4} \neq \binom{2n-2}{n-3}$

บทตั้ง 12 ให้ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 5$ แล้ว $\binom{2n-1}{n-4} \neq \binom{2n-2}{n-2}$

หมายเหตุ การพิสูจน์บทตั้ง 10 บทตั้ง 11 และบทตั้ง 12 พิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้งเช่นเดียวกับบทตั้ง 3

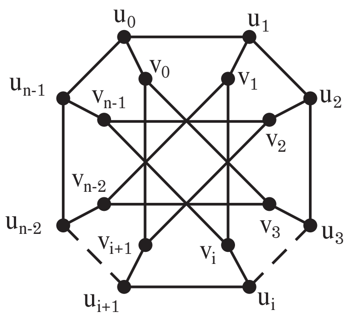
ทฤษฎีบท 2 สำหรับแต่ละจำนวนนับ n โดยที่ $n \geq 7$ ได้ว่ากราฟพีเตอร์เซนทั่วไป $GP(n,\ 3)$ เป็นกราฟการจัดหมู่

การพิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 7$ $GP(n,\ 3)$ เป็นกราฟพีเตอร์เซนทั่วไป

กำหนด $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ เป็นจุดยอดที่อยู่บนวัฏจักรด้านนอกของกราฟ $GP(n,\ 3)$

$v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ เป็นจุดยอดที่อยู่บนวัฏจักรด้านในของกราฟ $GP(n,\ 3)$

แสดงได้ดังนี้



รูปที่ 7 กราฟพีเตอร์เซนทั่วไป *GP(n, 3)*

ให้ $f: V \longrightarrow \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ กำหนดโดย

$$f(u_i)=\begin{cases} i+1 & ; 0 \le i \le n-3 \\ n & ; i=n-2 \\ n-1 & ; i=n-1 \end{cases}$$

$$f(v_i)=\begin{cases} n+i+1 & ; 0 \le i \le n-3 \\ 2n & ; i=n-2 \\ 2n-1 & ; i=n-1 \end{cases}$$

ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก V ไปทั่วถึง $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$

นั่นคือ f เป็นการกำหนดชื่อจุดยอดของกราฟ *GP(n, 3)*

ให้ $f^c: E \longrightarrow \mathbb{N}$ เป็นการกำหนดชื่อเชิงการจัดของกราฟ *GP(n, 3)* กำหนดโดย

$$f^c(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} \binom{i+2}{i+1} & ; 0 \le i \le n-4 \text{ หรือ } i=n-2 \\ \binom{n}{n-2} & ; i=n-3 \\ \binom{n-1}{1} & ; i=n-1 \end{cases}$$

$$f^c\left(v_i v_{i+3}\right) = \begin{cases} \binom{n+4+i}{n+1+i} & ;0 \le i \le n-6 \\ \binom{2n}{2n-4} & ;i = n-5 \\ \binom{2n-1}{2n-3} & ;i = n-4 \\ \binom{2n-2}{n+1} & ;i = n-3 \\ \binom{2n}{n+2} & ;i = n-2 \\ \binom{2n-1}{n+3} & ;i = n-1 \end{cases}$$

$$f^c\left(u_i v_i\right) = \binom{n+i+1}{i+1} \quad ;0 \le i \le n-1$$

จากการกำหนดชื่อเชิงการจัดข้างต้น สามารถนำค่าที่ได้มาเขียนเรียงลำดับได้ ดังนี้

$$\left\{f^c\left(u_i u_{i+1}\right)\right\}_{i=0}^{n-1} = \left\{2,3,4,\ldots,n,\binom{n}{n-2}=\binom{n}{2}\right\}$$

$$\left\{f^c\left(v_i v_{i+3}\right)\right\}_{i=0}^{n-1} = \left\{\begin{matrix}\binom{2n-1}{2n-3},\binom{n+4}{n+1},\binom{n+5}{n+2},\ldots,\binom{2n-2}{2n-5},\binom{2n}{2n-4},\binom{2n-1}{n+3}, \\ \binom{2n-2}{n+1},\binom{2n}{n+2}\end{matrix}\right\}$$

$$\left\{f^c\left(u_i v_i\right)\right\}_{i=0}^{n-1} = \left\{\binom{n+1}{1},\binom{n+2}{2},\binom{n+3}{3},\ldots,\binom{2n-1}{n-1},\binom{2n}{n}\right\}$$

