บทความวิจัย

สมบัติของเส้นออยเลอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

ภิญโญ มนูศิลป์[1]

บทคัดย่อ

บทความฉบับนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาสมบัติของเส้นออยเลอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส และศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจุดศูนย์กลางวงล้อม จุดเซนทรอยด์และจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสบนเส้นออยเลอร์ ผลการศึกษาพบว่า สมบัติของเส้นออยเลอร์เป็นจริงในรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส โดยที่จุดศูนย์กลางวงล้อม จุดเซนทรอยด์และจุดออร์โทเซนเตอร์อยู่ร่วมเส้นเดียวกันบนเส้นออยเลอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส และ พบว่าจุดทั้งสามมีความสัมพันธ์กัน โดยที่ระยะทางจากจุดศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดออร์โทเซนเตอร์ยาวเป็นสามเท่าของระยะทางจากจุดศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดเซนทรอยด์ ระยะทางจากจุดเซนทรอยด์ถึงจุดออร์โทเซนเตอร์ยาวเป็น 2/3 เท่าของระยะทางจากศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดออร์โทเซนเตอร์ และ ระยะทางจากจุดเซนทรอยด์ถึงจุดออร์โทเซนเตอร์ยาวเป็นสองเท่าของระยะทางจากจุดศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดเซนทรอยด์

คำสำคัญ: เส้นออยเลอร์ รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

[1] ภาควิชาวิทยาศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย

*ผู้นิพนธ์ประสานงาน, e-mail: manoosilp@yahoo.co.th

The Properties of Euler Line of Archimedes' Triangle

Pinyo Manoosilp[1]

ABSTRACT

The purposes of this article were to study the properties of Euler Line of Archimedes' Triangle and the relationship of the circumcenter, centroid and orthocenter of Archimedes' triangle. The results are : The circumcenter, centroid and orthocenter of Archimedes' triangle are collinear and the circumcenter, centroid and orthocenter of Archimedes' triangle are covariated with the distance of the circumcenter to orthocenter is 3 times as distance of the circumcenter to centroid, the distance from the centroid to orthocenter is 2/3 times as distance of the circumcenter to orthocenter and the distance of the centroid to orthocenter is twice times as distance of the circumcenter to centroid.

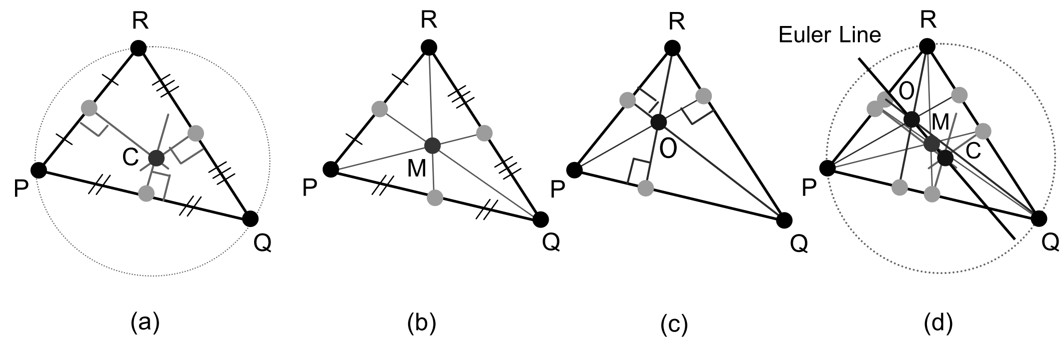
Keywords: Euler Line, Archimedes' triangle

[1] Department of Science Faculty of Science and Technology Loei Rajabhat University

[*] Corresponding author, email: manoosilp@yahoo.co.th

บทนำ

เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler : 1707-1783) นักคณิตศาสตร์ชาวสวิตเซอร์แลนด์ ถือเป็นบุคคลที่มีชื่อเสียงและมีผลงานที่สำคัญและมีคุณค่าต่อวงการคณิตศาสตร์ไว้มากมาย หนึ่งในผลงานที่ได้รับการกล่าวถึงคือการศึกษาเกี่ยวกับ เส้นออยเลอร์ (Euler Line) ซึ่งเป็นเส้นที่ลากผ่าน จุดศูนย์กลางวงล้อม (circumcenter) จุดเซนทรอยด์ (centroid) และ จุดออร์โทเซนเตอร์ (orthocenter) ของรูปสามเหลี่ยม [5]

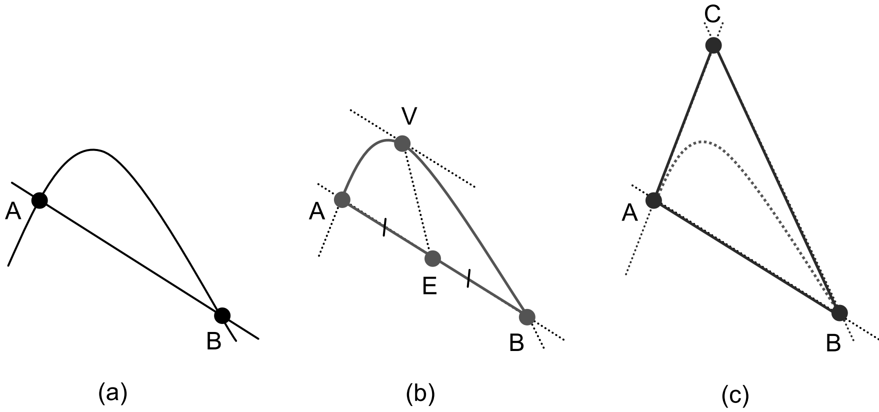


รูปที่ 1 เส้นออยเลอร์

จุด C เป็น จุดศูนย์กลางวงล้อม (รูปที่ 1(a)) จุด M เป็น จุดเซนทรอยด์ (รูปที่ 1(b)) จุด O เป็น จุดออร์โทเซนเตอร์ (รูปที่ 1(c)) ของรูปสามเหลี่ยม PQR และ เส้นตรงที่ลากผ่าน จุด C จุด M และ จุด O คือ เส้นออยเลอร์ (รูปที่ 1(d))

