บทความวิจัย

ผลเฉลยที่เป็นไพรม์พีเรียด 4 และจุดสมดุลของระบบสมการเชิงผลต่าง $x_{n+1} = |x_n| - y_n - 2$ และ $y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1$ โดยเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 = 0$ และ $0 < y_0 < \frac{1}{2}$

วิโรจน์ ติ๊กจ๊ะ* ทรรศวรรณ วาทา ศศิประภา สุขมามอญ

และ ศิริเพชรก์ อินทรประพันธ์

บทคัดย่อ

บทความนี้ศึกษาผลเฉลยของระบบสมการเชิงผลต่างเชิงเส้นเป็นช่วงและหาผลเฉลยที่เป็นไพรม์พีเรียด 4 พร้อมทั้งจุดสมดุลของระบบสมการ $x_{n+1} = |x_n| - y_n - 2$ และ $y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1$ โดยเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 = 0$ และ $0 < y_0 < \frac{1}{2}$ จุดสมดุลของระบบสมการเชิงผลต่างดังกล่าวคือ (-1,0) หาได้จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์และการคำนวณโดยตรง และนอกจากนั้นระบบสมการดังกล่าวมีผลเฉลยที่เป็นไพรม์พีเรียด 4 และเราพิสูจน์ว่าผลเฉลยของระบบสมการที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นดังกล่าวเป็นไพรม์พีเรียด 4 หรือจุดสมดุลในที่สุดโดยการหาแบบรูปในรูปของจำนวนเต็มบวกและใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์

คำสำคัญ: สมการเชิงผลต่าง จุดสมดุล ผลเฉลยไพรม์พีเรียด

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม พิษณุโลก 65000

*ผู้นิพนธ์ประสานงาน e-mail: wirottik@psru.ac.th

Prime Period 4 and Equilibrium Solutions of a System of Difference Equations $x_{n+1} = |x_n| - y_n - 2$ and $y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1$ with Initial Conditions $x_0 = 0$ and $0 < y_0 < \frac{1}{2}$

Wirot Tikjha*, **Tatsawan Wata, Sasiprapa Sukmamorn, and Siriphet Intaraprapan**

ABSTRACT

The aim of this article is to study the solution of a piecewise linear system of difference equations, prime period 4 and equilibrium point of system $x_{n+1} = |x_n| - y_n - 2$ and $y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1$ with initial conditions $x_0 = 0$ and $0 < y_0 < \frac{1}{2}$. The equilibrium point of the system is (-1,0) which is obtained by computer program and some direct computations. Moreover there are prime period 4 solutions of the system. We prove that every solution with the initial condition is eventually prime period 4 solution or equilibrium point by finding the pattern of solution that involves positive integers. We prove the inductive statement by using the mathematical induction.

Keywords: Difference equation, Equilibrium point, Prime period solution

Faculty of Science and Technology, Pibulsongkram Rajabhat University, Phitsanulok 65000, Thailand.

*Corresponding author, email: wirottik@psru.ac.th

บทนำ

สมการเชิงผลต่างหรือฟังก์ชันเวียนเกิด (Recurrence relation) กล่าวถึงปรากฏการณ์ต่างๆ ภายใต้เวลา ซึ่งเป็นวิชาที่นักสร้างแบบจำลองทางวิยุตคณิตศาสตร์ (Discrete Mathematical Models) นำไปประยุกต์ได้หลากหลายเช่น แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ Neural networks [1] แบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์ [2] แบบจำลองทางประชากรศาสตร์ [3] และได้มีนำสมการเชิงผลต่างสร้างจำลองการควบคุมจำนวนยุง [4] นอกจากนี้ยังมีการนำสมการเชิงคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาอื่นๆ [5] เช่น ทางนิเวศวิทยา และระบาดวิทยาเป็นต้น

Devaney ([6, 7]) ได้ศึกษาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นเป็นช่วงของสมการเชิงผลต่างซึ่งเป็นที่รู้จักกันในชื่อของ ฟังก์ชันขนมปังขิง (Gingerbreadman map)

$$x_{n+1} = |x_n| - x_{n-1} + 1,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

สมการ (1) สมนัยกับระบบสมการเชิงเส้นเป็นช่วง

$$x_{n+1} = |x_n| - y_n + 1, y_{n+1} = x_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

จากการกล่าวถึงใน Grove และคณะ [8] ได้ทราบว่า Gerasimos Ladas และทีมวิจัยได้ทำการศึกษาระบบสมการเชิงผลต่างและได้ตั้งให้เป็นปัญหาปลายเปิดโดยวางนัยโดยทั่วไปของระบบสมการ (2) ดังนี้

$$x_{n+1} = |x_n| + ay_n + b, y_{n+1} = x_n + c\,|y_n| + d,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