พบว่า $\left\{f^{c}\left(v_i v_{i+3}\right)\right\}_{i=0}^{n-1}$ สามารถจัดรูปใหม่ได้ คือ

$$\left\{\binom{2n-1}{2},\binom{n+4}{3},\binom{n+5}{3},\ldots,\binom{2n-2}{3},\binom{2n}{4},\binom{2n-1}{n-4},\binom{2n-2}{n-3},\binom{2n}{n-2}\right\}$$

สามารถเรียงลำดับการกำหนดชื่อเชิงการจัดได้ คือ

$$2<3<\ldots<n<n+1<\binom{n}{2}<\binom{n+2}{2}<\binom{2n-1}{2}$$

โดยบทตั้ง 1 และ บทตั้ง 8 ได้ว่า

$$\binom{2n-1}{2}<\binom{n+3}{3}<\binom{n+4}{3}<\ldots<\binom{2n-2}{3}$$

โดยบทตั้ง 2 บทตั้ง 3 บทตั้ง 4 บทตั้ง 6 และบทตั้ง 8 ได้ว่า

$$\binom{2n-2}{3}<\binom{n+4}{4}<\binom{2n}{4}\neq\binom{n+5}{5}<\binom{n+6}{6}<\ldots<\binom{2n-4}{n-4}<\binom{2n-3}{n-3}<\binom{2n-2}{n-3}$$

โดยบทตั้ง 5 บทตั้ง 6 และบทตั้ง 7 ได้ว่า

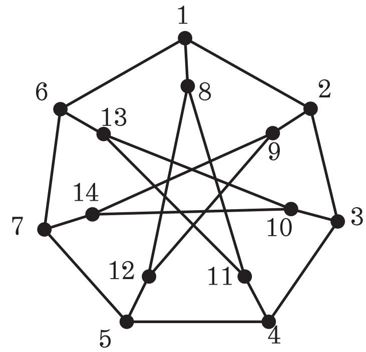
$$\binom{2n-2}{n-3}<\binom{2n-2}{n-2}<\binom{2n-1}{n-1}<\binom{2n}{n-2}<\binom{2n}{n}$$

โดยบทตั้ง 9 บทตั้ง 10 บทตั้ง 11 และบทตั้ง 12 ได้ว่า

$$\binom{2n-4}{n-4}<\binom{2n-1}{n-4}<\binom{2n-1}{n-1}$$

ซึ่ง $\binom{2n-1}{n-4}\neq\binom{2n-3}{n-3},\binom{2n-1}{n-4}\neq\binom{2n-2}{n-3},\binom{2n-1}{n-4}\neq\binom{2n-2}{n-2}$

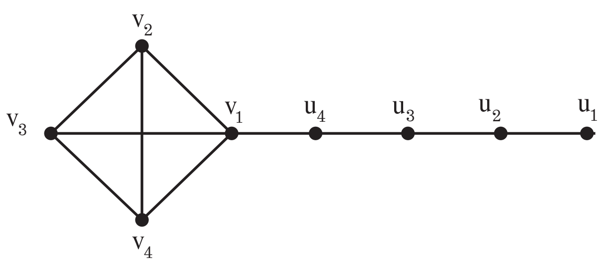
ดังนั้น f^{c} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง นั่นคือ f^{c} เป็นการกำหนดชื่อเชิงการจัดที่เหมาะสม
ดังนั้น กราฟพีเตอร์เซนทั่วไป กรณี $GP(n, 3)$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 7$ เป็นกราฟการจัดหมู่