นักคณิตศาสตร์ในยุคต่อมาหลายท่านได้แสดงการพิสูจน์สมบัติการอยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกันบนเส้นออยเลอร์ของจุดทั้งสามอย่างกว้างขวาง [3] [4] [6] นอกจากนั้นยังรวมถึงได้มีการพิสูจน์ให้เห็นถึงความสัมพันธ์กันระหว่างจุดทั้งสามบนเส้นออยเลอร์อีกด้วย

อาร์คิมีดีส (Archimedes : 287-212 ปี ก่อนคริสต์ศักราช) นักคณิตศาสตร์ชาวกรีก สร้างเซกเมนต์พาราโบลาซึ่งเป็นอาณาบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยโค้งพาราโบลาและคอร์ดที่ลากเชื่อมจุดสองจุดซึ่งอยู่บนโค้งพาราโบลานั้น [2] อาร์คิมีดีสได้สร้างรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีลักษณะพิเศษโดยมีฐานเป็นคอร์ดของเซกเมนต์พาราโบลาและมีด้านสองด้านเป็นเส้นตรงที่สัมผัสโค้งพาราโบลาที่จุดปลายทั้งสองของคอร์ด ซึ่งต่อมาในภายหลังถูกเรียกว่า รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส (Archimedes’ Triangle)



รูปที่ 2 เซกเมนต์พาราโบลาและรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

เซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสเกิดจากโค้งพาราโบลาตัดกับคอร์ด AB ที่ จุด A และ จุด B (รูปที่ 2(a)) เรียก จุด V ว่าจุดยอด (vertex) ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสซึ่งเป็นจุดสัมผัสซึ่งเกิดจากเส้นสัมผัสกับโค้งพาราโบลาและขนานกับคอร์ด AB เรียก คอร์ด AB ว่า ฐาน (base) และ เรียก เส้น VE ซึ่งลากจากยอดมาแบ่งครึ่งฐานที่ จุด E ว่า แกน (axis) (รูปที่ 2(b)) ให้ จุด C เป็นจุดตัดของเส้นสัมผัสสองเส้นที่สัมผัสโค้งพาราโบลาที่ จุด A และ จุด B เรียก รูปสามเหลี่ยม ABC ว่า รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส (รูปที่ 2(c)) โดยมีฐาน AB ร่วมกันกับเซกเมนต์พาราโบลา มีด้าน AC และ ด้าน BC เป็นเส้นสัมผัสโค้งพาราโบลาที่ จุด A และ จุด B ซึ่งลากตัดกันที่จุด C

เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสมีลักษณะพิเศษซึ่งมีความแตกต่างจากรูปสามเหลี่ยมโดยทั่วไป กล่าวคือเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์เชิงโครงสร้างกับเซกเมนต์พาราโบลา ดังนั้นจึงเป็นสิ่งที่น่าสนใจนำไปสู่การศึกษาถึงสมบัติของเส้นออยเลอร์ ตลอดจนความสัมพันธ์ระหว่างจุดศูนย์กลางวงล้อม จุดเซนทรอยด์ และจุดออร์โทเซนเตอร์ ที่เกิดขึ้นภายในรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

เส้นออยเลอร์

บทนิยาม 1 จุดศูนย์กลางวงล้อม (circumcenter) หมายถึง จุดตัดของเส้นตรงซึ่งแบ่งครึ่งและตั้งฉาก (perpendicular bisectors) กับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม [1]

บทนิยาม 2 จุดเซนทรอยด์ (centroid) หมายถึง จุดตัดของเส้นมัธยฐาน (median) ทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม [1]

บทนิยาม 3 จุดออร์โทเซนเตอร์ (orthocenter) หมายถึง จุดตัดของเส้นตรงที่ลากจากมุมยอดมาตั้งฉากกับด้านตรงข้าม (altitude) ทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม [1]

บทนิยาม 4 เส้นออยเลอร์ (Euler Line) หมายถึง เส้นตรงที่ลากผ่านจุดสามจุดที่แตกต่างกัน คือ จุดศูนย์กลางวงล้อม จุดเซนทรอยด์และจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยม [5]

นักคณิตศาสตร์สามารถพิสูจน์ได้ว่า จุดศูนย์กลางวงล้อม จุดเซนทรอยด์และจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยม อยู่ร่วมเส้นเดียวกันบนเส้นออยเลอร์ โดยใช้สมบัติความคล้ายของรูปสามเหลี่ยมซึ่งเป็นวิธีการที่ไม่ซับซ้อนแต่ได้ผลการพิสูจน์ที่สมบูรณ์

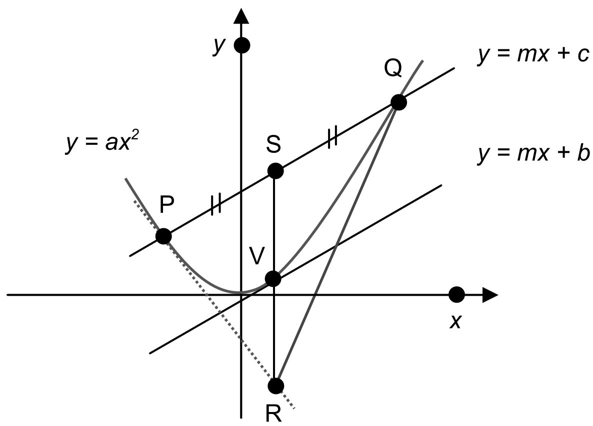
เซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสและรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

