บทความวิจัย

ตัวแบบ EOQ ที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่องและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ

คณินทร์ ธีรภาพโอฬาร* และ จตุภัทร เมฆพายัพ

บทคัดย่อ

Tersine [2] ได้หาตัวแบบ EOQ ที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าเป็นอนันต์และมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษโดยใช้วิธีแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ ในการศึกษาครั้งนี้เราใช้วิธีพีชคณิตที่นำเสนอโดย Grubbström [4] ปรับปรุงตัวแบบ EOQ ของ Tersine [2] โดยเปลี่ยนสมมุติฐานของอัตราการเพิ่มสินค้าแบบอนันต์เป็นแบบต่อเนื่อง และได้ยกตัวอย่างเพื่อแสดงการประยุกต์ใช้ตัวแบบ EOQ ที่ได้

คำสำคัญ: ตัวแบบ EOQ อัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่อง การลดราคาสินค้าแบบพิเศษ วิธีพีชคณิต

[1]ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา 20131

*ผู้นิพนธ์ประสานงาน, e-mail: kanint@buu.ac.th

The EOQ Model with Continuous Replenishment Rate and Special Sales Price

Kanint Teerapabolarn* **and Jatupat Mekparyup**

ABSTRACT

Tersine [2] derived the EOQ model with infinite replenishment rate and special sales price by using differential calculus. In this study, we use algebraic method proposed by Grubbström [4] to improve the EOQ of Tersine [2] by changing the assumption of infinite replenishment rate to be continuous replenishment rate, and a numerical example is provided to illustrate application of the model obtained.

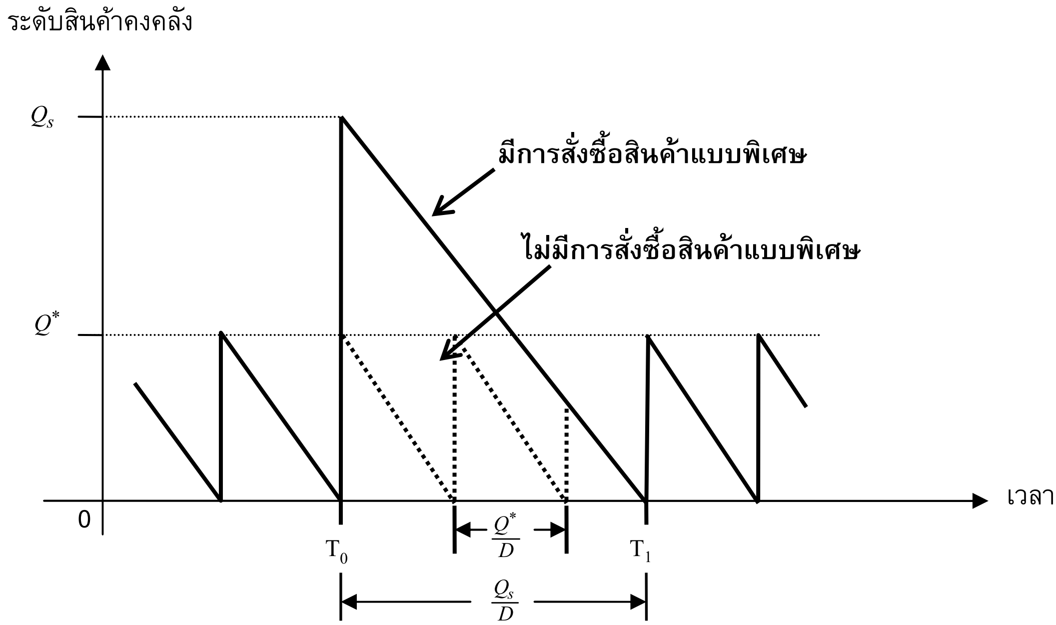
Keywords: EOQ model, continuous replenishment rate, special sales price, algebraic method.

Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University 20131

*Corresponding author, e-mail: kanint@buu.ac.th

บทนำ

ตั้งแต่ Harris [1] ได้ศึกษาระบบสินค้าคงคลัง (inventory system) ในรูปแบบของทฤษฎีสินค้าคงคลังที่เกี่ยวข้องกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) และได้นำเสนอที่มาของตัวแบบสินค้าคงคลังพื้นฐาน ตัวแบบแรก ซึ่งเรียกว่า ตัวแบบ EOQ (Economic Order Quantity) พื้นฐาน หรือเรียกว่า ตัวแบบ EOQ จากนั้นเป็นต้นมา ตัวแบบ EOQ ได้ใช้เป็นตัวแบบพื้นฐานในการพัฒนาเป็นตัวแบบ EOQ อื่นๆ อีกมากมาย (โดยการเพิ่มเงื่อนไขหรือสมมุติฐานให้สอดคล้องกับความเป็นจริงของระบบสินค้าคงคลังมากขึ้น) ตัวอย่างเช่น ตัวแบบ EOQ ที่มีสินค้าขาดแคลน ตัวแบบ EOQ ที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่อง ตัวแบบ EOQ ที่มีการลดราคาสินค้า และตัวแบบ EOQ ที่มีการขึ้นราคาสินค้า เป็นต้น นอกจากตัวแบบดังกล่าวแล้ว ตัวแบบ EOQ ที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ หรือตัวแบบ EOQ ที่มีการลดราคาสินค้าชั่วคราว เป็นตัวแบบ EOQ อีกตัวแบบหนึ่งที่น่าสนใจศึกษา ตัวแบบนี้ได้พัฒนาและนำเสนอโดย Tersine [2] ซึ่งพิจารณามาจากระบบสินค้าคงคลังพื้นฐานที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ สามารถแสดงการเปลี่ยนแปลงของสินค้าคงคลังได้ดังรูปที่ 1

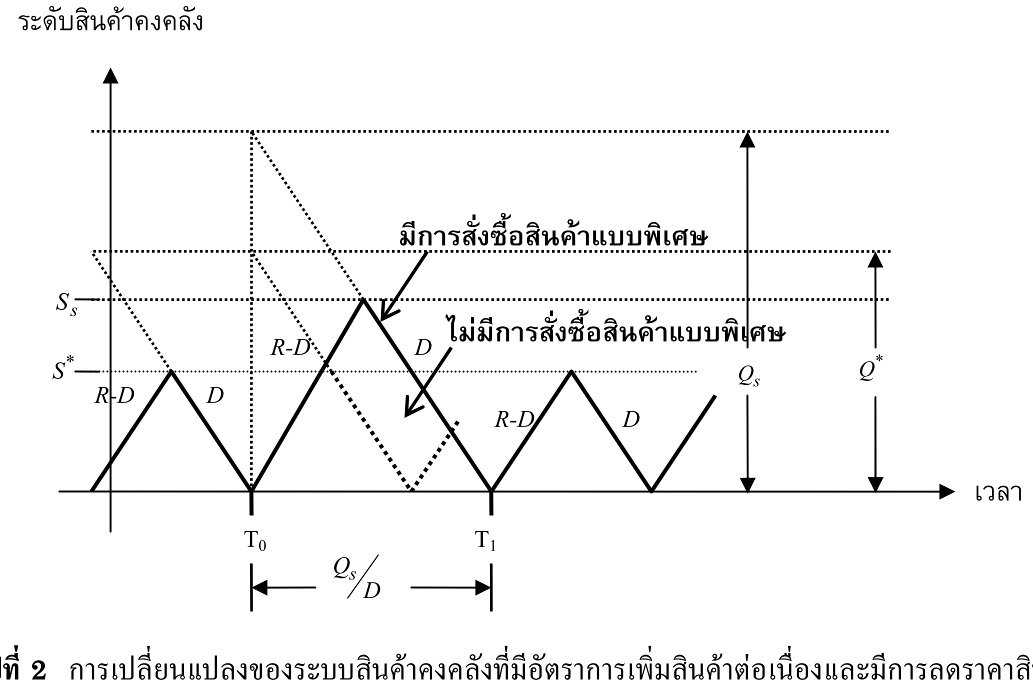


รูปที่ 1 การเปลี่ยนแปลงของสินค้าคงคลังที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ

โดยที่ Q_s คือ ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ Q^* คือ ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบปรกติเหมาะที่สุด (ก่อนและหลังที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ) D คือ อัตราความต้องการสินค้าต่อหน่วยเวลา T_0 คือ จุดเวลาที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ และ T_1 คือ จุดเวลาสุดท้ายของช่วงเวลาที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ ระบบสินค้าคงคลังนี้มีข้อสมมุติเบื้องต้นเกี่ยวกับราคาของสินค้าแตกต่างจากตัวแบบ EOQ เดิม กล่าวคือ ราคาของสินค้าจะไม่คงตัวหรือเท่ากันตลอดเวลา แต่จะมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ ณ จุดเวลา