รูปที่ 8 การกำหนดชื่อจุดยอดที่ทำให้ *GP(7, 3)* เป็นกราฟการจัดหมู่

2. กราฟลอลลิพอพ

บทนิยาม 10 [6] ให้ g,l เป็นจำนวนนับ กราฟลอลลิพอพ (lollipop graph) เป็นกราฟที่เกิดจากการเชื่อมกันของกราฟบริบูรณ์ K_g และวิถี P_l ด้วยเส้นตัด 1 เส้น เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $H_{g,\,l}$



รูปที่ 9 กราฟลอลลิพอพ $H_{4,\,4}$

การศึกษาครั้งนี้จะแสดงว่า กราฟลอลลิพอพ $H_{g,\,l}$ เมื่อ g, l เป็นจำนวนนับ โดยที่ $3 \le g \le 6$ และ $g - 1 \le l$ เป็นกราฟการจัดหมู่ โดยอาศัยบทตั้งต่างๆ ดังต่อไปนี้

บทตั้ง 13 ให้ g,l เป็นจำนวนนับ ที่ $3 \le g \le 6$ และ $g - 1 \le l$ จะได้ว่า $g + l < \binom{l+3}{2}$

การพิสูจน์ ให้ g,l เป็นจำนวนนับ ที่ $3 \le g \le 6$ และ $g - 1 \le l$

พิจารณา

$$\binom{l+3}{2} - (g+l) = \frac{(l+3)!}{2!(l+1)!} - (g+l) = \frac{1}{2}\Big[(l+3)(l+2) - 2(g+l)\Big] = \frac{1}{2}\Big[\left(l^2 + 3l + 6 - 2g\right)\Big]$$

เนื่องจาก $l + 1 \ge g$ ดังนั้น $2l + 2 \ge 2g$ และเป็นผลให้ $3l + 6 > 2g$

เพราะฉะนั้น

$$\binom{l+3}{2} - (g+l) = \frac{1}{2}\Big[\left(l^2 + 3l + 6 - 2g\right)\Big] > 0$$

บทตั้ง 14 ให้ g,l เป็นจำนวนนับ ที่ $3 \le g \le 6$ และ $g-1 \le l$ จะได้ว่า $\binom{g+l}{g-3} < \binom{g+l-1}{g-2}$

การพิสูจน์ ให้ g,l เป็นจำนวนนับ ที่ $3 \le g \le 6$ และ $g-1 \le l$
พิจารณา

$$\begin{aligned}
\binom{g+l-1}{g-2} - \binom{g+l}{g-3} &= \frac{(g+l-1)!}{(g-2)!(l+1)!} - \frac{(g+l)!}{(g-3)!(l+3)!} \\
&= \frac{(g+l-1)!}{(g-2)!(l+3)!}\Big[(l+3)(l+2) - (g+l)(g-2)\Big] \\
&= \frac{(g+l-1)!}{(g-2)!(l+3)!}\Big[l^2 + 7l + 6 + 2g - g^2 - gl\Big] \\
&= \frac{(g+l-1)!}{(g-2)!(l+3)!}\Big[(l^2 + 2g - 1 - g^2) + (6l - gl) + l + 7\Big]
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $3 \le g \le 6$ ดังนั้น $3l \le gl \le 6l$ และเป็นผลให้ $6l - gl \ge 0$
และจาก $l \ge g-1$ ดังนั้น $l^2 \ge (g-1)^2 = g^2 - 2g + 1$ และเป็นผลให้ $l^2 + 2g - 1 - g^2 \ge 0$
เพราะฉะนั้น

$$\binom{g+l-1}{g-2} - \binom{g+l}{g-3} = \frac{(g+l-1)!}{(g-2)!(l+3)!}\Big[(l^2 + 2g - 1 - g^2) + (6l - gl) + l + 7\Big] > 0$$

