บทความวิชาการ

การประมาณค่า π ด้วยความน่าจะเป็น

ณหทัย ฤกษ์ฤทัยรัตน์*

บทคัดย่อ

การประมาณค่า π มีหลายวิธี เช่น ประมาณค่าโดยใช้ทฤษฎีเรขาคณิต แคลคูลัส และทฤษฎีจำนวน ในบทความฉบับนี้เสนอการประมาณค่า π โดยใช้ทฤษฎีความน่าจะเป็น ซึ่งหามาจากความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นเกมจะชนะในปัญหามอนตีฮอลล์ (Monty Hall Problem) ที่มีประตู n บาน เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3 เพื่อให้ได้ข้อสรุปว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left[P(n)\right]^2 \cdot n = \frac{\pi}{2}$$

เมื่อ $P(n)$ แทน ความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นเกมจะชนะเมื่อเขาเลือกที่จะเปลี่ยนประตูทุกครั้งที่มีโอกาส

คำสำคัญ: พาย การประมาณค่า ปัญหามอนตีฮอลล์

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

*ผู้นิพนธ์ประสานงาน, e-mail: nahathai@g.swu.ac.th

Approximation of π with Probability

Nahathai Rerkruthairat*

ABSTRACT

There are several ways to approximate the value of π such as using the geometric theory, calculus and number theory. This article presents the approximation of π by using the probability theory which is obtained by applying the probability of winning in the n-doors Monty Hall Problem, where n is an odd number which is equal or greater than 3, to conclude that

$$\lim_{n\to\infty}\left[P(n)\right]^2 \cdot n = \frac{\pi}{2}$$

where $P(n)$ is the probability of winning if the contestant change doors at every opportunity.

Keywords: Pi, Approximation, Monty Hall Problem

Department of Mathematics, Faculty of Science, Srinakharinwirot University

*Corresponding author, e-mail: nahathai@g.swu.ac.th

บทนำ

การใช้สัญลักษณ์ π แทนอัตราส่วนของความยาวเส้นรอบวงกลมใดๆ กับความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงนั้นซึ่งเป็นค่าคงที่เดียวกันเสมอ ถูกกำหนดโดยวิลเลียม โจนส์ (William Jones) ในปี ค.ศ. 1706 [1] แต่การหาค่า π มีร่องรอยยาวนานกว่า 3000 ปีก่อนคริสต์ศักราช โดยมีจุดเริ่มต้นจากการหาพื้นที่วงกลม ประวัติการหาค่า π แบ่งเป็น 3 ยุค [2] ดังนี้

ยุคที่หนึ่ง (ตั้งแต่มีการบันทึกประวัติการหาค่า π ถึงกลางศตวรรษที่ 17) ประมาณ 2000 ปีก่อนคริสต์ศักราช นักคณิตศาสตร์ชาวอียิปต์ [3] แทนพื้นที่วงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว $2r$ หน่วย ด้วยพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่แต่ละด้านยาว $2r-\frac{2r}{9}$ หน่วย นั่นคือวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว $2r$ หน่วยมีพื้นที่เท่ากับ $A=\left(\frac{8}{9}\right)^2(2r)^2=\left(\frac{16}{9}\right)^2 r^2$ ถ้าให้ $\pi=\left(\frac{16}{9}\right)^2=3.1604\ldots$ จะเห็นว่าพื้นที่วงกลมที่ชาวอียิปต์หาได้ใกล้เคียงกับพื้นที่จริงอย่างมาก ในช่วงเวลาใกล้เคียงกันนักคณิตศาสตร์หลายกลุ่ม ทั้งชาวบาบิโลน ฮินดูและจีน ประมาณค่า π ด้วย 3 ซึ่งได้จากสมบัติเชิงเรขาคณิตของรูปหกเหลี่ยมด้านเท่าที่แนบในวงกลม และมีการใช้ค่า π = 3 มาอีกหลายศตวรรษ ต่อมา (ประมาณ 240 ปีก่อนคริสต์ศักราช) อาร์คิมีดิส (Archimedes) [2] นักคณิตศาสตร์ชาวกรีกพิสูจน์ว่าอัตราส่วนของความยาวเส้นรอบวงกลมกับความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงนั้นเป็นค่าคงที่ มีค่าอยู่ระหว่าง $3\frac{10}{71}=3.14084\ldots$ กับ $3\frac{1}{7}=3.14285\ldots$ และหาพื้นที่วงกลมจากผลคูณของค่าคงที่นี้กับ r^2 หลังจากนั้นนักวิทยาศาสตร์หลายท่านพยายามประมาณค่า π แต่ก็มีความก้าวหน้าเพียงเล็กน้อยเท่านั้น จนกระทั่งในปี ค.ศ. 1579 นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อฟรองซัวส์ วีต้า (Francois Vieta) [1] ได้เขียน π ในรูปของลำดับอนันต์ที่ได้จากการพิสูจน์เชิงเรขาคณิตเป็นครั้งแรก โดยเขียนในรูป