หนึ่งที่ได้กำหนดไว้ เช่น สมมุติว่าในขณะนี้ราคาของสินค้าเท่ากับ c บาทต่อหน่วยสินค้า ต่อมาผู้จำหน่ายสินค้าได้ประกาศว่าจะมีการลดราคาสินค้าชั่วคราวในอีก 2 วันข้างหน้า โดยราคาของสินค้าจะลดลง k บาทต่อหน่วยสินค้า ทำให้ราคาชั่วคราวของสินค้าลดลงเป็น $c-k$ บาทต่อหน่วยสินค้า และเมื่อเลยจุดเวลาที่ได้ประกาศลดราคาสินค้าไปแล้ว ผู้จำหน่ายสินค้าจะกลับมาจำหน่ายสินค้าในราคา c บาทต่อหน่วยสินค้าเท่าเดิม ซึ่งจะเห็นว่าราคาของสินค้าที่กล่าวมานั้นมีราคาคงตัวในช่วงระยะเวลาหนึ่ง และอาจมีราคาลดลงอีกครั้งเมื่อถึงจุดเวลาที่ผู้จำหน่ายสินค้าได้กำหนด เนื่องจากราคาสินค้าที่มีการลดลงชั่วคราวนั้นอาจทำให้มีการสั่งซื้อสินค้าในปริมาณที่มากกว่าเดิม ดังนั้นปริมาณสินค้าที่สั่งซื้อจึงไม่คงตัวเท่ากันตลอดทุกช่วงเวลา และในการหาตัวแบบของปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด Tersine [2] ได้สร้างตัวแบบดังกล่าวโดยใช้วิธีแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ (differential calculus) ภายใต้เงื่อนไขที่ทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นได้สูงสุด ต่อมา Teerapabolarn และ Thornsri [3] ได้ใช้วิธีพีชคณิต (algebraic method) ที่นำเสนอโดย Grubbström [4] หาตัวแบบของปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดโดยไม่ต้องใช้แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์

ถึงแม้ว่าตัวแบบ EOQ ที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษสามารถประยุกต์ใช้ได้กับระบบสินค้าคงคลังพื้นฐานที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ ในบางครั้งการจัดส่งสินค้าของผู้จำหน่ายอาจไม่สามารถจัดส่งสินค้าทั้งหมดให้กับลูกค้าได้ทันทีภายในครั้งเดียว แต่อาจทยอยจัดส่งสินค้าอย่างต่อเนื่อง (continuous replenishment rate) ด้วยอัตราคงตัวจนครบตามปริมาณสินค้าที่ลูกค้าได้สั่งซื้อไว้ ดังนั้นในการศึกษาครั้งนี้เราจึงสนใจหาตัวแบบ EOQ ที่สอดคล้องกับระบบสินค้าคงคลังที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ แต่ในการจัดส่งสินค้าให้กับลูกค้าจะจัดส่งสินค้าอย่างต่อเนื่องด้วยอัตราคงตัวจนครบตามปริมาณสินค้าที่ลูกค้าได้สั่งซื้อไว้ สามารถแสดงการเปลี่ยนแปลงของสินค้าคงคลังได้ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 การเปลี่ยนแปลงของระบบสินค้าคงคลังที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่องและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ

โดยที่ Q_S, Q^*, D, T_0 และ T_1 มีความหมายเช่นเดียวกับในรูปที่ 1 S_s คือ ระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ S^* คือ ระดับสินค้าคงคลังสูงสุดแบบปรกติเหมาะที่สุด และ R คือ อัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่อง และวิธีที่ใช้หาตัวแบบ EOQ ที่ต้องการ คือ วิธีพีชคณิตเช่นเดียวกับที่ใช้ใน [3]

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อหาตัวแบบ EOQ ที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่องและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษโดยใช้วิธีพีชคณิต

สมมุติฐานของตัวแบบ (model assumption)

สมมุติฐานของตัวแบบ EOQ ที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่องและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษมีดังนี้