โดยที่เงื่อนไขเริ่มต้น $(x_0, y_0) \in R^2$ พารามิเตอร์ a,b,c และ d แต่ละจำนวนเป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ -1 ถึง 1 ทั้งนี้ได้มีผู้ที่ศึกษาหาผลเฉลยจากปัญหาปลายเปิด (3) เช่น Grove และคณะ [8] ได้ค้นพบว่าพฤติกรรมของผลเฉลยของระบบสมการเชิงผลต่าง

$$x_{n+1} = |x_n| - y_n - 1, y_{n+1} = x_n + |\mathrm{y}_n|,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

พบว่าทุกๆ ผลเฉลยของระบบสมการ (4) เป็นไพรม์พีเรียด 3 ในที่สุด Tikjha และคณะ [9] ได้ศึกษาระบบสมการเชิงผลต่าง

$$x_{n+1} = |x_n| - y_n - 2, y_{n+1} = x_n + |\mathrm{y}_n|,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

พบว่าทุกๆ ผลเฉลยของระบบสมการ (5) เป็นไพรม์พีเรียด 3 ในที่สุด

Krinket และ Tikjha [10] ได้ศึกษาพฤติกรรมของผลเฉลยของระบบสมการเชิงผลต่างที่เป็นกรณีเฉพาะของระบบสมการ (3) ได้แก่ระบบสมการ

$$x_{n+1} = |x_n| - y_n - 1, y_{n+1} = x_n - |\mathrm{y}_n| + 1,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0) เป็นจุดในบางบริเวณของ R^2 โดยที่ $y_0 \in (0,1) \cup \left(\frac{5}{4}, \infty\right)$ และ $x_0 = 0$ ทราบว่าทุกผลเฉลยของระบบสมการ (6) ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นดังกล่าวเป็นไพรม์พีเรียด 4 ในที่สุด

ผู้วิจัยสนใจที่จะวางนัยโดยทั่วไปของระบบสมการ (6) ได้แก่ระบบสมการ

$$x_{n+1} = |x_n| - y_n - b, y_{n+1} = x_n - |\mathrm{y}_n| + 1, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

เมื่อ b เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ในบทความนี้ต้องการศึกษาระบบสมการที่เป็นระบบสมการย่อยของระบบสมการ (7) โดยที่ $b = 2$ และมีเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0) เป็นจุดในบางบริเวณของ R^2 โดยที่ $x_0 = 0$ และ $y_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้เพื่อเป็นประโยชน์ทางวิชาการที่ได้ทราบพฤติกรรมโดยรวมของระบบสมการ (7) และอาจเป็นเครื่องมือให้นักคณิตศาสตร์นำไปใช้ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ต่อไป

วิธีทดลอง

ทำการสำรวจพฤติกรรมของระบบสมการ (7) โดยใช้คอมพิวเตอร์ในการสำรวจหาพฤติกรรมโดยวิธีการทำซ้ำ (iteration) และเปลี่ยนค่าเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0) เช่นเดียวกับบทความ [9] และ [10] เป็นค่าต่างๆ ที่มากพอที่จะสามารถคาดเดาพฤติกรรมของผลเฉลยโดยรวมได้ใน R^2 โดยที่ $x_0 = 0$ และ $y_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ จากนั้นนำผลจากการสำรวจมาสร้างข้อความคาดการณ์และทำการพิสูจน์ซึ่งการพิสูจน์จำเป็นต้องอาศัยบทนิยามใน [11] ที่สำคัญดังต่อไปนี้

สมการเชิงผลต่าง (difference equation) อันดับ $k + 1$ คือ สมการที่สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}), \ n = 0, 1, 2, ... \tag{8}$$

โดยที่ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจากเซต J^{k+1} ไปยัง J ซึ่งเซต J เป็นช่วงบนจำนวนจริงหรือยูเนียนของช่วงบนจำนวนจริงและ J อาจเป็นเซตไม่ต่อเนื่อง ผลเฉลย (solution) ของสมการเชิงผลต่าง (8) คือลำดับ $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงผลต่าง (8) สำหรับทุกๆ $n \geq 0$ เมื่อกำหนดให้เงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) $x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_0 \in J$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x_1 &= f\left(x_0,\ x_{-1},\ ...,\ x_{-k}\right) \\ x_2 &= f\left(x_1,\ x_0,\ ...,\ x_{-k+1}\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