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

การประมาณค่านี้มีความถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 9 นั่นคือ $3.1415926535<\pi<3.1415926537$

ยุคที่สอง (กลางศตวรรษที่ 17 ถึงกลางศตวรรษที่ 18) ปี ค.ศ. 1650 จอห์น วอลลิส (John Wallis) [1, 2] นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษได้สร้างผลงานที่เป็นจุดเปลี่ยนในการก้าวเข้าสู่ยุคใหม่ของการหาค่า π เขาเขียน π ในรูปของผลคูณอนันต์

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

หรือเขียนในเชิงการลู่เข้าได้เป็น

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdots(2n)\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdots(2n-1)(2n-1)(2n+1)}\right)=\frac{\pi}{2}$$

นอกจากนี้ เขาได้พิสูจน์ว่ารูปแบบข้างต้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเศษส่วนต่อเนื่อง (continued fraction)

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cdots}}}}}$$

ในหนังสือของเขาชื่อ Arithmetica infinitorum ช่วงครึ่งหลังของศตวรรษที่ 17 อนุกรมอนันต์มีบทบาทสำคัญมากในสาขาคณิตศาสตร์ มีการศึกษาและนำไปใช้ในหลายแง่มุม สำหรับการประมาณค่าของ π การค้นพบที่มีความสำคัญและโดดเด่นมากได้แก่การค้นพบของ เจมส์ เกรกอรี่ (James Gregory) นักคณิตศาสตร์ชาวสกอตแลนด์ และไลบ์นิทซ์ (Leibitz) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ในปี ค.ศ. 1670 เจมส์ เกรกอรี่ [4] ค้นพบสมการ

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots$$

จากการศึกษาอนุกรมอนันต์ของฟังก์ชันลอการิทึม ในปี ค.ศ. 1673 ไลบ์นิทซ์ (Leibitz) [4] ซึ่งไม่เคยเห็นผลงานของเจมส์ เกรกอรี่ มาก่อน ค้นพบสมการ

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะของเกรกอรี่ $(x = 1)$ โดยใช้การพิสูจน์เชิงเรขาคณิตและเทคนิคการอินทิเกรต ปัจจุบันสมการนี้รู้จักกันดีในชื่อ อนุกรมของไลบ์นิทซ์ (Leibnitz's series) การประมาณค่า π โดยใช้อนุกรมของไลบ์นิทซ์ทำได้ง่ายแต่ก็มีข้อเสียคือ มีการลู่เข้าช้า จึงมีนักวิทยาศาสตร์คิดค้นอนุกรมเพื่อใช้ในการประมาณค่า π ตามมาอีกหลายแบบ เช่น ในปี ค.ศ. 1706 แมชชิน (Machin) [2] นักดาราศาสตร์ชาวอังกฤษพิสูจน์ว่า