บทตั้ง 15 ให้ g,l เป็นจำนวนนับ ที่ $5 \le g \le 6$ และ $g-1 \le l$ จะได้ว่า $\binom{g+l}{g-4} < \binom{g+l-2}{g-3}$

การพิสูจน์ ให้ g,l เป็นจำนวนนับ ที่ $5 \le g \le 6$ และ $g-1 \le l$
พิจารณา

$$\binom{g+l-2}{g-3}-\binom{g+l}{g-4}$$

$$= \frac{(g+l-2)!}{(g-3)!(l+1)!}-\frac{(g+l)!}{(g-4)!(l+4)!}$$

$$= \frac{(g+l-2)!}{(g-3)!(l+4)!}\left[(l+4)(l+3)(l+2)-(g+l)(g+l-1)(g-3)\right]$$

$$= \frac{(g+l-2)!}{(g-3)!(l+4)!}\left[l^3+12l^2+23l+24+7gl+4g^2-g^3-gl^2-2g^2l-3g\right]$$

$$= \frac{(g+l-2)!}{(g-3)!(l+4)!}\left[\begin{array}{l}\left(l^3+3g^2-3g+1-g^3\right)+\left(6l^2-gl^2\right)+\\ \left(5l^2+5l+7gl-2g^2l\right)+l^2+18l+23+g^2\end{array}\right]$$

เนื่องจาก $5 \le g \le 6$ ดังนั้น $5l^2 \le gl^2 \le 6l^2$ และเป็นผลให้ $6l^2 - gl^2 \ge 0$
จาก $g - 1 \le l$ ดังนั้น $l^3 \ge (g-1)^3 = g^3 - 3g^2 + 3g - 1$ และเป็นผลให้ $l^3 + 3g^2 - 3g + 1 - g^3 \ge 0$
จาก $5 \le g \le 6$ ดังนั้น $10g \le 2g^2 \le 12g$ และเป็นผลให้ $12g - 2g^2 \ge 0$
จาก $g - 1 \le l$ ดังนั้น $5l + 5 \ge 5g$ และ $5l + 5 + 7g \ge 5g + 7g \ge 2g^2$ เป็นผลให้ $5l + 5 + 7g - 2g^2 \ge 0$
และดังนั้น $5l^2 + 5l + 7gl - 2g^2l \ge 0$
เพราะฉะนั้น

$$\binom{g+l-2}{g-3}-\binom{g+l}{g-4} = \frac{(g+l-2)!}{(g-3)!(l+4)!}\left[\begin{array}{l}\left(l^3+3g^2-3g+1-g^3\right)+\left(6l^2-gl^2\right)+\\ \left(5l^2+5l+7gl-2g^2l\right)+l^2+18l+23+g^2\end{array}\right] > 0$$

บทตั้ง 16 ให้ g,l เป็นจำนวนนับ ที่ $3 \le g \le 6$ และ $g - 1 \le 1$ จะได้ว่า $\binom{g+l}{g-2} < \binom{g+l}{g-1}$

การพิสูจน์ ให้ g,l เป็นจำนวนนับ ที่ $3 \le g \le 6$ และ $g - 1 \le 1$
พิจารณา

$$\binom{g+l}{g-1}-\binom{g+l}{g-2} = \frac{(g+l)!}{(g-1)!(l+1)!}-\frac{(g+l)!}{(g-2)!(l+2)!}$$