และได้ว่า $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (8) สำหรับทุกๆ $n \geq -k$ และสำหรับแต่ละเงื่อนไขเริ่มต้นจะได้ผลเฉลย $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ มีเพียงชุดเดียว ผลเฉลยของสมการเชิงผลต่าง (8) ซึ่งเป็นค่าคงที่ ทุกๆ $n \geq -k$ ถูกเรียกว่า ผลเฉลยสมดุล (equilibrium solution) ของสมการ (8) ถ้า $x_n = \overline{x}$ เป็นผลเฉลยสมดุล สำหรับทุกๆ $n \geq -k$ แล้ว $\overline{x}$ จะถูกเรียกว่า จุดสมดุล (equilibrium point) ของสมการ (8) ผลเฉลย $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ ของสมการเชิงผลต่าง (8) จะถูกเรียกว่าเป็น คาบ p (periodic with period p) ถ้ามีจำนวนเต็ม $p \geq 1$ ซึ่ง

$$x_{n+p} = x_n \text{ สำหรับทุกๆ } n \geq -k \tag{9}$$

เห็นได้ชัดว่าจุดสมดุลเป็นคาบ p สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก p เราจะกล่าวว่า ผลเฉลยเป็น ไพรม์พีเรียด p (prime period p) ถ้า p เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (9) ในกรณีนี้เรียก p- อันดับ $(x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+p})$ ว่าเป็น วง p (p-cycle) ของสมการ (8) ผลเฉลย $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ ของระบบสมการ (8) อาจยังไม่เป็นสมาชิกของวงหรือเป็นไพร์มพีเรียดตั้งแต่แรกหากทำการทำซ้ำผลเฉลยจนทำให้ผล

เฉลยอยู่ในวงหรือผลเฉลยเป็นไพร์มพีเรียด ผลเฉลยดังกล่าวถูกเรียกว่าคาบ p ในที่สุด นั่นคือมีจำนวนเต็ม $N \geq -k$ ซึ่ง $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ เป็นคาบ p ได้แก่ $x_{n+p} = x_n$ สำหรับทุกๆ $n \geq N$

กำหนดให้ $\begin{pmatrix} x_0, y_0 \\ x_1, y_1 \\ x_2, y_2 \\ x_3, y_3 \end{pmatrix}$ หมายถึง วง 4 ของระบบสมการที่ประกอบด้วยจุด (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) และ (x_3, y_3) และได้ว่า $(x_4, y_4) = (x_0, y_0)$, $(x_5, y_5) = (x_1, y_1)$, $(x_6, y_6) = (x_2, y_2)$, $(x_7, y_7) = (x_3, y_3)$, $(x_8, y_8) = (x_0, y_0)$, ...

ผลการทดลอง

เราจะศึกษาระบบสมการเชิงผลต่างเชิงเส้นเป็นช่วง

$$\begin{cases} x_{n+1} = |x_n| - y_n - 2 \\ y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1 \end{cases}, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

โดยเริ่มที่เงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 = 0$ และ $y_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ซึ่งเราได้จุดสมดุลของระบบสมการ (10) คือจุด (-1,0) ซึ่งจุดสมดุลหาได้จากการแก้ระบบสมการ

$$\bar{x} = |\bar{x}| - \bar{y} - 2$$
$$\bar{y} = \bar{x} - |\bar{y}| + 1$$

โดยทำการพิจารณากรณีที่ $(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นจุดในจตุภาคทั้ง 4 และได้วงของระบบสมการ (10) ดังนี้

$$P_{4.1} = \begin{pmatrix} -5 & , -2 \\ 5 & , -6 \\ 9 & , \ 0 \\ 7 & , \ 10 \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad P_{4.2} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{3}, & \frac{2}{3} \\ -1, & \frac{-4}{3} \\ \frac{1}{3}, & \frac{-4}{3} \\ \frac{-1}{3}, & 0 \end{pmatrix}$$

สมาชิกในวง $P_{4.1}$ หาได้จากการแทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้น $(x_0, y_0) = (0, 0)$ แล้วได้ว่า $(x_{10}, y_{10}) = (-5, -2)$ ส่วนวง $P_{4.2}$ หาได้จาก $(x_0, y_0) = \left(0, \frac{1}{3}\right)$ เมื่อ $\frac{1}{3}$ เป็นลิมิตของลำดับของขอบเขตของช่วงในทฤษฎีบทซึ่งจะกล่าวถึงภายหลัง

บทตั้ง 1 กำหนดให้ $\left\{(x_n, y_n)\right\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (10) สมมติให้มีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $y_N = -x_N - 1 < 0$ จะได้ว่า ถ้า $x_N \leq 0$ แล้ว $(x_{N+1}, y_{N+1}) = (1,0)$