บทนิยาม 5 เซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส (Archimedes' Parabolic Segment) หมายถึง อาณาบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยโค้งพาราโบลาและคอร์ดที่ลากเชื่อมจุดสองจุดซึ่งอยู่บนโค้งพาราโบลานั้น

บทนิยาม 6 รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส (Archimedes' Triangle) หมายถึง รูปสามเหลี่ยมที่มีฐานเป็นคอร์ดของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสและมีด้านสองด้านเป็นเส้นตรงที่สัมผัสโค้งพาราโบลาที่จุดปลายทั้งสองของคอร์ด

ทฤษฎีบทของอาร์คิมีดีส (The Archimedes' Proposition) สำหรับเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสใดๆ ถ้าลากเส้นตรงจากจุดกึ่งกลางฐานผ่านจุดยอดไปตัดกับเส้นสัมผัสโค้งพาราโบลาซึ่งมีจุดปลายของฐานเป็นจุดสัมผัสแล้วระยะจากจุดกึ่งกลางฐานถึงจุดยอดจะเท่ากับระยะจากจุดยอดถึงจุดตัด

เซกเมนต์พาราโบลา PVQ เกิดจาก เส้นตรง $y = mx + c$ ตัดกับ โค้งพาราโบลา $y = ax^2$ ที่ จุด P และ จุด Q โดยมี เส้นตรง $y = mx + b$ ขนานกับ ฐาน PQ และสัมผัสโค้งพาราโบลาที่ จุดยอด V ให้ S เป็นจุดกึ่งกลางของ ฐาน PQ และ เส้นตรง SV เป็นแกนของเซกเมนต์พาราโบลา PVQ ลากต่อเส้นตรง SV ไปทางจุด V พบเส้นสัมผัสโค้งพาราโบลาซึ่งลากมาจาก จุดสัมผัส Q ที่จุด R



รูปที่ 3 แสดงการพิสูจน์ประพจน์ของอาร์คิมีดีส

ต้องการพิสูจน์ว่า VS = VR

การพิสูจน์

เนื่องจาก จุด P และ จุด Q เป็นจุดตัดของ พาราโบลา $y = ax^2$ และ เส้นตรง $y = mx + c$

จะได้ พิกัดของ จุด Q คือ $\left(\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}, \frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

พิกัดของ จุด P คือ $\left(\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}, \frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

เพราะว่า จุด S เป็นจุดกึ่งกลางของ ฐาน PQ ดังนั้น พิกัดของ จุด S คือ $\left(\frac{m}{2a}, \frac{m^2}{2a} + c\right)$

เนื่องจาก จุด S และ จุด V อยู่บนเส้นตรง $x = \frac{m}{2a}$

และ เนื่องจาก จุด V เป็นจุดที่ เส้นตรง $y = mx + b$ สัมผัสกับพาราโบลา $y = ax^2$

จะได้ พิกัดของ จุด V คือ $(\frac{m}{2a}, \frac{m^2}{4a})$ ....(1)

เพราะว่า เส้นตรง QR เป็นเส้นสัมผัสกับ พาราโบลา $y = ax^2$ ที่ จุด Q

จะได้ว่า ความชันของ เส้นสัมผัส QR คือ

$$\begin{aligned} y' &= 2ax \\ &= 2a\left(\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}\right) \\ &= m \quad \sqrt{m^2+4ac} \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการของ เส้นสัมผัส QR คือ

$$y - \left(\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right) = (m+\sqrt{m^2+4ac})\left(x - \frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}\right)$$

$$y = (m+\sqrt{m^2+4ac})\,x - \left(\frac{m\sqrt{m^2+4ac}+m^2+2ac}{2a}\right)$$

เนื่องจาก สมการของ เส้นตรง SR คือ $x = \frac{m}{2a}$ ดังนั้น ค่า y ของ จุด R คือ

$$y = (m+\sqrt{m^2+4ac})\left(\frac{m}{2a}\right) - \left(\frac{m\sqrt{m^2+4ac}+m^2+2ac}{2a}\right)$$

$$y = -c$$

จะได้ว่า พิกัดของ จุด R คือ $(\frac{m}{2a}, -c)$

สมมุติให้ จุด V' เป็นจุดกึ่งกลางของ เส้นตรง SR

เนื่องจาก จุดปลายของ เส้นตรง SR อยู่ที่ จุด S $(\frac{m}{2a}, \frac{m^2}{2a}+c)$ และ จุด R $(\frac{m}{2a}, -c)$

จะได้ พิกัดของ จุด V' คือ $\left(\frac{\frac{m}{2a}+\frac{m}{2a}}{2}, \frac{\frac{m^2}{2a} \quad c+(-c)}{2}\right)$

ดังนั้น จุดกึ่งกลางของ เส้นตรง SR อยู่ที่ จุด V' $(\frac{m}{2a}, \frac{m^2}{4a})$ ....(2)

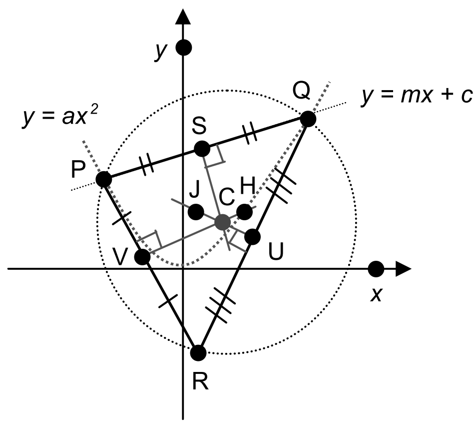
จะเห็นว่า (1) = (2) แสดงว่า จุด V และ จุด V' คือ จุดเดียวกัน ดังนั้น จุด V คือ จุดกึ่งกลางของเส้นตรง SR นั่นคือ VS = VR

(กรณี เส้นตรง PR สัมผัสโค้งพาราโบลาที่ จุด P ก็พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน)