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

ซึ่งสามารถประมาณค่า π ได้ถูกต้องถึง 100 ตำแหน่ง การวิจัยของนักวิทยาศาสตร์ในยุคนี้มุ่งเน้นที่จะประมาณค่าของ π ให้ละเอียดมากขึ้น โดยหวังที่จะแสดงว่า π เป็นจำนวนตรรกยะ

ยุคที่สาม (กลางศตวรรษที่ 17 ถึงกลางศตวรรษที่ 18) จากความพยายามอย่างมากในช่วงปลายยุคที่สองซึ่งนักคณิตศาสตร์เริ่มเห็นความสัมพันธ์ของ π กับ e โดยการเขียนฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูปของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ในปี ค.ศ. 1794 เอเดรีย มารี เลอช็อง (Adrien Marie Legendre) [2] นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสสามารถพิสูจน์ได้ว่า π เป็นจำนวนอตรรกยะ ซึ่งเป็นอีกจุดเปลี่ยนที่สำคัญของประวัติศาสตร์การหาค่า π

แม้จะเป็นที่ทราบกันดีแล้วว่า π เป็นจำนวนอตรรกยะ แต่การประมาณค่า π ยังคงมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง [5] โดยการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยคำนวณ ทั้งนี้เพื่อประโยชน์ในการทดสอบระบบและความเร็วของคอมพิวเตอร์ ปัจจุบันมีการหาค่า π ได้ถูกต้องถึง 12.1 ล้านล้านตำแหน่ง [6]

ในบทความฉบับนี้จะกล่าวถึงการประมาณค่า π โดยใช้ความน่าจะเป็นที่ได้จากการขยายปัญหามอนตีฮอลล์ (Monty Hall Problem) จากประตู 3 บานเป็น n บานและมีการเล่นเกมเป็นขั้นตอนซ้ำไปเรื่อยๆ นอกจากนี้ยังได้เปรียบเทียบความสามารถในการประมาณค่าเชิงตัวเลขของวิธีนี้กับวิธีของวีต้าและไลบ์นิทซ์ในตอนท้ายด้วย

ปัญหามอนตีฮอลล์ (Monty Hall Problem)

ในปี ค.ศ. 1975 นักคณิตศาสตร์ชื่อสตีฟ เซลวิน (Steve Selvin) ได้เขียนจดหมายสองฉบับถึงบรรณาธิการวารสาร The American Statistician [7, 8] ในจดหมายเขาได้กล่าวถึงสถานการณ์ในเกมโชว์รายการ Let's Make a Deal ที่มีมอนตีฮอลล์ (Monty Hall) เป็นพิธีกร ซึ่งเป็นปัญหาเกี่ยวกับความน่าจะเป็นที่ขัดแย้งกับความรู้สึกของคนทั่วไป (paradox) ที่มีชื่อเสียงมากปัญหาหนึ่ง

ปัญหา 1 (ปัญหามอนตีฮอลล์) ในรายการเกมโชว์รายการหนึ่งมีประตูที่ปิดอยู่ 3 บาน หนึ่งในนี้มีรถซ่อนอยู่และประตูที่เหลือมีแกะซ่อนอยู่ ในเกมนี้พิธีกรทราบว่ามีอะไรซ่อนอยู่หลังประตูแต่ละบาน พิธีกรจะให้ผู้เล่นเกมเลือกประตูมาหนึ่งบาน ผู้เล่นเกมจะชนะถ้าเขาเลือกได้ประตูบานที่มีรถซ่อนอยู่ เมื่อผู้เล่นเกมเลือกประตูแล้วพิธีกรจะยังไม่เปิดประตูบานนั้น แต่จะเลือกเปิดประตูบานหนึ่งที่ผู้เล่นเกมไม่ได้เลือกและมีแกะซ่อนอยู่ จากนั้นพิธีกรจะถามผู้เล่นเกมว่าต้องการเปลี่ยนประตูที่เลือกไว้กับประตูอีกบานที่ปิดอยู่หรือไม่ คำถามคือสำหรับผู้เล่นเกมแล้วทางเลือกใดดีกว่าระหว่างการเลือกประตูแรกที่เลือกไว้กับการเลือกที่จะเปลี่ยนประตู