1. ความต้องการสินค้าต่อหน่วยเวลามีค่าคงตัว และทราบค่าแน่นอน
2. ระยะเวลาระหว่างการสั่งซื้อสินค้าจนได้รับสินค้า หรือช่วงเวลานำ (lead time) มีค่าเท่ากับศูนย์
3. การได้รับสินค้าที่สั่งซื้อจะไม่ได้รับทีเดียวทั้งหมดทันทีที่ได้สั่งซื้อ แต่จะได้รับสินค้าในอัตราคงตัวต่อเนื่องจนครบตามปริมาณที่สั่งซื้อหรือผลิตสินค้า
4. จะทำการสั่งซื้อสินค้าเมื่อระดับสินค้าคงคลังลดลงมาเท่ากับจุดสั่งซื้อหรือเท่ากับจุดที่กำหนด
5. ปริมาณสินค้าที่สั่งซื้อในแต่ละครั้งมีค่าไม่คงตัว
6. ราคาสินค้าต่อหน่วยไม่คงตัวตลอดเวลา
7. ระบบสินค้าคงคลังจะดำเนินไปเรื่อยๆ อย่างต่อเนื่องไม่สิ้นสุด
8. ไม่ยอมให้มีสินค้าขาดแคลน

สัญกรณ์ของตัวแบบ (model notation)

สัญกรณ์ของตัวแบบ EOQ ที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่องและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษกำหนดดังนี้

D แทน อัตราความต้องการสินค้าต่อหน่วยเวลา

A แทน ค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อสินค้าต่อครั้ง

c แทน ราคาสินค้าที่สั่งซื้อต่อหน่วยสินค้า

i แทน ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าที่แปรผันไปตามราคาสินค้า

k แทน ส่วนต่างของราคาสินค้าที่ลดลง

Q^* แทน ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบปรกติเหมาะที่สุด

S^* แทน ระดับสินค้าคงคลังสูงสุดแบบปรกติเหมาะที่สุด

S_s แทน ระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ

S_S^* แทน ระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด

Q_s แทน ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ
Q_s^* แทน ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด
C_s แทน ค่าใช้จ่ายรวมเมื่อมีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ
C_n แทน ค่าใช้จ่ายรวมที่เกิดขึ้นเมื่อไม่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ
G^* แทน ค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุดเมื่อมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ

วิธีดำเนินการศึกษา

การศึกษาครั้งนี้เป็นการหาตัวแบบ EOQ ที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่องและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษโดยใช้วิธีพีชคณิตมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ศึกษารายละเอียดของระบบสินค้าคงคลังที่มีการลดราคาสินค้าในหนังสือของ Tersine [2] และวิธีการที่ใช้หาตัวแบบ EOQ ในงานวิจัยของ Teerapabolarn และ Thornsri [3]

2. ใช้วิธีพีชคณิตหาผลเฉลยเหมาะที่สุดสำหรับตัวแบบ EOQ ที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่องและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ โดยจัดรูปแบบของค่าใช้จ่ายในระบบสินค้าคงคลังที่สนใจให้อยู่ในรูปแบบกำลังสอง (quadratic form) ของปริมาณการสั่งซื้อสินค้าที่ทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายได้สูงสุด ซึ่งวิธีที่ใช้หาตัวแบบ EOQ คือ วิธีพีชคณิตที่นำเสนอโดย Grubbström [4] ซึ่งหลักการของวิธีนี้มีดังนี้

ให้ a_1 และ a_2 เป็นจำนวนจริงบวก และ x เป็นตัวแปรตัดสินใจ จากนั้นจัดฟังก์ชัน a_1x^2-a_2x ให้อยู่ในรูปแบบกำลังสอง

$$a_1\left(x^2-\frac{2a_2x}{2a_1}+\left(\frac{a_2}{2a_1}\right)^2\right)-\frac{a_2^2}{4a_1}=a_1\left(x-\frac{a_2}{2a_1}\right)^2-\frac{a_2^2}{4a_1}$$

3. ยกตัวอย่างที่สอดคล้องกับตัวแบบ EOQ ที่หาได้ในขั้นตอนที่ 2 เพื่อแสดงการประยุกต์ผลลัพธ์ต่างๆ ที่ได้มา