พิสูจน์ กำหนดให้ $x_N \leq 0$ ดังนั้น

$$x_{N+1} = |x_N| - y_N - 2 = -x_N - (-x_N - 1) - 2 = -1$$

$$y_{N+1} = x_N - |y_N| + 1 = x_N + (-x_N - 1) + 1 = 0$$

ดังนั้น $(x_{N+1}, y_{N+1}) = (-1,0)$

บทตั้ง 2 กำหนดให้ $\left\{(x_n, y_n)\right\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (10) สมมติให้มีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $y_N = x_N + 3$ และถ้า $x_N \geq 0$ จะได้ว่า $(x_{N+1}, y_{N+1}) = (-5,-2)$

พิสูจน์ กำหนดให้ $x_N \geq 0$ ดังนั้น

$$x_{N+1} = |x_N| - y_N - 2 = x_N - (x_N + 3) - 2 = -5$$

$$y_{N+1} = x_N - |y_N| + 1 = x_N - (x_N + 3) + 1 = -2$$

ดังนั้น $(x_{N+1}, y_{N+1}) = (-5,-2)$

ทฤษฎีบท กำหนดให้ $\left\{(x_n, y_n)\right\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (10) และ $l = \left\{(x, y) \middle| x = 0, 0 < y < \frac{1}{2}\right\}$ จะได้ว่าผลเฉลยของระบบสมการ (10) ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้น $(x_0, y_0) \in l$ เป็นไพรม์พีเรียด 4 หรือจุดสมดุลในที่สุด

พิสูจน์ ให้ $(x_0, y_0) \in l$ จะได้ว่า $x_0 = 0$ และ $0 < y_0 < \frac{1}{2}$

$$x_1 = |x_0| - y_0 - 2 = -y_0 - 2 < 0, y_1 = x_0 - |y_0| + 1 = -y_0 + 1 \geq 0$$

$$x_2 = |x_1| - y_1 - 2 = 2y_0 - 1 < 0, y_2 = x_1 - |y_1| + 1 = -2$$

$$x_3 = |x_2| - y_2 - 2 = -2y_0 + 1 > 0, y_3 = x_2 - |y_2| + 1 = 2y_0 - 2 < 0$$

$$x_4 = |x_3| - y_3 - 2 = -4y_0 + 1, y_4 = x_3 = |y_3| + 1 = 0$$

กรณี 1 ถ้า $y_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$ แล้ว $x_4 \geq 0$ จะได้ว่า

$$x_5 = |x_4| - y_4 - 2 = -4y_0 - 1 \leq 0, y_5 = x_4 - |y_4| + 1 = -4y_0 + 2 > 0$$

$$x_6 = |x_5| - y_5 - 2 = 8y_0 - 3 < 0, y_6 = x_5 - |y_5| + 1 = -2$$

$$x_7 = |x_6| - y_6 - 2 = -8y_0 + 3 > 0, y_7 = x_6 - |y_6| + 1 = 8y_0 - 4 < 0$$

$$x_8 = |x_7| - y_7 - 2 = -16y_0 + 5 > 0, y_8 = x_7 - |y_7| + 1 = 0$$

$$x_9 = |x_8| - y_8 - 2 = -16y_0 + 3, y_9 = x_8 - |y_8| + 1 = -16y_0 + 6 > 0$$

กรณี 1.1 ถ้า $y_0 \in \left(0, \frac{3}{16}\right]$ แล้ว $x_9 \geq 0$ โดยบทตั้ง 2 จะได้ว่า $(x_{10}, y_{10}) = (-5, -2) \in P_{4.1}$

กรณี 1.2 ถ้า $y_0 \in \left(\frac{3}{16}, \frac{1}{4}\right]$ แล้ว $x_9 < 0$ และได้ว่า

$$x_{10} = |x_9| - y_9 - 2 = 32y_0 - 11 < 0, y_{10} = x_9 - |y_9| + 1 = -2$$
$$x_{11} = |x_{10}| - y_{10} - 2 = -32y_0 + 11 > 0, y_{11} = x_{10} - |y_{10}| + 1 = 32y_0 - 12 < 0$$
$$x_{12} = |x_{11}| - y_{11} - 2 = -64y_0 + 21 > 0, y_{12} = x_{11} - |y_{11}| + 1 = 0$$
$$x_{13} = |x_{12}| - y_{12} - 2 = -64y_0 + 19 > 0, y_{13} = x_{12} - |y_{12}| + 1 = -64y_0 + 22 > 0$$
$$x_{14} = |x_{13}| - y_{13} - 2 = -5, y_{14} = x_{13} - |y_{13}| + 1 = -2$$