ผลจากการพิสูจน์ทฤษฎีบทของอาร์คิมีดีส จะพบว่า เส้นสัมผัสที่ลากจาก จุด P และ จุด Q รวมทั้งเส้นตรงที่ลากจากจุด S ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของคอร์ด PQ ตัดกันที่ จุด R และ เรียกรูปสามเหลี่ยม PQR ว่า รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

พิกัดของจุดศูนย์กลางวงล้อมของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

เส้นตรง $y = mx + c$ ตัดโค้งพาราโบลา $y = ax^2$ ที่ จุด P และ จุด Q โดยที่เส้นตรง PR และ เส้นตรง QR ซึ่งเป็นเส้นสัมผัสโค้งพาราโบลาที่ จุด P และ จุด Q ตัดกันที่ จุด R ทำให้เกิดรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส PQR ซึ่งมี คอร์ด PQ เป็นฐาน มี จุด R เป็นจุดยอด โดยมี จุด C เป็นจุดศูนย์กลางวงล้อมของรูปสามเหลี่ยม จุด S จุด U และ จุด V เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน PQ ด้าน QR และด้าน PR ตามลำดับ



รูปที่ 4 จุดศูนย์กลางวงล้อมของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

ต้องการหา พิกัดของจุดศูนย์กลางวงล้อมของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

วิธีการ

ให้เส้นตรง HV แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ ด้าน PR ที่จุด V และ เส้นตรง JU แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้าน QR ที่จุด U จากการพิสูจน์ทฤษฎีบทของอาร์คิมีดีสทำให้ทราบว่า

พิกัดของ จุด Q คือ $\left(\dfrac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}, \dfrac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

พิกัดของ จุด P คือ $\left(\dfrac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}, \dfrac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

พิกัดของ จุด R คือ $\left(\dfrac{m}{2a}, -c\right)$

การหาพิกัดของ จุด V ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ ด้าน PR

$$x = \frac{\dfrac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}+\dfrac{m}{2a}}{2}$$

$$= \frac{2m-\sqrt{m^2+4ac}}{4a}$$

$$y = \frac{\dfrac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}+(-c)}{2}$$

$$= \frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}$$

ดังนั้น พิกัดของ จุด V คือ $\left(\dfrac{2m-\sqrt{m^2+4ac}}{4a}, \dfrac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}\right)$ ....(3)

การหาความชันของ เส้นตรง PR

เนื่องจาก พิกัดของ จุด P คือ $\left(\dfrac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}, \dfrac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

พิกัดของ จุด R คือ $\left(\dfrac{m}{2a}, -c\right)$

จะได้ ความชันของ เส้นตรง PR $= \dfrac{\dfrac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}-(-c)}{\dfrac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}-\dfrac{m}{2a}}$

$$= \frac{\dfrac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac+2ac}{2a}}{\dfrac{m-\sqrt{m^2+4ac}-m}{2a}}$$

$$= \frac{(m^2+4ac)\quad(m\sqrt{m^2+4ac})}{-\sqrt{m^2+4ac}}$$

$$= m-\sqrt{m^2+4ac}$$

การหาความชันของ เส้นตรง HV

เนื่องจาก เส้นตรง HV ตั้งฉากกับ เส้นตรง PR

จะได้ ความชันของ เส้นตรง HV $= -\left[\dfrac{1}{m-\sqrt{m^2+4ac}}\right]$ ....(4)

การหาสมการของ เส้นตรง HV

จาก (1) และ (2) จะได้ สมการเส้นตรง HV ดังนี้

$$y-[\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}] = -[\frac{1}{m-\sqrt{m^2+4ac}}][x-(\frac{2m-\sqrt{m^2+4ac}}{4a})]$$

$$y = [\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}]-[\frac{x}{m-\sqrt{m^2+4ac}}]+[\frac{2m-\sqrt{m^2+4ac}}{(m-\sqrt{m^2+4ac})(4a)}] \qquad \text{..................(5)}$$

การหาพิกัดของ จุด U ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ ด้าน QR

$$x = \frac{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}+\frac{m}{2a}}{2}$$

$$= \frac{2m+\sqrt{m+4ac}}{4a}$$

$$y = \frac{\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}+(-c)}{2}$$

$$= \frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}$$

ดังนั้น พิกัดของ จุด U คือ $(\frac{2m+\sqrt{m+4ac}}{4a}, \frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}}{4a})$ ....(6)

การหาความชันของ เส้นตรง QR

เนื่องจาก พิกัดของ จุด P คือ $(\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}, \frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a})$

และ จุด R คือ $(\frac{m}{2a}, -c)$

จะได้ ความชันของ เส้นตรง QR

$$= \frac{\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}-(-c)}{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}-\frac{m}{2a}}$$

$$= \frac{\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac+2ac}{2a}}{\frac{m+m\sqrt{m^2+4ac}-m}{2a}}$$

$$= \frac{(\sqrt{m^2+4ac})(\sqrt{m^2+4ac}+m)}{\sqrt{m^2+4ac}}$$

$$= m+\sqrt{m^2+4ac}$$

การหาความชันของ เส้นตรง JU

เนื่องจาก เส้นตรง JU ตั้งฉากกับ เส้นตรง QR

จะได้ ความชันของ เส้นตรง JU $= -[\dfrac{1}{m+\sqrt{m^2+4ac}}]$ ....(7)

การหาสมการของ เส้นตรง JU

จาก (4) และ (5) จะได้ สมการเส้นตรง JU ดังนี้

$$y-[\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}] = -[\frac{1}{m+\sqrt{m^2+4ac}}][x-(\frac{2m+\sqrt{m^2+4ac}}{4a})]$$

$$y = [\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}]-[\frac{x}{m+\sqrt{m^2+4ac}}]+[\frac{2m+\sqrt{m^2+4ac}}{(m+\sqrt{m^2+4ac})(4a)}] \qquad ....(8)$$