ผลการศึกษา

ผลลัพธ์ที่เราต้องการหา คือ ปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดของระบบสินค้าคงคลังที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่องและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ หรือหาตัวแบบ EOQ ที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่องและมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษโดยใช้วิธีพีชคณิต ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1. ปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด คือ

$$Q_s^*=\frac{RD}{i(c-k)(R-D)}\left(\frac{2A}{Q^*}+k\right) \tag{1}$$

หน่วย ระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด คือ

$$S_s^*=\frac{D}{i(c-k)}\left(\frac{2A}{Q^*}+k\right) \tag{2}$$

หน่วย และค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุด คือ

$$G^* = \frac{A(c-k)}{c}\left(\frac{Q_s^*}{Q^*}-1\right)^2 \tag{3}$$

โดยที่ $Q^* = \sqrt{\frac{2ARD}{ic(R-D)}}$

พิสูจน์ พิจารณาระบบสินค้าคงคลังในรูปที่ 2 เมื่อราคาสินค้ามีการปรับลดลงชั่วคราวจาก c บาทต่อหน่วยสินค้า เป็น c-k บาทต่อหน่วยสินค้า ซึ่งการปรับราคาสินค้าลดลงจะเกิดขึ้น ณ จุดเวลา T_0 ซึ่งอาจมีหรือไม่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ และเมื่อเลยจุดเวลานี้ไปแล้วสินค้าก็จะมีราคา c บาทต่อหน่วยสินค้าเท่าเดิม จากรูปที่ 2 จะเห็นว่าก่อนถึงจุดเวลาลดราคาสินค้าแบบพิเศษและหลังการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ ณ จุดเวลา T_0 สามารถดำเนินการจัดหาสินค้าเหมาะที่สุดด้วยราคา c บาทต่อหน่วยสินค้าในปริมาณ

$$Q^* = \sqrt{\frac{2ARD}{ic(R-D)}} \tag{4}$$

หน่วย [2] ซึ่งเป็นปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบปรกติเหมาะที่สุด

ถ้ามีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ ณ จุดเวลา T_0 ในปริมาณ Q_s หน่วย ดังรูปที่ 2 ค่าใช้จ่ายรวมในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 สามารถพิจารณาได้ดังนี้

ค่าใช้จ่ายที่เกิดจากการสั่งซื้อสินค้าในปริมาณ Q_s มีค่าเท่ากับ

$$A + (c\text{-}k)Q_s$$

ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาที่แปรไปตามราคาสินค้าสามารถพิจารณาได้เป็นสองช่วงเวลา คือ ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าในช่วงเวลา T_0 ถึง $\frac{S_s}{R-D}$ และค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าในช่วงเวลา $\frac{S_s}{D}$ ถึง T_1 ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}
i(c-k)\int_0^{\frac{S_s}{R-D}}(R-D)x\,dx + i(c-k)\int_0^{\frac{S_s}{D}}(S_s-Dx)\,dx &= i(c-k)\left[\frac{(R-D)x^2}{2}\right]_0^{\frac{S_s}{R-D}} + i(c-k)\left[S_s x - \frac{Dx^2}{2}\right]_0^{\frac{S_s}{D}} \\
&= i(c-k)\left[\frac{S_s^2}{2(R-D)}\right] + i(c-k)\left[\frac{S_s^2}{2D}\right] \\
&= i(c-k)\left[\frac{RS_s^2}{2(R-D)D}\right]
\end{aligned} \tag{5}$$

จากรูปที่ 2 จะเห็นได้ว่า $\frac{Q_s}{D} = \frac{S_s}{R-D} + \frac{S_s}{D}$ ดังนั้น

$$S_s = \frac{Q_s(R-D)}{R} \tag{6}$$

แทน S_s ในสมการ (5) จะได้ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาที่แปรไปตามราคาสินค้ามีค่าเท่ากับ

$$i(c-k)\left[\frac{Q_s^2(R-D)}{2RD}\right]$$

ดังนั้นจะได้ค่าใช้จ่ายรวมเมื่อมีการสั่งซื้อแบบพิเศษที่จุดเวลา T_0 มีค่าเท่ากับ

$$C_s = A+(c-k)Q_s+i(c-k)\left[\frac{Q_s^2(R-D)}{2RD}\right] \tag{7}$$

ถ้าไม่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ แต่สั่งซื้อสินค้าแบบปรกติในปริมาณ Q^* หน่วย ณ จุดเวลา T_0 (พิจารณาเส้นปะในรูปที่ 2) ค่าใช้จ่ายรวมในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 สามารถหาได้ดังนี้