นั่นคือ $(x_{14}, y_{14}) = (-5, -2) \in P_{4.1}$

กรณี 2 ถ้า $y_0 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ แล้ว $x_4 < 0$ เราจะแสดงว่า สำหรับ $y_0 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ จะได้ว่าผลเฉลยของระบบสมการเป็นไพรม์พีเรียด 4 หรือจุดสมดุลในที่สุด โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 1$ กำหนดให้ $l_n = \frac{2^{2n} - 1}{3 \cdot 2^{2n}}$, $u_n = \frac{2^{2n-1} + 1}{3 \cdot 2^{2n-1}}$, $c_n = \frac{2^{2(n+2)} - 7}{3 \cdot 2^{2(n+2)}}$, $\delta_n = \frac{2^{2n} + 5}{3}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ " สำหรับ $y_0 \in (l_n, u_n)$ จะได้ว่า

$$x_{4n+1} = 2^{2n} y_0 - \delta_n < 0 \quad \text{และ } y_{4n+1} = -2^{2n} y_0 + (\delta_n - 1) > 0$$
$$x_{4n+2} = -1 \quad \text{และ } y_{4n+2} = 2^{2n+1} y_0 - 2\delta_n + 2 < 0$$
$$x_{4n+3} = -2^{2n+1} y_0 + 2\delta_n - 3 \quad \text{และ } y_{4n+3} = 2^{2n+1} y_0 - 2\delta_n + 2 < 0$$

ถ้า $y_0 \in [u_{n+1}, u_n)$ แล้ว $x_{4n+3} \leq 0$ จะได้ว่า $(x_{4n+4}, y_{4n+4}) = (-1, 0)$ ซึ่งเป็นจุดสมดุล

ถ้า $y_0 \in (l_n, u_{n+1})$ แล้ว $x_{4n+3} > 0$ จะได้ว่า

$$x_{4n+4} = -2^{2n+2} y_0 + 4\delta_n - 7 \quad \text{และ } y_{4n+4} = 0$$

ถ้า $y_0 \in (l_n, l_{n+1}]$ แล้ว $x_{4n+4} \geq 0$ จะได้ว่า

$$x_{4n+5} = -2^{2n+2} y_0 + 4\delta_n - 9 < 0 \quad \text{และ } y_{4n+5} = -2^{2n+2} y_0 + 4\delta_n - 6 > 0$$
$$x_{4n+6} = 2^{2n+3} y_0 - 8\delta_n + 13 < 0 \quad \text{และ } y_{4n+6} = -2$$
$$x_{4n+7} = -2^{2n+3} y_0 + 8\delta_n - 13 > 0 \quad \text{และ } y_{4n+7} = 2^{2n+3} y_0 - 8\delta_n + 12 < 0$$
$$x_{4n+8} = -2^{2n+4} y_0 + 16\delta_n - 27 > 0 \quad \text{และ } y_{4n+8} = 0$$
$$x_{4n+9} = -2^{2n+4} y_0 + 16\delta_n - 29 \quad \text{และ } y_{4n+9} = -2^{2n+4} y_0 + 16\delta_n - 26 > 0$$

ถ้า $y_0 \in (l_n, c_n]$ แล้ว $x_{4n+9} \geq 0$ จะได้ว่า $(x_{4n+10}, y_{4n+10}) = (-5,-2) \in P_{4.1}$

ถ้า $y_0 \in (c_n, l_{n+1}]$ แล้ว $x_{4n+9} < 0$ จะได้ว่า

$x_{4n+10} = 2^{2n+5} y_0 - 32\delta_n + 53 < 0$ และ $y_{4n+10} = -2$

$x_{4n+11} = -2^{2n+5} y_0 + 32\delta_n - 53 > 0$ และ $y_{4n+11} = 2^{2n+5} y_0 - 32\delta_n + 52 < 0$

$x_{4n+12} = -2^{2n+6} y_0 + 64\delta_n - 107 > 0$ และ $y_{4n+12} = 0$

$x_{4n+13} = -2^{2n+6} y_0 + 64\delta_n - 109 > 0$ และ $y_{4n+13} = -2^{2n+6} y_0 + 64\delta_n - 106 > 0$

$x_{4n+14} = -5$ และ $y_{4n+14} = -2$ นั่นคือ $(x_{4n+14}, y_{4n+14}) = (-5,-2) \in P_{4.1}$

ถ้า $y_0 \in (l_{n+1}, u_{n+1})$ แล้ว $x_{4n+4} = -2^{2n+2} y_0 + 4\delta_n - 7 < 0$"

1. จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริงสำหรับ $y_0 \in (l_1, u_1) = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ และ $\delta_1 = 3$