การหาพิกัดของ จุด C ซึ่งเป็นจุดตัดของ เส้นตรง HV และ เส้นตรง JU

พิจารณา (5) และ (8) ซึ่งเป็นสมการของ เส้นตรง HV และ เส้นตรง JU ตามลำดับ

$$y = [\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}]-[\frac{x}{m-\sqrt{m^2+4ac}}]+[\frac{2m-\sqrt{m^2+4ac}}{(m-\sqrt{m^2+4ac})(4a)}] \qquad ....(5)$$

$$y = [\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}]-[\frac{x}{m+\sqrt{m^2+4ac}}]+[\frac{2m+\sqrt{m^2+4ac}}{(m+\sqrt{m^2+4ac})(4a)}] \qquad ....(8)$$

ผลจาก (8)-(5) จะได้

$$(\frac{-2\sqrt{m^2+4ac}}{-4a})\ x = \frac{2m\sqrt{m^2+4ac}}{4a} + \frac{-4m\sqrt{m^2+4ac}+2m\sqrt{m^2+4ac}}{(m^2-m^2-4ac)(4a)}$$

$$(\frac{\sqrt{m^2+4ac}}{2ac})\ x = \frac{4acm\sqrt{m^2+4ac}+m\sqrt{m^2+4ac}}{8a^2c}$$

$$x = \frac{4acm+m}{4a}$$

แทนค่า x ใน (5) จะได้

$$y = [\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}]-[\frac{\frac{4acm+m}{4a}}{m-\sqrt{m^2+4ac}}]+[\frac{2m-\sqrt{m^2+4ac}}{(m-\sqrt{m^2+4ac})(4a)}]$$

$$= \frac{(m^2-m\sqrt{m^2+4ac})(m-\sqrt{m^2+4ac})-(4acm+m)+(2m-\sqrt{m^2+4ac})}{(4a)(m-\sqrt{m^2+4ac})}$$

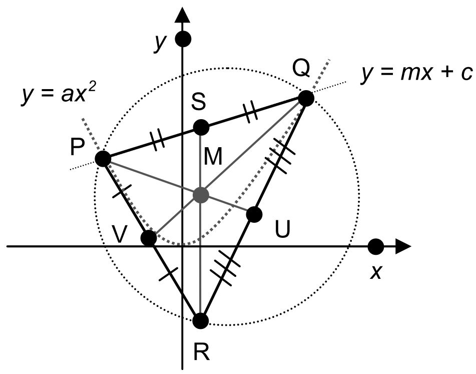
$$= \frac{2m^2+1}{4a}$$

จะได้ พิกัดของ จุด C คือ $(\dfrac{4acm+m}{4a}, \dfrac{2m^2+1}{4a})$

นั่นคือ พิกัดของจุดศูนย์กลางวงล้อมของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส คือ$(\dfrac{4acm+m}{4a}, \dfrac{2m^2+1}{4a})$

พิกัดของจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส PQR เกิดจากเส้นตรง $y = mx + c$ ตัดโค้งพาราโบลา $y = ax^2$ ที่ จุด P และ จุด Q โดยมี คอร์ด PQ เป็นฐาน และ จุด R เป็นจุดยอด จุด M เป็นจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง PU เส้นตรง RS และ เส้นตรง QV ซึ่งเป็นเส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม PQR



รูปที่ 5 จุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

ต้องการหา พิกัดของจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

วิธีการ

การหาพิกัดของจุด M ซึ่งเป็นจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส PQR

จากพิกัดของ จุด Q จุด P และ พิกัดของ จุด R จากทฤษฎีบทของอาร์คิมีดีส จะได้ว่า

$$x = \frac{\dfrac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a} + \dfrac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a} + \dfrac{m}{2a}}{3}$$

$$= \frac{m}{2a}$$

$$y = \frac{\dfrac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a} + \dfrac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a} + (-c)}{3}$$

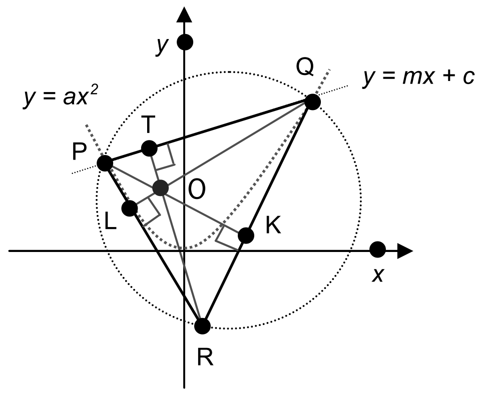
$$= \frac{m^2+ac}{3a}$$

จะได้ พิกัดของ จุด M คือ $(\frac{m}{2a}, \frac{m^2+ac}{3a})$

นั่นคือ พิกัดของจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส คือ $(\frac{m}{2a}, \frac{m^2+ac}{3a})$

พิกัดของจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส PQR เกิดจากเส้นตรง $y = mx + c$ ตัดโค้งพาราโบลา $y = ax^2$ ที่ จุด P และ จุด Q โดยมี คอร์ด PQ เป็นฐาน และ จุด R เป็นจุดยอด จุด O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง PK เส้นตรง QL และ เส้นตรง RT ซึ่งเป็นเส้นที่ลากจากมุมยอดมาตั้งฉากกับฐานที่จุด K จุด L และ จุด T ตามลำดับ



รูปที่ 6 จุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

ต้องการหา พิกัดของจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

วิธีการ

การหาสมการของเส้นตรง PK

เนื่องจากความชันของ เส้นตรง QR เท่ากับ $m+\sqrt{m^2+4ac}$ และ เส้นตรง QR ตั้งฉากกับเส้นตรง PK

ดังนั้น ความชันของ เส้นตรง PK เท่ากับ $-[\frac{1}{m+\sqrt{m^2+4ac}}]$

เนื่องจาก พิกัดของ จุด P คือ $(\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}, \frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a})$