เนื่องจากปริมาณสินค้าที่สั่งซื้อในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 มีค่าเท่ากับ Q_s หน่วย แบ่งเป็นปริมาณสินค้า Q^* หน่วย ในราคา $c-k$ บาทต่อหน่วยสินค้า และปริมาณสินค้า (Q_s-Q^*) หน่วย ในราคา c บาทต่อหน่วยสินค้า และจำนวนครั้งในการสั่งซื้อมีค่าเท่ากับ $\frac{Q_s}{Q^*}$ ครั้ง ดังนั้นค่าใช้จ่ายต่างๆ ในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 มีดังนี้

ค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อสินค้าปริมาณ Q_s หน่วยมีค่าเท่ากับ

$$\frac{Q_s}{Q^*}A+(c-k)Q^*+c(Q_s-Q^*)$$

ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 ประกอบด้วยค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าในช่วงเวลา T_0 ถึง $\frac{S^*}{R-D}$ รวมกับค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าในช่วงเวลา $\frac{S^*}{D}$ ถึง T_1 ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\left(i(c-k)+\left(\frac{Q_s-Q^*}{Q^*}\right)ic\right)\left\{\int_0^{\frac{S^*}{R-D}}(R-D)x\,dx+\int_0^{\frac{S^*}{D}}(S^*-Dx)\,dx\right\}=\left(i(c-k)+\left(\frac{Q_s-Q^*}{Q^*}\right)ic\right)\left\{\left[\frac{(R-D)x^2}{2}\right]_0^{\frac{S^*}{R-D}}+\left[S^*x-\frac{Dx^2}{2}\right]_0^{\frac{S^*}{D}}\right\}$$

$$=\left(i(c-k)+\left(\frac{Q_s-Q^*}{Q^*}\right)ic\right)\left[\frac{R(S^*)^2}{2(R-D)D}\right] \tag{8}$$

แทนค่า $S^*=\frac{Q^*(R-D)}{R}$ ในสมการ (8) ทำให้ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 มีค่าเท่ากับ

$$\left(i(c-k)+\left(\frac{Q_s-Q^*}{Q^*}\right)ic\right)\left[\frac{(Q^*)^2(R-D)}{2RD}\right]$$

ดังนั้นจะได้ค่าใช้จ่ายรวมเมื่อไม่มีการสั่งซื้อแบบพิเศษในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 มีค่าเท่ากับ

$$C_n=\frac{Q_s}{Q^*}A+cQ_s-kQ^*+\left(ic\frac{Q_s}{Q^*}-ik\right)\left[\frac{(Q^*)^2(R-D)}{2RD}\right]$$

และค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้เมื่อมีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ

$$
\begin{aligned}
G &= C_n - C_s \\
&= \frac{Q_s}{Q^*}A + cQ - kQ^* + \left(ic\frac{Q_s}{Q^*} - ik\right)\left[\frac{(Q^*)^2(R-D)}{2RD}\right] - A - (c-k)Q - i(c-k)\left[\frac{Q_s^2(R-D)}{RD}\right] \\
&= \frac{Q_s}{Q^*}A - kQ^* + ic\frac{Q_sQ^*(R-D)}{2RD} - ik\left[\frac{(Q^*)^2(R-D)}{2RD}\right] - A + kQ_s - i(c-k)\left[\frac{Q_s^2(R-D)}{2RD}\right] \\
&= \frac{Q_s}{D}\left(\frac{AD}{Q^*} + ic\frac{Q^*(R-D)}{2R}\right) - kQ^* - ik\left[\frac{(Q^*)^2(R-D)}{2RD}\right] - A + kQ_s - i(c-k)\left[\frac{Q_s^2(R-D)}{2RD}\right]
\end{aligned}
$$

โดยใช้สมการ (4) จะทำให้ $\frac{AD}{Q^*} + ic\frac{Q^*(R-D)}{2R} = \frac{2AD}{Q^*}$ และจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
G &= \frac{2AQ_s}{Q^*} - kQ^* - ik\left[\frac{(Q^*)^2(R-D)}{2RD}\right] - A + kQ_s - i(c-k)\left[\frac{Q_s^2(R-D)}{2RD}\right] \\
&= -i(c-k)\left[\frac{Q_s^2(R-D)}{2RD}\right] + \left(\frac{2A}{Q^*} + k\right)Q_s - kQ^* - \frac{kA}{c} - A \\
&= -\frac{i(c-k)(R-D)}{2RD}\left\{Q_s^2 - \frac{2RD}{i(c-k)(R-D)}\left(\frac{2A}{Q^*} + k\right)Q_s\right\} - kQ^* - \frac{kA}{c} - A \\
&= -\frac{i(c-k)(R-D)}{2RD}\left[Q_s - \frac{RD}{i(c-k)(R-D)}\left(\frac{2A}{Q^*} + k\right)\right]^2 + \frac{RD}{2i(c-k)(R-D)}\left(\frac{2A}{Q^*} + k\right)^2 - kQ^* - \frac{kA}{c} - A \qquad (9)
\end{aligned}
$$