พิจารณา $x_{4(1)+1} = x_5 = 4y_0 - 3 = 2^{2(1)} y_0 - \delta_1 < 0$ และ

$y_{4(1)+1} = y_5 = -4y_0 + 2 = -2^{2(1)} y_0 + (\delta_1 - 1) > 0$

$x_{4(1)+2} = x_6 = -1$ และ

$y_{4(1)+2} = y_6 = 8y_0 - 4 = 2^{2(1)+1} y_0 - 2\delta_1 + 2 < 0$

$x_{4(1)+3} = x_7 = -8y_0 + 3 = -2^{2(1)+1} y_0 + 2\delta_1 - 3$ และ

$y_{4(1)+3} = y_7 = 8y_0 - 4 = 2^{2(1)+1} y_0 - 2\delta_1 + 2 < 0$

ถ้า $y_0 \in [u_{1+1}, u_1) = [u_2, u_1) = \left[\dfrac{3}{8}, \dfrac{1}{2}\right)$ แล้ว $x_{4(1)+3} \leq 0$ โดยบทตั้ง 1 $(x_{4(1)+4}, y_{4(1)+4}) = (-1, 0)$

ถ้า $y_0 \in (l_1, u_{1+1}) = (l_1, u_2) = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{8}\right)$ แล้ว $x_{4(1)+3} > 0$ จะได้ว่า

$x_{4(1)+4} = x_8 = -16y_0 + 5 = -2^{2(1)+2} y_0 + 4\delta_1 - 7$ และ $y_{4(1)+4} = 0$

ถ้า $y_0 \in (l_1, l_{1+1}] = (l_1, l_2] = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{5}{16}\right]$ และ $x_{4(1)+4} = -16y_0 + 5 \geq 0$ จะได้ว่า

$x_{4(1)+5} = x_9 = -16y_0 + 3 = -2^{2(1)+2} y_0 + 4\delta_1 - 9 < 0$ และ

$y_{4(1)+5} = y_9 = -16y_0 + 6 = -2^{2(1)+2} y_0 + 4\delta_1 - 6 > 0$

$x_{4(1)+6} = x_{10} = 32y_0 - 11 = 2^{2(1)+3} y_0 - 8\delta_1 + 13 < 0$ และ $y_{4(1)+6} = y_{10} = -2$

$x_{4(1)+7} = x_{11} = -32y_0 + 11 = -2^{2(1)+3} y_0 + 8\delta_1 - 13 > 0$ และ

$y_{4(1)+7} = y_{11} = 32y_0 - 12 = 2^{2(1)+3} y_0 - 8\delta_1 + 12 < 0$

$x_{4(1)+8} = x_{12} = -64y_0 + 21 = -2^{2(1)+4} y_0 + 16\delta_1 - 27 > 0$ และ $y_{4(1)+8} = y_{12} = 0$

$x_{4(1)+9} = x_{13} = -64y_0 + 19 = -2^{2(1)+4} y_0 + 16\delta_1 - 29$ และ

$$y_{4(1)+9} = y_{13} = -64y_0 + 22 = -2^{2(1)+4}y_0 + 16\delta_1 - 26 > 0$$

ถ้า $y_0 \in (l_1, c_1] = \left(\frac{1}{4}, \frac{19}{64}\right]$ แล้ว $x_{4(1)+9} \geq 0$ โดยบทตั้ง 2 จะได้ว่า $\left(x_{4(1)+10}, y_{4(1)+10}\right) = (-5,-2) \in P_{4.1}$

ถ้า $y_0 \in (c_1, l_{1+1}] = (c_1, l_2] = \left(\frac{19}{64}, \frac{5}{16}\right]$ แล้ว $x_{4(1)+9} < 0$ จะได้ว่า

$$x_{4(1)+10} = x_{14} = 128y_0 - 43 = 2^{2(1)+5}y_0 - 32\delta_1 + 53 < 0 \text{ และ } y_{4(1)+10} = y_{14} = -2$$

$$x_{4(1)+11} = x_{15} = -128y_0 + 43 = -2^{2(1)+5}y_0 + 32\delta_1 - 53 > 0 \text{ และ}$$

$$y_{4(1)+11} = y_{15} = 128y_0 - 44 = 2^{2(1)+5}y_0 - 32\delta_1 + 52 < 0$$

$$x_{4(1)+12} = x_{16} = -256y_0 + 85 = -2^{2(1)+6}y_0 + 64\delta_1 - 107 > 0 \text{ และ } y_{4(1)+12} = y_{16} = 0$$

$$x_{4(1)+13} = x_{17} = -256y_0 + 83 = -2^{2(1)+6}y_0 + 64\delta_1 - 109 > 0$$

$$y_{4(1)+13} = y_{17} = -256y_0 + 86 = -2^{2(1)+6}y_0 + 64\delta_1 - 106 > 0$$

$$x_{4(1)+14} = x_{18} = -5 \text{ และ } y_{4(1)+14} = y_{18} = -2 \text{ นั่นคือ } \left(x_{4(1)+14}, y_{4(1)+14}\right) = (-5,-2) \in P_{4.1}$$