$$= \frac{(g+l)!}{(g-1)!(l+2)!}\left[(l+2)-(g-1)\right]$$

$$= \frac{(g+l)!}{(g-1)!(l+2)!}\left[(l+3)-g\right] > 0$$

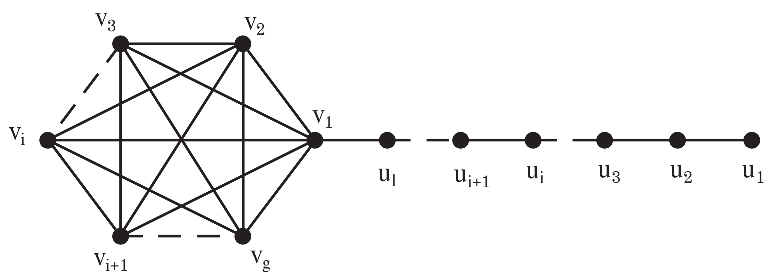
ทฤษฎีบท 3 สำหรับแต่ละจำนวนนับ g,l ที่ $3 \leq g \leq 6$ และ $g - 1 \leq 1$ กราฟลอลลิพอพ $H_{g,l}$ เป็นกราฟการจัดหมู่

การพิสูจน์ ให้ $H_{g,l}$ โดย $3 \leq g \leq 6$ และ $g - 1 \leq 1$ เป็นกราฟลอลลิพอพที่ประกอบไปด้วยกราฟบริบูรณ์ K_g และวิถี P_l

กำหนด $u_1, u_2, \ldots, u_l$ เป็นจุดยอดที่อยู่บนวิถี P_l โดย u_1 คือจุดปลายของกราฟ และ $u_i +1$ ประชิดกับ u_i โดย $1 \leq i \leq l$

$v_1, v_2, \ldots, v_g$ เป็นจุดยอดที่อยู่บนกราฟ K_g โดย v_1 คือจุดยอดที่ประชิดกับจุดยอด u_l และ v_{i+1} ประชิดกับ v_i โดย $1 \leq i \leq g$

แสดงได้ดังนี้



รูปที่ 10 กราฟลอลลิพอพ $H_{g,l}$

ให้ $f: V \longrightarrow \{1, 2, 3, \ldots, g + l\}$ กำหนดโดย

$$f(u_i) = i \qquad ; 1 \leq i \leq l$$

$$f(v_i) = l + i \qquad ; 1 \leq i \leq g$$

ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก V ไปทั่วถึง $\{1, 2, 3, \ldots, g + l\}$

นั่นคือ f เป็นการกำหนดชื่อจุดยอดของกราฟ $H_{g,l}$

ให้ $f^c: E \longrightarrow N$ (เป็นการกำหนดชื่อเชิงการจัดของกราฟ $H_{g,l}$ กำหนดโดย

$$f^c(u_i u_{i+1}) = \binom{f(u_{i+1})}{f(u_i)} = \binom{i+1}{i} = i+1 \; ; 1 \leq i \leq l-1$$

$$f^c(v_1 u_l) = \binom{f(v_1)}{f(u_l)} = \binom{l+1}{l} = l+1$$

$$f^c(v_i v_j) = \binom{l+j}{l+i} \qquad ; 1 \leq i \leq g-1, i < j \leq g$$

จากการกำหนดชื่อเชิงการจัดข้างต้น สามารถนำค่าที่ได้มาเขียนเรียงลำดับได้ ดังนี้

$$\left\{f^c\left(u_iu_{i+1}\right)\right\}_{i=1}^{l-1} = \left\{2,3,\ldots,l\right\}$$

$$\left\{f^c\left(v_1u_l\right)\right\} = \left\{l+1\right\}$$

$$\left\{f^c\left(v_iv_j\right)\right\}_{i=1}^{g-1} = \left\{\begin{matrix}\binom{l+2}{l+1},\binom{l+3}{l+1},\ldots,\binom{l+g}{l+1},\binom{l+3}{l+2},\ldots,\binom{l+g}{l+2}, \\ \binom{l+4}{l+3},\ldots,\binom{l+g}{l+3},\binom{l+5}{l+4},\ldots,\binom{l+g}{l+g-2},\binom{l+g}{l+g-1}\end{matrix}\right\}$$

พบว่า $\left\{f^c\left(v_iv_j\right)\right\}$ สามารถจัดรูปใหม่ได้ คือ

$$\left\{l+2,l+3,\ldots,l+g,\binom{l+3}{2},\ldots,\binom{l+g}{2},\binom{l+4}{3},\ldots,\binom{l+g}{3},\binom{l+5}{4},\ldots,\binom{l+g}{g-2},\binom{l+g}{g-1}\right\}$$