ในจดหมายทั้งสองฉบับนี้สตีฟ เซลวิน ได้เขียนเฉลยไว้ด้วย แต่ในขณะนั้นปัญหามอนตีฮอลล์ยังไม่เป็นที่รู้จักมากนัก และเพิ่งเป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายในปี ค.ศ. 1990 เมื่อมาริลิน วอส ซาแวนท์ (Marilyn vos Savant) ผู้ซึ่งได้รับการรับรองจากกินเนสส์ เวิลด์ เรคคอร์ด ตั้งแต่ ค.ศ. 1986 ถึง ค.ศ. 1990 ว่าเป็นผู้ที่มีไอคิวสูงสุด และเป็นนักเขียนประจำคอลัมน์ "Ask Marilyn" ในนิตยสาร "Parade" ได้ตอบคำถามของผู้อ่านซึ่งเป็นปัญหาเดียวกันกับปัญหามอนตีฮอลล์ในคอลัมน์ของเธอ

คำตอบของมาริลินคือ คุณควรจะเปลี่ยนประตูเพราะถ้าคุณเปลี่ยนประตูความน่าจะเป็นที่จะชนะเท่ากับ 2/3 แต่ถ้าคุณไม่เปลี่ยนประตูความน่าจะเป็นที่จะชนะเท่ากับ 1/3 เท่านั้น ซึ่งตรงกับคำตอบของสตีฟ

หลังจากนั้น มีผู้อ่านมากมายได้เขียนจดหมายถึงมาริลินเพื่อแสดงความไม่เห็นด้วยกับคำตอบของเธอ โดยมีจดหมายกว่า 1,000 ฉบับที่เขียนโดยผู้ที่จบปริญญาเอกและมีอีกหลายฉบับที่เขียนโดยนักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์ มาริลิน กล่าวว่า ผู้ที่เขียนจดหมายเข้ามาส่วนใหญ่ไม่เข้าใจปัญหาหรือตีความปัญหาไม่ถูกต้อง ซึ่งมาริลินได้โต้แย้งเพื่อยืนยันคำตอบอีกหลายครั้งในคอลัมน์ของเธอ แต่การถกเถียงยังคงขยายวงกว้างขึ้นและได้กลายเป็นประเด็นบนหน้าหนึ่งของหนังสือพิมพ์ The New York Times [9] ในที่สุดความสับสนทั้งหลายก็จบลง เมื่อมีการสร้างแบบจำลองทางคอมพิวเตอร์และทดสอบด้วยวิธีการมอนติคาร์โล (Monte Carlo Method) ยืนยันว่าคำตอบของสตีฟและมาริลินเป็นคำตอบที่ถูกต้อง

ประเด็นหลักที่ทำให้มีการโต้แย้งมากมายเกี่ยวกับปัญหามอนตีฮอลล์ก็คือความไม่ชัดเจนของปัญหาทำให้เกิดความเข้าใจไม่ตรงกัน ประเด็นที่สำคัญของปัญหานี้คือ พิธีกรทราบว่ารถอยู่หลังประตูบานใด พิธีกรจะเปิดประตูบานที่ไม่มีรถเสมอ และพิธีกรจะเสนอให้ผู้เล่นเปลี่ยนประตูเสมอ