ถ้า $y_0 \in (l_1, c_1] = \left(\frac{1}{4}, \frac{19}{64}\right]$ แล้ว $x_{4(1)+9} \geq 0$ โดยบทตั้ง 2 จะได้ว่า $\left(x_{4(1)+10}, y_{4(1)+10}\right) = (-5,-2) \in P_{4.1}$

ถ้า $y_0 \in (c_1, l_{1+1}] = (c_1, l_2] = \left(\frac{19}{64}, \frac{5}{16}\right]$ แล้ว $x_{4(1)+9} < 0$ จะได้ว่า

$$x_{4(1)+10} = x_{14} = 128y_0 - 43 = 2^{2(1)+5}y_0 - 32\delta_1 + 53 < 0 \text{ และ } y_{4(1)+10} = y_{14} = -2$$

$$x_{4(1)+11} = x_{15} = -128y_0 + 43 = -2^{2(1)+5}y_0 + 32\delta_1 - 53 > 0 \text{ และ}$$

$$y_{4(1)+11} = y_{15} = 128y_0 - 44 = 2^{2(1)+5}y_0 - 32\delta_1 + 52 < 0$$

$$x_{4(1)+12} = x_{16} = -256y_0 + 85 = -2^{2(1)+6}y_0 + 64\delta_1 - 107 > 0 \text{ และ } y_{4(1)+12} = y_{16} = 0$$

$$x_{4(1)+13} = x_{17} = -256y_0 + 83 = -2^{2(1)+6}y_0 + 64\delta_1 - 109 > 0$$

$$y_{4(1)+13} = y_{17} = -256y_0 + 86 = -2^{2(1)+6}y_0 + 64\delta_1 - 106 > 0$$

$$x_{4(1)+14} = x_{18} = -5 \text{ และ } y_{4(1)+14} = y_{18} = -2 \text{ นั่นคือ } \left(x_{4(1)+14}, y_{4(1)+14}\right) = (-5,-2) \in P_{4.1}$$

ถ้า $y_0 \in (l_2, u_2) = \left(\frac{5}{16}, \frac{3}{8}\right)$ แล้ว $x_{4(1)+4} = -16y_0 + 5 < 0$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

2. สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริงเนื่องจาก $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$x_{4k+4} = -2^{2k+2}y_0 + 4\delta_k - 7 < 0$ และ $y_{4k+4} = 0$ ดังนั้น สำหรับ $y_0 \in (l_{k+1}, u_{k+1}) = \left(\frac{2^{2k+2}-1}{3\times 2^{2k+2}}, \frac{2^{2k+1}+1}{3\times 2^{2k+1}}\right)$

จะได้ว่า $x_{4(k+1)+1} = x_{4k+5} = |x_{4k+4}| - y_{4k+4} - 2 = 2^{2(k+1)}y_0 - 4\delta_k + 5 = 2^{2(k+1)}y_0 - \delta_{k+1} < 0$ และ

$$x_{4(k+1)+12} = x_{4k+16} = |x_{4k+15}| - y_{4k+15} - 2 = -2^{2k+8} y_0 + 64\delta_{k+1} - 107 > 0 \text{ และ}$$
$$y_{4(k+1)+12} = y_{4k+16} = x_{4k+15} - |y_{4k+15}| + 1 = 0$$
$$x_{4(k+1)+13} = x_{4k+17} = |x_{4k+16}| - y_{4k+16} - 2 = -2^{2k+8} y_0 + 64\delta_{k+1} - 109 > 0 \text{ และ}$$
$$y_{4(k+1)+13} = y_{4k+17} = x_{4k+16} - |y_{4k+16}| + 1 = -2^{2k+8} y_0 + 64\delta_{k+1} - 106 > 0$$
$$x_{4(k+1)+14} = x_{4k+18} = |x_{4k+17}| - y_{4k+17} - 2 = -5 \text{ และ}$$
$$y_{4(k+1)+14} = y_{4k+18} = x_{4k+17} - |y_{4k+17}| + 1 = -2 \text{ นั่นคือ } \left(x_{4(k+1)+14}, y_{4(k+1)+14}\right) = (-5,-2) \in P_{4.1}$$