จะได้ สมการของเส้นตรง PK คือ

$$y-[\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}] = -[\frac{1}{m+\sqrt{m^2+4ac}}][x-(\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a})]$$

$$y = [\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}]-[\frac{x}{m+\sqrt{m^2+4ac}}]+[\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{(2a)(m+\sqrt{m^2+4ac})}] \quad ....(9)$$

การหาสมการของเส้นตรง QL

เนื่องจาก ความชันของ เส้นตรง PR เท่ากับ $m-\sqrt{m^2+4ac}$ และ เส้นตรง PR ตั้งฉากกับเส้นตรง QL

ดังนั้น ความชันของ เส้นตรง QL เท่ากับ $-[\frac{1}{m-\sqrt{m^2+4ac}}]$

เนื่องจาก พิกัดของ จุดะ Q คือ $(\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}, \frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a})$

จะได้ สมการของเส้นตรง QL คือ

$$y-[\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}] = -[\frac{1}{m \quad \sqrt{m^2+4ac}}][x-(\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a})]$$

$$y = [\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}]-[\frac{x}{m-\sqrt{m^2+4ac}}]+[\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{(2a)(m-\sqrt{m^2+4ac})}] \quad ....(10)$$

การหาพิกัดของ จุด O ซึ่งเป็นจุดตัดของ เส้นตรง PK และ เส้นตรง QL

พิจารณา (9) และ (10) ซึ่งเป็นสมการของ เส้นตรง HV และ เส้นตรง JU ตามลำดับ

$$y = [\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}]-[\frac{x}{m+\sqrt{m^2+4ac}}]+[\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{(2a)(m+\sqrt{m^2+4ac})}] \quad ....(9)$$

$$y = [\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}]-[\frac{x}{m-\sqrt{m^2+4ac}}]+[\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{(2a)(m-\sqrt{m^2+4ac})}] \quad ....(10)$$

ผลจาก (10)-(9) จะได้

$$(\frac{-2\sqrt{m^2+4ac}}{-4a})x = \frac{-2m\sqrt{m^2+4ac}}{2a} + \frac{-4m\sqrt{m^2+4ac}}{(2a)(m^2-m^2-4ac)}$$

$$(\frac{\sqrt{m^2+4ac}}{2ac})x = \frac{-2ac(m\sqrt{m^2+4ac})+m\sqrt{m^2+4ac}}{2a^2c}$$

$$x = \frac{m-2acm}{a}$$

แทนค่า x ใน (10) จะได้

$$y = [\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}]-[\frac{\frac{m-2acm}{a}}{m-\sqrt{m^2+4ac}}]+[\frac{m+\sqrt{m+4ac}}{(2a)(m-\sqrt{m^2+4ac})}]$$

$$= \frac{(m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac)(m-\sqrt{m^2+4ac})-2(m-2acm)+(m+\sqrt{m^2+4ac})}{(2a)(m-\sqrt{m^2+4ac})}$$

$$= \frac{-2acm-2ac\sqrt{m^2+4ac}-2m+4acm+m+\sqrt{m^2+4ac}}{(2a)(m-\sqrt{m^2+4ac})}$$

$$= \frac{2acm-2ac\sqrt{m^2+4ac}-m+\sqrt{m^2+4ac}}{(2a)(m-\sqrt{m^2+4ac})}$$

$$= \frac{(2ac-1)(m-\sqrt{m^2+4ac})}{(2a)(m-\sqrt{m^2+4ac})}$$

$$= \frac{2ac-1}{2a}$$

จะได้ พิกัดของ จุด O คือ $\left(\frac{m-2acm}{a}, \frac{2ac-1}{2a}\right)$

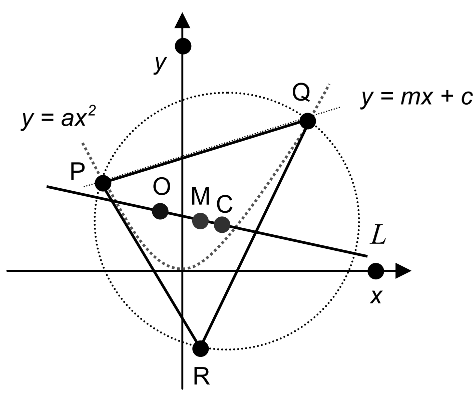
นั่นคือ พิกัดของจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส คือ $\left(\frac{m-2acm}{a}, \frac{2ac-1}{2a}\right)$

สมบัติของเส้นออยเลอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

ออยเลอร์ กล่าวถึงสมบัติของเส้นออยเลอร์ของรูปสามเหลี่ยมไว้ว่า จุดศูนย์กลางวงล้อม จุดเซนทรอยด์และจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมอยู่ร่วมเส้นเดียวกัน (collinearity) บนเส้นออยเลอร์

การตรวจสอบสมบัติของเส้นออยเลอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส PQR เกิดจากเส้นตรง $y = mx + c$ ตัดโค้งพาราโบลา $y = ax^2$ โดยมี จุด C จุด M และจุด O เป็น จุดศูนย์กลางวงล้อม จุดเซนทรอยด์และจุดออร์โทเซนเตอร์ตามลำดับ และ เส้นตรง L เป็นเส้นตรงที่ลากผ่าน จุด C และ จุด O



รูปที่ 7 การตรวจสอบสมบัติของเส้นออยเลอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

ต้องการพิสูจน์ว่า จุดศูนย์กลางวงล้อม จุดเซนทรอยด์และจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกันบนเส้นออยเลอร์

วิธีพิสูจน์

เนื่องจาก จุดศูนย์กลางวงล้อมของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส คือ C $\left(\frac{4acm+m}{4a}, \frac{2m^2+1}{4a}\right)$

จุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส คือ M $\left(\frac{m}{2a}, \frac{m^2+ac}{3a}\right)$

จุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส คือ O $\left(\frac{m-2acm}{a}, \frac{2ac-1}{2a}\right)$

การหาความชันของเส้นตรง CO หรือ เส้นตรง L

ความชันของเส้นตรง L

$$= \frac{(\frac{2m^2+1}{4a}) - (\frac{2ac-1}{2a})}{(\frac{4acm+m}{4a}) - (\frac{m-2acm}{a})}$$

$$= \frac{\frac{2m^2+1-4ac+2}{4a}}{\frac{4acm+m-4m+8acm}{4a}}$$

$$= \frac{(2m^2-4ac+3)(4a)}{(4a)(12acm-3m)}$$

$$= \frac{2m^2-4ac+3}{12acm-3m} \qquad ....(11)$$

การหาความชันของเส้นตรง CM

ความชันของเส้นตรง CM

$$= \frac{(\frac{m^2+ac}{3a}) - (\frac{2m^2+1}{4a})}{(\frac{m}{2a}) - (\frac{4acm+m}{4a})}$$

$$= \frac{\frac{4m^2+4ac-6m^2-3}{12a}}{\frac{2m-4acm-m}{4a}}$$

$$= \frac{(-2m^2+4ac-3)(4a)}{(12a)(m-4acm)}$$

$$= \frac{2m^2-4ac+3}{12acm-3m} \qquad ....(12)$$

จาก (11) และ (12) พบว่า เส้นตรง L และ เส้นตรง CM มีความชันเท่ากัน แสดงว่าเส้นตรง L กับ เส้นตรง CM ขนานกันหรือเป็นเส้นตรงเดียวกัน แต่เนื่องจาก จุด C เป็นจุดร่วมของเส้นตรงทั้งสอง ดังนั้น กล่าวได้ว่า เส้นตรง L และ เส้นตรง CM เป็นเส้นตรงเดียวกัน ....(13)

การหาความชันของเส้นตรง MO

ความชันของเส้นตรง MO

$$= \frac{(\frac{m^2+ac}{3a})-(\frac{2ac-1}{2a})}{(\frac{m}{2a})-(\frac{m-2acm}{a})}$$

$$= \frac{\frac{2m^2+2ac-6ac+3}{6a}}{\frac{m-2m+4acm}{2a}}$$

$$= \frac{(2m^2-4ac+3)(2a)}{(6a)(4acm-m)}$$

$$= \frac{2m^2-4ac+3}{12acm-3m} \qquad \text{..................(14)}$$

จาก (11) และ (14) พบว่า เส้นตรง L และ เส้นตรง MO มีความชันเท่ากัน แสดงว่าเส้นตรง L กับ เส้นตรง MO ขนานกันหรือเป็นเส้นตรงเดียวกัน แต่เนื่องจาก จุด O เป็นจุดร่วมของเส้นตรงทั้งสอง ดังนั้น กล่าวได้ว่า เส้นตรง L และ เส้นตรง MO เป็นเส้นตรงเดียวกัน ....(15)

จาก (13) และ (15) แสดงว่า เส้นตรง L เส้นตรง CM และ เส้นตรง MO เป็นเส้นตรงเดียวกัน ดังนั้น จุด C จุด M และ จุด O อยู่ร่วมกันบนเส้นตรง L โดยมีเส้นตรง L เป็นเส้นออยเลอร์ นั่นคือ **จุดศูนย์กลางวงล้อม จุดเซนทรอยด์และจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสอยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกันบนเส้นออยเลอร์**

ระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางวงล้อม จุดเซนทรอยด์และจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสบนเส้นออยเลอร์

ระยะทางจากจุดศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดออร์โทเซนเตอร์

เนื่องจาก จุดศูนย์กลางวงล้อมของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส คือ C $(\frac{4acm+m}{4a}, \frac{2m^2+1}{4a})$

จุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส คือ O $(\frac{m-2acm}{a}, \frac{2ac-1}{2a})$

$$|CO| = \sqrt{[(\frac{m-2acm}{a})-(\frac{4acm+m}{4a})]^2+[(\frac{2ac-1}{2a})-(\frac{2m^2+1}{4a})]^2}$$

$$= \sqrt{[\frac{9m^2-72acm^2+144a^2c^2m^2}{16a^2}]+[\frac{16a^2c^2-16acm^2+12m^2+4m^4-24ac+9}{16a^2}]}$$

$$= \frac{1}{4a}\sqrt{4m^4+21m^2+144a^2c^2m^2-88acm^2+16a^2c^2-24ac+9} \text{ หน่วย} \qquad \text{..................(16)}$$

ระยะทางจากจุดศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดเซนทรอยด์

เนื่องจาก จุดศูนย์กลางวงล้อมของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส คือ C $(\frac{4acm+m}{4a}, \frac{2m^2+1}{4a})$

จุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส คือ M $(\frac{m}{2a}, \frac{m^2+ac}{3a})$

$$|CM| = \sqrt{[(\frac{m}{2a})-(\frac{4acm+m}{4a})]^2+[(\frac{m^2+ac}{3a})-(\frac{2m^2+1}{4a})]^2}$$

$$= \sqrt{[\frac{m^2-8acm^2+16a^2c^2m^2}{16a^2}]+[\frac{16a^2c^2-24ac-16acm^2+12m^2+4m^4+9}{144a^2}]}$$

$$= \frac{1}{12a}\sqrt{4m^4+21m^2+144a^2c^2m^2-88acm^2+16a^2c^2-24ac+9} \text{ หน่วย} \qquad ....(17)$$

ระยะทางจากจุดเซนทรอยด์ถึงจุดออร์โทเซนเตอร์

เนื่องจาก จุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส คือ M $(\frac{m}{2a}, \frac{m^2+ac}{3a})$

จุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส คือ O $(\frac{m-2acm}{a}, \frac{2ac-1}{2a})$

$$|MO| = \sqrt{[(\frac{m-2acm}{a})-(\frac{m}{2a})]^2+[(\frac{2ac-1}{2a})-(\frac{m^2+ac}{3a})]^2}$$

$$= \sqrt{[\frac{m^2-8acm^2+16a^2c^2m^2}{4a^2}]+[\frac{12m^2-16acm^2-24ac+16a^2c^2+4m^4+9}{36a^2}]}$$

$$= \frac{1}{6a}\sqrt{4m^4+21m^2+144a^2c^2m^2-88acm^2+16a^2c^2-24ac+9} \text{ หน่วย} \qquad ....(18)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างจุดศูนย์กลางวงล้อม จุดเซนทรอยด์และจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสบนเส้นออยเลอร์

อัตราส่วนของระยะทางจากจุดศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดออร์โทเซนเตอร์ต่อระยะทางจากจุดศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดเซนทรอยด์

จาก (16) และ (17)

$$\frac{|CO|}{|CM|} = \frac{\frac{1}{4a}\sqrt{4m^4+21m^2+144a^2c^2m^2-88acm^2+16a^2c^2-24ac+9}}{\frac{1}{12a}\sqrt{4m^4+21m^2+144a^2c^2m^2-88acm^2+16a^2c^2-24ac+9}}$$

$$= \frac{3}{1}$$

นั่นคือ **ระยะทางจากจุดศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดออร์โทเซนเตอร์ยาวเป็นสามเท่าของระยะทางจากจุดศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดเซนทรอยด์**

อัตราส่วนของระยะทางจากจุดเซนทรอยด์ถึงจุดออร์โทเซนเตอร์ต่อระยะทางจากจุดศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดออร์โทเซนเตอร์

จาก (18) และ (16)

$$\frac{|\mathrm{MO}|}{|\mathrm{CO}|} = \frac{\frac{1}{6a}\sqrt{4m^4+21m^2+144a^2c^2m^2-88acm^2+16a^2c^2-24ac+9}}{\frac{1}{4a}\sqrt{4m^4+21m^2+144a^2c^2m^2-88acm^2+16a^2c^2-24ac+9}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

นั่นคือ **ระยะทางจากจุดเซนทรอยด์ถึงจุดออร์โทเซนเตอร์ยาวเป็น $\frac{2}{3}$ เท่าของระยะทางจากจุดศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดออร์โทเซนเตอร์**

อัตราส่วนของระยะทางจากจุดเซนทรอยด์ถึงจุดออร์โทเซนเตอร์ต่อระยะทางจากจุดศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดเซนทรอยด์

จาก (18) และ (17)

$$\frac{|\mathrm{MO}|}{|\mathrm{CM}|} = \frac{\frac{1}{6a}\sqrt{4m^4+21m^2+144a^2c^2m^2-88acm^2+16a^2c^2-24ac+9}}{\frac{1}{12a}\sqrt{4m^4+21m^2+144a^2c^2m^2-88acm^2+16a^2c^2-24ac+9}}$$

$$= \frac{2}{1}$$

นั่นคือ **ระยะทางจากจุดเซนทรอยด์ถึงจุดออร์โทเซนเตอร์ยาวเป็นสองเท่าของระยะทางจากจุดศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดเซนทรอยด์**

บทสรุป

ผลจากการศึกษาครั้งนี้พบว่า

1. สมบัติของเส้นออยเลอร์เป็นจริงในรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส โดยที่ จุดศูนย์กลางวงล้อม จุดเซนทรอยด์และจุดออร์โทเซนเตอร์อยู่ร่วมเส้นเดียวกันบนเส้นออยเลอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

2. จุดศูนย์กลางวงล้อม จุดเซนทรอยด์และจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสบนเส้นออยเลอร์มีความสัมพันธ์กัน โดยที่ ระยะทางจากจุดศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดออร์โทเซนเตอร์ยาวเป็นสามเท่าของระยะทางจากจุดศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดเซนทรอยด์ ระยะทางจากจุดเซนทรอยด์ถึงจุดออร์โทเซนเตอร์ยาวเป็น 2/3 เท่าของระยะทางจากศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดออร์โทเซนเตอร์ และ ระยะทางจากจุดเซนทรอยด์ถึงจุดออร์โทเซนเตอร์ยาวเป็นสองเท่าของระยะทางจากจุดศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดเซนทรอยด์

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ยุพร ริมชลการ ภาควิชาวิทยาศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม ที่ได้เสนอข้อคิดและคำแนะนำในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ และขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย ที่ได้จัดสรรเงินทุนสนับสนุนการศึกษาวิจัยจนทุกอย่างบรรลุความสำเร็จด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

1. Dunham, W. 1998. Euler The Master of Us all. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
2. Erbas, K.A. 2000. An Explanatory Approach to Archimedes's Quadrature of the Parabola. Available from URL: http://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMAT6680.F99/Erbas/emat6690/essay1/essay1.html. 3 February 2014.
3. Faucette, W.M. 2007. The Euler Line of a Triangle. Available from URL: http://www.westga.edu/~faucette/research/Eulerline.pdf. 4 October 2014.
4. Liyanapatabendi, N.A. 2011. Mathematical Proof Euler Line. Available from URL: http://www.m500.org.uk/winter/student-essay.pdf. 10 October 2014.
5. Stankova, L. 2011. Plane Geometry I, II, III: Along the Euler Line. Available from URL: http://mathcircle.berkeley.edu/archivedocs/2011_2012/lectures/111112 lecturespdf/BMC_Sept6_2011.pdf. 13 November 2014.
6. Teiml, D. 2013. The Euler Line proofs properties and applications. Available from URL: http://www.scribd.com/doc/148405740/Euler-Line-Proofs-Properties- Applications. 11 September 2014.

ได้รับบทความวันที่ 5 กันยายน 2558
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 20 พฤศจิกายน 2558