คำตอบของปัญหามอนตีฮอลล์ สามารถอธิบายได้หลายวิธี เช่น การแยกกรณี [3] การเขียนแผนภาพ [10] การพิสูจน์โดยใช้กฎของเบย์ (Bay's Theorem) [10] การใช้หลักการได้สัดส่วน (Proportionality Principle) [11] การสร้างแบบจำลองทางคอมพิวเตอร์และทดสอบด้วยวิธีการมอนติคาร์โล (Monte Carlo Method) [12] หรือการอธิบายง่ายๆ ดังนี้ เนื่องจากประตูทุกบานมีโอกาสที่จะมีรถซ่อนอยู่เท่ากัน ดังนั้น ถ้าผู้เล่นเกมไม่เปลี่ยนประตู ความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นเกมจะชนะจะยังคงเท่ากับโอกาสที่รถซ่อนอยู่ในประตูแต่ละบาน ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1/3 ในทางกลับกัน ถ้าผู้เล่นเลือกเปลี่ยนประตูแล้วเจอรถนั้นหมายความว่า ผู้เล่นจะต้องเลือกประตูที่มีแกะซ่อนอยู่ในการเลือกครั้งแรก ซึ่งโอกาสที่แกะจะซ่อนอยู่หลังประตูเท่ากับ 2/3 ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นเกมเปลี่ยนประตูแล้วจะชนะจึงเท่ากับ 2/3 ด้วย

ปัญหามอนตีฮอลล์ (Monty Hall Problem) กับการประมาณค่า π

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอการประมาณค่า π โดยใช้ความน่าจะเป็นที่ได้จากการขยายปัญหามอนตีฮอลล์จากประตู 3 บาน เป็น n บาน และมีการเล่นเกมเป็นขั้นตอนซ้ำไปเรื่อยๆ ซึ่งได้กล่าวไว้ในงานวิจัยของอัลเบอร์โต ซอร์ซี (Alberto Zorzi) ในปี ค.ศ. 2009 [13]

ปัญหา 2 ในรายการเกมโชว์รายการหนึ่งมีประตูที่ปิดอยู่ n บาน เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 3 หนึ่งในนี้มีรถซ่อนอยู่และประตูที่เหลือมีแกะซ่อนอยู่ ในเกมนี้พิธีกรทราบว่ามีอะไรซ่อนอยู่หลังประตูแต่ละบาน ผู้เล่นเกมจะชนะถ้าเขาเลือกได้ประตูบานที่มีรถซ่อนอยู่

<u>วิธีการเล่นเกม</u>

ขั้นตอนที่ 1 ผู้เล่นเกมเลือกประตูหนึ่งบานจากประตูที่ปิดอยู่และยังไม่เคยถูกเลือก

ขั้นตอนที่ 2 ถ้าไม่มีประตูที่ปิดอยู่และยังไม่ถูกเลือกเหลืออยู่ เกมจะจบลงและประตูสุดท้ายที่ผู้เล่นเกมเลือกจะถูกเปิดออก แต่ถ้าเกมยังไม่จบพิธีกรจะเปิดประตูหนึ่งบานโดยสุ่มเลือกจากประตูที่ปิดอยู่ซึ่งยังไม่ถูกเลือกและไม่มีรถซ่อนอยู่ จากนั้นพิธีกรจะถามผู้เล่นเกมว่าจะเปลี่ยนประตูที่เลือกไว้กับประตูที่ปิดอยู่และยังไม่เคยถูกเลือกหรือไม่

ขั้นตอนที่ 3 ถ้าผู้เล่นเกมเลือกที่จะไม่เปลี่ยนประตู พิธีกรจะเปิดประตูที่ผู้เล่นเลือกไว้และเกมจะจบลง แต่ถ้าผู้เล่นเลือกที่จะเปลี่ยนประตู เกมจะกลับไปยังขั้นตอนที่ 1

ผู้เล่นเกมควรจะเล่นเกมอย่างไรจึงจะมีโอกาสชนะมากที่สุด

ทฤษฎีบท ในปัญหา 2 กำหนดให้ความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นเกมจะชนะเมื่อเขาเลือกที่จะเปลี่ยนประตูทุกครั้งที่มีโอกาส (ทุกครั้งที่พิธีกรถาม) เขียนแทนด้วย $P(n)$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left[P(n)\right]^2\cdot n=\frac{\pi}{2}$$