ถ้า $y_0 \in (l_{k+1}, u_{k+1}) = \left(\dfrac{2^{2k+2}-1}{3\times 2^{2k+2}}, \dfrac{2^{2k+1}+1}{3\times 2^{2k+1}}\right)$ แล้ว $x_{4(k+1)+4} < 0$ นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริงโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สามารถสรุปได้ว่า $P(\mathrm{n})$ เป็นจริงสำหรับทุกๆ จำนวนเต็ม $n \geq 1$ จะเห็นได้ชัดว่า

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{3}$$

และถ้าให้เงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 = 0, y_0 = \dfrac{1}{3}$ ในระบบสมการ (10) จะได้ว่า $(x_8, y_8) = \left(-\dfrac{1}{3}, 0\right) \in P_{4.2}$ ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการ (10) เป็นไพรม์พีเรียด 4 หรือจุดสมดุลในที่สุด

สรุปและวิจารณ์ผลการทดลอง

จากการศึกษาพฤติกรรมของผลเฉลยของระบบสมการเชิงผลต่างเชิงเส้นเป็นช่วง (10) ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 = 0$ และ $y_0 \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ หากเลือกเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 = 0$ และ $y_0 > \dfrac{1}{3}$ ผลเฉลยของระบบสมการจะเป็นจุดสมดุล หากเลือกเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 = 0$ และ $y_0 < \dfrac{1}{3}$ ผลเฉลยของระบบสมการจะเป็นสมาชิกในวง $P_{4.1}$ ในที่สุดและหากเลือกเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 = 0$ และ $y_0 > \dfrac{1}{3}$ ผลเฉลยจะเป็นสมาชิก $P_{4.2}$ ในที่สุด จึงสามารถสรุปได้ว่าผลเฉลยไพรม์พีเรียด 4 หรือจุดสมดุลในที่สุด ซึ่งเป็นข้อสรุปที่แตกต่างจาก [10] ทำให้ทราบว่าการเปลี่ยนพารามิเตอร์ในระบบสมการ (7) มีผลต่อพฤติกรรมของผลเฉลย

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้เป็นส่วนหนึ่งของงานวิจัยที่ได้รับทุนสนับสนุนจากกองทุนพัฒนาการวิจัยและบริการจัดการงานวิจัย มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม และทุนพัฒนาศักยภาพในการทำงานวิจัยของอาจารย์รุ่นใหม่จากคณะกรรมการการอุดมศึกษา (สกอ.) สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.)

เอกสารอ้างอิง

1. Saibing, Q., Xinge, L., and Yanjun, S. 2015. New Approach to State Estimator for Discrete-time BAM neural networks withtime-varying delay. *Advances in Difference Equations:* doi 10.1186/s13662-015-0498-3.
2. Zhenhua, H., and Xiaokang, T. 2015. A New Discrete Economic Model Involving Generalized Fractal Derivative. *Advances in Difference Equations:* doi 10.1186/s13662-015-0416-8.
3. Özlem, A. G. 2015. Global and Local Stability Analysis in Anonlinear Discrete-time Population Model, *Advances in Difference Equations:* doi 10.1186/1687-1847-2014-299.
4. Awerbuch-Friedlander, T., Levins, R., Camouzis, E., Grove, E. A. and Ladas, G. 2008. A Non-Linear System of Difference Equations Linking Mosquitoes, Habitats and Community Interventions, Communications on *Applied Nonlinear Analysis.* 15: 77–88.
5. Kocic, V.L., and Ladas, G. 1993. Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications. Boston. Kluwer academic publishers. p. 75-132.
6. Barnsley, M.F., Devaney, R.L., Mandelbrot, B. B., Peitgen, H. O., Saupe, D., and Voss, R.F. 1991. The Science of Fractal Images. New York. Springer-Verlag.
7. Devanney, R.L. 1984. A Piecewise Linear Model of the Zones of Instability of an Area-preservingmap. *Physica.* 10D: 387-393.
8. Grove, E. A., Lapierre, E., and Tikjha, W. 2012. On the Global Character of $x_{n+1} = |x_n| - y_n - 1$ and $y_{n+1} = x_n + |y_n|$, *Cubo A Mathematica Journal.* 14: 111-152.
9. Tikjha, W., Jintanasonti, S., and Lenbury, Y. 2015. Periodic Behavior of Solutions of a Certain Piecewise Linear System of Difference Equations, *Thai Journal of Mathematics.* 13: 237–244.
10. Krinket, S., and Tikjha, W. 2015. Prime Period Solution of Cartain Piecewise Linear System of Difference Equation. Proceedings of the Pibulsongkram Research: 76-83. (in thai)
11. Grove, E.A. and Ladas, G. 2005. Periodicities in Nonlinear Difference Equations. New York. Chapman & Hall/CRC Press. p. 35-38.

ได้รับบทความวันที่ 11 พฤศจิกายน 2559
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 30 มิถุนายน 2560