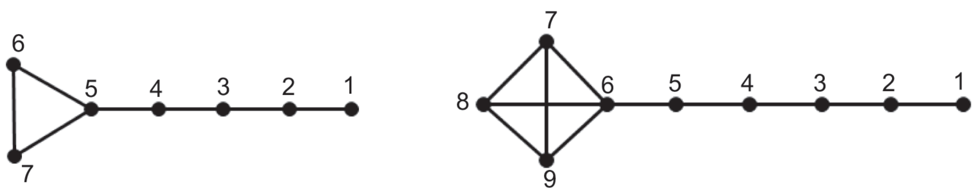
สามารถเรียงลำดับการกำหนดชื่อเชิงการจัด โดยบทตั้ง 8 บทตั้ง 13 บทตั้ง 14 บทตั้ง 15 และบทตั้ง 16 ได้ว่า

$$\left\{\begin{matrix}2,3,\ldots,l,l+1,l+2,l+3,\ldots,l+g,\binom{l+3}{2},\ldots,\binom{l+g}{2},\binom{l+4}{3},\ldots,\binom{l+g}{3}, \\ \binom{l+5}{4},\ldots,\binom{l+g}{g-2},\binom{l+g}{g-1}\end{matrix}\right\}$$

เป็นลำดับเพิ่ม

ดังนั้น f^c เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง นั่นคือ f^c เป็นการกำหนดชื่อเชิงการจัดที่เหมาะสม

ดังนั้น $H_{g,l}$ เป็นกราฟการจัดหมู่ เมื่อ $3 \le g \le 6$ และ $g-1 \le 1$ โดย g,l เป็นจำนวนนับ



รูปที่ 11 การกำหนดชื่อจุดยอดที่ทำให้ $H_{3,4}$ และ $H_{4,5}$ เป็นกราฟการจัดหมู่

สรุปและวิจารณ์ผลการทดลอง

จากผลการศึกษาพบว่า กราฟพีเตอร์เซนทั่วไป *GP(n,* 3*)* และ กราฟลอลลิพอพ $H_{g,l}$ เมื่อ $3 \leq g \leq 6$ และ $g - 1 \leq l$ เป็นกราฟการจัดหมู่ ซึ่งสำหรับผู้ที่สนใจสามารถนำแนวคิดข้างต้นไปพิจารณากราฟแบบอื่นว่าเป็นกราฟการจัดหมู่หรือไม่ หรืออาจศึกษาวิธีการกำหนดชื่อจุดยอดและเส้นของกราฟวิธีอื่นๆ

กิตติกรรมประกาศ

บทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากโครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสวท.) ศูนย์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

เอกสารอ้างอิง

1. Hedge, S. M., and Shetty, S. 2006. Combinatorial Labelings of Graphs. *Applied Mathematics E-notes.* 6: 251-258.
2. Li, P. C. 2012. Combination Labelings of Graphs. *Applied Mathematics E-notes.* 12: 158-168.
3. Chartrand, G., and Zhang, P. 2005. Introduction to Graph Theory. New York. McGraw-Hill Companies, Inc.
4. Guichard, D. 2017. An Introduction to Combinatorics and Graph Theory. San Francisco. The Creative Commons Attribution-Non Comercial-ShareAlike 3.0.
5. Saražina, M.L., Paccob, W., and Previtalic, A. 2007. Generalizing the generalized Petersen Graphs. *Discrete Mathematics.* 307: 534 – 543.
6. Wang, J., and Shi, S. 2012. The Line Graphs of Lollipop Graphs are Determined by their Spectra. *Linear Algebra and its Applications.* 436: 2630-2637.

ได้รับบทความวันที่ 1 พฤษภาคม 2560
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 5 กันยายน 2560