พิสูจน์

ให้ $Q(n)$ แทนข้อความ $P(n)=\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \cdots\ \cdot(n-3)(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ \cdots\ \cdot(n-2)n}$ โดยที่ n เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3

จากปัญหา 1 จะได้ว่า $Q(3)$ เป็นจริง
สมมติให้ $Q(k)$ เป็นจริง เมื่อ k เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3
สมมติให้มีประตู $k+2$ บาน และมี 1 บานที่มีรถซ่อนอยู่

สังเกตว่าการที่ผู้เล่นเลือกเปลี่ยนประตูแล้วเจอรถนั้นผู้เล่นจะต้องเลือกได้ประตูที่ไม่มีรถในการเลือกครั้งแรก ซึ่งความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นเกมจะเลือกได้ประตูที่ไม่มีรถในการเลือกครั้งแรกเท่ากับ $\dfrac{k+1}{k+2}$

ต่อไปพิธีกรเลือกเปิดประตูที่ไม่มีรถและเป็นประตูที่ผู้เล่นไม่ได้เลือก ซึ่งมี k บาน ความน่าจะเป็นที่พิธีกรจะเลือกเปิดประตูแต่ละบานเท่ากับ $\dfrac{1}{k}$ จากนั้นพิธีกรถามผู้เล่นเกมว่าจะเปลี่ยนประตูหรือไม่

เนื่องจากผู้เล่นเลือกที่จะเปลี่ยนประตูและขณะนี้มีประตูให้เลือกบาน k ซึ่งหนึ่งในนั้นมีรถซ่อนอยู่ ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นจะเจอรถเมื่อผู้เล่นเลือกที่จะเปลี่ยนประตูทุกครั้งที่พิธีกรถามเท่ากับ $P(k)$

จะได้ว่า $$P(k+2)=\frac{(k+1)}{(k+2)}\cdot k\cdot\frac{1}{k}\cdot P(k)=\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ \cdots\ \cdot(n-3)(k-1)(k+1)}{3\cdot5\cdot7\cdot\ \cdots\ \cdot(n-2)(k)(k+2)}$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $Q(n)$ เป็นจริงโดยที่ n เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3

จากสูตรของวอลลิส (Wallis' formula) เราทราบว่า

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots=\frac{\pi}{2}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\left[P(n)\right]^2\cdot n=\dfrac{\pi}{2}$ นั่นคือ เราสามารถประมาณค่า π ได้ด้วยการกำหนดจำนวนประตูและเล่นเกม ตามขั้นตอนในปัญหา 2

สรุป

ประวัติการหาค่า π แบ่งเป็น 3 ยุค ยุคที่หนึ่งการหาค่า π จะใช้วิธีเชิงเรขาคณิตเป็นหลัก ยุคที่สองแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์และแคลคูลัสเชิงปริพันธ์มีบทบาทสำคัญในการศึกษาและหาค่า π โดยในยุคนี้เริ่มมีการเขียนสูตร π ในรูปทั่วไป เช่น การเขียนในรูปผลคูณอนันต์ เศษส่วนต่อเนื่อง และอนุกรมอนันต์ ซึ่งมีความสะดวกและเป็นประโยชน์อย่างมากในการประมาณค่า π สำหรับยุคที่สามเป็นยุคของการหาความจริงว่า π เป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ ปัจจุบันการศึกษาและพัฒนาเพื่อหาแนวทางหรือวิธีการใหม่ๆ ในการประมาณค่า π ทั้งทางทฤษฎีและการประยุกต์ยังคงมีอย่างต่อเนื่อง ดังเช่น การใช้ความน่าจะเป็นที่ได้จากการขยายปัญหามอนตีฮอลล์ (Monty Hall Problem) จากประตู 3 บานเป็น n บานที่ได้กล่าวไปแล้วข้างต้น

ปัจจุบัน เราทราบแล้วว่า π เป็นจำนวนอตรรกยะ และ

π = 3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679 ...