ซึ่ง G ในสมการ (9) จะมีค่าสูงสุดเมื่อ $Q_s = \frac{RD}{i(c-k)(R-D)}\left(\frac{2A}{Q^*} + k\right)$ ดังนั้นปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด คือ

$$
Q_s^* = \frac{RD}{i(c-k)(R-D)}\left(\frac{2A}{Q^*} + k\right)
$$

หน่วย แทนค่า $Q_s = \frac{RD}{i(c-k)(R-D)}\left(\frac{2A}{Q^*} + k\right)$ ในสมการ (6) และ (9) จะได้ระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด คือ

$$
S_s^* = \frac{D}{i(c-k)}\left(\frac{2A}{Q^*} + k\right)
$$

หน่วย และค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุดเมื่อมีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}
G^* &= \frac{RD}{2i(c-k)(R-D)}\left(\frac{2A}{Q^*}+k\right)^2 - kQ^* - \frac{kA}{c} - A \\
&= \frac{i(c-k)(R-D)(Q_s^*)^2}{2RD} + \frac{A(c-k)}{c} - kQ^* - 2A \\
&= \frac{A(c-k)}{c}\left(\frac{ic(R-D)(Q_s^*)^2}{2ARD}+1\right) - Q^*\left(\frac{2A}{Q^*}+k\right) \\
&= \frac{A(c-k)}{c}\left(\left(\frac{Q_s^*}{Q^*}\right)^2+1\right) - \frac{i(c-k)(R-D)}{RD}Q^*Q_s^* \\
&= \frac{A(c-k)}{c}\left(\left(\frac{Q_s^*}{Q^*}\right)^2 - \frac{ic(R-D)}{ARD}Q^*Q_s^*+1\right) \\
&= \frac{A(c-k)}{c}\left(\left(\frac{Q_s^*}{Q^*}\right)^2 - 2\frac{Q_s^*}{Q^*}+1\right) \\
&= \frac{A(c-k)}{c}\left(\frac{Q_s^*}{Q^*}-1\right)^2
\end{aligned}$$

ซึ่งทำให้เราได้สมการ (1), (2) และ (3) ตามต้องการ

หมายเหตุ 1. เนื่องจาก $Q_s^* = \frac{RD}{i(c-k)(R-D)}\left(\frac{2A}{Q^*}+k\right) = \frac{1}{c-k}\left(cQ^* + \frac{kRD}{i(R-D)}\right) > Q^*$ จะทำให้ $G^* > 0$ เสมอ ดังนั้นควรจะสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษในปริมาณ Q_s^* หน่วย เมื่อมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ จะทำให้สามารถประหยัดค่าใช้จ่ายได้สูงสุดเท่ากับ $\frac{A(c-k)}{c}\left(\frac{Q_s^*}{Q^*}-1\right)^2$

2. ถ้าอัตราการเพิ่มสินค้ามีค่าเป็นอนันต์ $(R \to \infty)$ จะได้ว่า $\frac{R}{R-D} \to 1$ แล้ว ตัวแบบ EOQ ในสมการ (1) และ ตัวแบบของ Tersine [2] จะเป็นตัวแบบเดียวกัน ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 1. ถ้า $(R \to \infty)$ แล้วปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด คือ

$$Q_s^* = \frac{D}{i(c-k)}\left(\frac{2A}{Q^*}+k\right) \tag{10}$$

หน่วย เมื่อ $Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{ic}}$ หน่วย และค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุด คือ

$$G^* = \frac{A(c-k)}{c}\left(\frac{Q_s^*}{Q^*}-1\right)^2 \tag{11}$$

ตัวอย่างการประยุกต์ใช้ผลการวิจัย

กำหนดให้ อัตราความต้องการสินค้า D = 20,000 หน่วยต่อปี ค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อสินค้า A = 2,800 บาทต่อครั้ง ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้า i = 15% ของราคาสินค้าต่อหน่วยต่อปี อัตราการเพิ่มสินค้า R = 50,000 หน่วยต่อปี ราคาปรกติของสินค้าที่สั่งซื้อ c = 15,500 บาทต่อหน่วยสินค้า ส่วนต่างของราคาที่ลดลง k = 1,000 บาทต่อหน่วยสินค้า