ในการเปรียบเทียบเชิงตัวเลข ถ้ากำหนดให้ n = 1000 โดยโปรแกรม matlab [14] พบว่า

สูตร	ค่าที่ได้	จำนวนตำแหน่งที่ประมาณค่าได้ถูกต้อง
ฟรองซัวส์ วีต้า (Francois Vieta)	pi $\approx$ 3.1415926535 8979400418	14 ตำแหน่ง
จอห์น วอลลิส (John Wallis)	pi $\approx$ 3.1400238186 0058621399	1 ตำแหน่ง
เจมส์ เกรกอรี่ (James Gregory) และ ไลบ์นิทซ์ (Leibitz)	pi $\approx$ 3.1405926538 3979413500	1 ตำแหน่ง

จากการพิสูจน์ทฤษฎีบท สูตรของวอลลิสทำให้ได้ว่า $\lim_{n\to\infty}\left[P(n)\right]^2 \cdot n = \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น การประมาณค่า π โดยใช้ความน่าจะเป็นที่ได้จากการขยายปัญหามอนตีฮอลล์ (Monty Hall Problem) จากประตู 3 บานเป็น n บาน เมื่อ $n = 1000$ จึงมีความถูกต้องเพียงทศนิยมตำแหน่งที่หนึ่ง

ถึงแม้ว่าผลการวิจัยจะบ่งชี้ว่าการประมาณค่า π ด้วยวิธีนี้มีประสิทธิภาพน้อย แต่ก็อาจเป็นแนวทางในการนำปัญหาอื่นๆ ที่คล้ายคลึงกันมาขยายและศึกษาการประมาณค่าจำนวนอตรรกยะอื่นๆ ในอนาคตได้

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิ และ ดร.ดาวุด ทองทา อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ที่ให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ในการเขียนบทความฉบับนี้

เอกสารอ้างอิง

1. Heman C. Schepler. 1950b. The Chronology of PI. *Mathematics Magazine.* 23(4): 216-228.
2. Hobson and Ernest William. 1913 *"Squaring the circle" A history of the problem.* London: Cambridge University Press. p. 13-44.
3. Heman C. Schepler. 1950a. The Chronology of PI. *Mathematics Magazine.* 23(3): 165-170.
4. Ranjan Roy. 1990. The Discovery of the Series Formula for π by Leibniz, Gregory and Nilakantha. *Mathematics Magazine.* 63(5): 291-306.
5. Heman C. Schepler. 1950c. The Chronology of PI. *Mathematics Magazine.* 23(5): 279-283.
6. Alexander J. Yee and Shigeru Kondo. 2013, December 28. *12.1 Trillion Digits of P.* Available from http://www.numberworld.org/misc_runs/pi-12t. 23 April 2015.
7. Steve Selvin. 1975a. A Problem in Probability (Letter to the Editor). *The American Statistician.* 29(1): 67.
8. Steve Selvin. 1975b. On the Monty Hall Problem (Letter to the Editor). *The American Statistician.* 29(3): 131-134.

9. John Tierney. 1991, July 21. Behind Monty Hall's Doors, Puzzle, Debate and Answer?, *The New York Times.* p. 1A.
10. Stephen Lucas, Jason Rosenhouse and Andrew Schepler. 2009. The Monty Hall Problem, Reconsidered. *Mathematics Magazine.* 82(5): 332-342.
11. Jeffrey Rosenthal. 2008. Monty Hall, Monty fall, Monty crawl. *Math Horizons.* 16(1): 5-7.
12. Joe Roma and Irvin Snider. 2011. The Full Monty. In the MWSUG conference. Retrieved from http://www.mwsug.org/index.php/2011-proceedings.html. 23 April 2015.
13. Alberto Zorzi. 2009. Cars, Goat, π and *e. Mathematics Magazine.* 82(5): 360-363.
14. Fahri Aydos. 2012. *Pi Calculation.* Available from http://aydos.com/pi. 23 April 2015.

ได้รับบทความวันที่ 30 มกราคม 2558
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 27 เมษายน 2558