จากโจทย์หา Q^* จากสมการ

$$\begin{aligned} Q^* &= \sqrt{\frac{2ARD}{ic(R-D)}} \\ &= \sqrt{\frac{2(2,800)(50,000)(20,000)}{(0.15)(15,500)(30,000)}} \\ &= 283.3491 \text{ หน่วย} \end{aligned}$$

หา Q_s^* จากสมการ

$$\begin{aligned} Q_s^* &= \frac{RD}{i(c-k)(R-D)}\left(\frac{2A}{Q^*}+k\right) \\ &= \frac{(50,000)(20,000)}{(0.15)(14,500)(30,000)}\left(\frac{2(2,800)}{283.3491}+1,000\right) \\ &= 15,628.561 \text{ หน่วย} \end{aligned}$$

หา S_s^* จากสมการ

$$\begin{aligned} S_s^* &= \frac{D}{i(c-k)}\left(\frac{2A}{Q^*}+k\right) \\ &= \frac{(20,000)}{(0.15)(14,500)}\left(\frac{2(2,800)}{283.3491}+1,000\right) \\ &= 9,377.1366 \text{ หน่วย} \end{aligned}$$

จะหา G^* จากสมการ

$$\begin{aligned} G^* &= \frac{A(c-k)}{c}\left(\frac{Q_s^*}{Q^*}-1\right)^2 \\ &= \frac{(2,800)(14,500)}{15,500}\left(\frac{15,628.561}{283.3491}-1\right)^2 \\ &= 15,364,778.06 \text{ หน่วย} \end{aligned}$$

ดังนั้น ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดมีค่าเท่ากับ 15,628.561 หน่วย ระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดมีค่าเท่ากับ 9,377.1366 หน่วย ซึ่งทำให้สามารถประหยัดค่าใช้จ่ายได้สูงสุดเท่ากับ 15,364,778.06 บาท

สรุปผลการวิจัย

การศึกษาครั้งนี้ได้ปรับปรุงตัวแบบพื้นฐานของระบบสินค้าคงคลังที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษที่ปรากฏอยู่ใน [2] โดยปรับเปลี่ยนสมมุติฐานของอัตราการเพิ่มสินค้าแบบอนันต์เป็นอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่อง และได้ใช้วิธีพีชคณิตที่นำเสนอโดย Grubbstr?m [4] หาตัวแบบ EOQ ที่ต้องการ ภายใต้เงื่อนไขที่ทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นได้สูงสุด วิธีนี้สามารถหาตัวแบบได้จากการจัดรูปของค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นให้อยู่ในรูปแบบกำลังสอง ซึ่งคล้ายกับที่ใช้ใน [3] และในการศึกษาครั้งนี้ $Q_s^* = \dfrac{RD}{i(c-k)(R-D)}\left(\dfrac{2A}{Q^*}+k\right)$ คือ ตัวแบบ EOQ ที่ใช้หาปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด โดยมี $S_s^* = \dfrac{D}{i(c-k)}\left(\dfrac{2A}{Q^*}+k\right)$ คือระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด และ $G^* = \dfrac{A(c-k)}{c}\left(\dfrac{Q_s^*}{Q^*}-1\right)^2$ คือค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุด

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ที่ได้ให้เงินทุนวิจัย ประจำปีงบประมาณ 2558 เพื่อสนับสนุนงานวิจัยในครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

1. Harris, F. W. 1913. How Many Parts to Make at Once, Factory. *The Magazine of Management* 10: p. 135-136.
2. Tersine, R. J. 1994. *Principles of Inventory and Materials Management.* 4th Edition. New Jersey. Prentice-Hall. p. 117-120.
3. Teerapabolarn, K., and Thornsri, N. 2014. Determination of the EOQ Model with Special Sales Price by Algebraic Method. *Srinakharinwirot Science Journal* 30 (1): 193-207. (in Thai).
4. Grubbström, R. W. 1996. Material Requirements Planning and Manufacturing Resource Planning. *International Encyclopedia of Business and Management.* London. Routledge. p. 3410-3411.

ได้รับบทความวันที่ 23 มิถุนายน 2558
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 27 กรกฎาคม 2558