บทความวิชาการ

สมบัติและตัวอย่างที่สำคัญของค่าเฉลี่ยสำหรับตัวดำเนินการเชิงบวก

ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม[1]

บทคัดย่อ

บทความวิชาการนี้นำเสนอสมบัติที่สำคัญและตัวอย่างต่างๆของค่าเฉลี่ยสำหรับตัวดำเนินการเชิงบวกบนปริภูมิฮิลเบิร์ต วิธีการนำเข้าสู่แนวคิดของค่าเฉลี่ยดังกล่าวใช้สัจพจน์ กล่าวคือเราพิจารณาสมบัติต่างๆของค่าเฉลี่ยแบบฉบับ ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก และค่าเฉลี่ยเรขาคณิต ในกรณีทั่วไปค่าเฉลี่ยสำหรับตัวดำเนินการเชิงบวกคือการดำเนินการทวิภาคที่สอดคล้องกับสมบัติสี่อย่างคือ ความเป็นทางเดียว อสมการหม้อแปลงไฟฟ้า ภาวะต่อเนื่องจากข้างบนและสมบัติจุดตรึง ซึ่งเป็นสมบัติเกี่ยวกับอันดับ พีชคณิต และทอพอโลยี ผลที่ตามมาคือค่าเฉลี่ยใดๆจะมีสมบัติเอกพันธ์เชิงบวก ความยืนยงภายใต้สมภาค ความเว้า และสมบัติการอยู่ระหว่าง ทฤษฎีบทสำคัญกล่าวว่ามีการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างค่าเฉลี่ย ฟังก์ชันทางเดียวเชิงตัวดำเนินการและเมเชอร์โบเรล ค่าเฉลี่ยใดๆ จะอยู่ในรูปของอินทิกรัลของค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกถ่วงน้ำหนักเทียบกับเมเชอร์ความน่าจะเป็นโบเรลบนช่วงปิดหนึ่งหน่วย ตัวอย่างที่สำคัญของค่าเฉลี่ยที่นิยามข้างต้นได้แก่ ค่าเฉลี่ยชัด ค่าเฉลี่ย เลขคณิตถ่วงน้ำหนัก ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกถ่วงน้ำหนัก ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตถ่วงน้ำหนัก ค่าเฉลี่ยเสมือนเลขคณิตยกกำลัง ค่าเฉลี่ยลอการิทึม และค่าเฉลี่ยเฮอรัน ยิ่งกว่านั้นผลรวมเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงบวกซึ่งมีผลรวมเป็นหนึ่ง การสลับเปลี่ยน การผูกผัน คู่ และการประกอบของค่าเฉลี่ยใดๆ เป็นค่าเฉลี่ยด้วยเช่นกัน

คำสำคัญ: ค่าเฉลี่ย ตัวดำเนินการเชิงบวก ฟังก์ชันทางเดียวเชิงตัวดำเนินการ เมเชอร์โบเรล

[1] ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

*ผู้นิพนธ์ประสานงาน e-mail: kcpattra@kmitl.ac.th

Properties and Examples of Means for Positive Operators

Pattrawut Chansangiam[2]

ABSTRACT

This article reviews significant properties and various examples of means for positive operators on a Hilbert space. We use axiomatic approach for the concept of means. That is, we consider properties of classical means, namely, arithmetic mean, harmonic mean and geometric mean. In general, a mean for positive operators is defined to be a binary operation having four properties: monotonicity, transformer inequality, continuity from above and fixed point property; such properties concern order, algebra and topology. It follows that every operator mean satisfies positive homogeneity, congruent invariance, concavity and betweenness. It is a fundamental that there is a one-to-one correspondence between operator means, operator monotone functions and Borel measures. Every mean has an integral representation with respect to a probability Borel measure on the unit interval. Practical examples of operator means are trivial means, weighted arithmetic means, weighted harmonic means, weighted geometric means, quasi-arithmetic power means, logarithmic mean and Heron means. Moreover, convex combinations, transposes, adjoints, duals and compositions of means are also means.

Keywords: mean, positive operator, operator monotone function, Borel measure

[2]Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
[*]Corresponding author, e-mail: kcpattra@kmitl.ac.th

บทนำ

แนวคิดของ “ค่าเฉลี่ย” เป็นแนวคิดที่สำคัญและคุ้นเคยกันดีในคณิตศาสตร์ แนวคิดนี้เป็นเครื่องมือที่สำคัญทั้งในเชิงทฤษฎีและการนำไปใช้ในสาขาอื่นๆที่เกี่ยวข้อง ค่าเฉลี่ยของจำนวนจริงบวกได้ถูกศึกษามาตั้งแต่สมัยกรีกโบราณในสำนักวิชาของพิทาโกรัส [1] โดยค่าเฉลี่ยของจำนวนจริงบวกได้ถูกนิยามโดยใช้อัตราส่วน เช่น ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของจำนวนจริงบวก a และ b คือจำนวนจริงบวก m ที่เป็นผลเฉลยของสมการ

$$\frac{a-m}{m-b} = \frac{a}{a}$$

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของจำนวนจริงบวก a และ b คือจำนวนจริงบวก m ที่เป็นผลเฉลยของสมการ

$$\frac{a-m}{m-b} = \frac{a}{m} = \frac{m}{b}$$

แนวคิดดังกล่าวได้ถูกพัฒนามาเรื่อยๆ จนถึงศตวรรษที่ 20 โดยนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงหลายท่าน ต่อมาในปี ค.ศ. 1969 มีการศึกษาการบวกแบบขนาน (parallel sum) สำหรับเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน (positive definite matrices) ซึ่งเป็นทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ระบบวงจรไฟฟ้าที่มีหลายพอร์ต [2] จึงทำให้เกิดแนวคิดของค่าเฉลี่ยแบบต่างๆสำหรับเมทริกซ์ดังกล่าว ต่อมาการบวกแบบขนานสำหรับตัวดำเนินการเชิงบวกได้ถูกศึกษาใน [3] ทำให้เกิดแนวคิดของค่าเฉลี่ยสำหรับตัวดำเนินการเชิงบวกบนปริภูมิฮิลเบิร์ตซึ่งเป็นการวางนัยทั่วไปของค่าเฉลี่ยสำหรับเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

บทความนี้จะกล่าวถึงสมบัติและตัวอย่างต่างๆที่สำคัญของค่าเฉลี่ยสำหรับตัวดำเนินการเชิงบวกบนปริภูมิฮิลเบิร์ตเหนือฟิลด์ของจำนวนเชิงซ้อน โดยใช้วิธีการนำเสนอในเชิงสัจพจน์ กล่าวคือ เราจะพิจารณาสมบัติต่างๆที่สำคัญของการดำเนินการทวิภาคสำหรับตัวดำเนินการเชิงบวกเสียก่อน แล้วจึงพิจารณาว่าค่าเฉลี่ยที่เรารู้จักกันดีซึ่งได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต และค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกมีสมบัติใดบ้างร่วมกัน และสมบัติใดบ้างที่จะเป็นนิยามสำหรับค่าเฉลี่ยในกรณีทั่วไปสำหรับตัวดำเนินการเชิงบวก

ในหัวข้อถัดไปเราจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับตัวดำเนินการบนปริภูมิฮิลเบิร์ต หัวข้อที่สามกล่าวถึงสมบัติที่สำคัญที่จะนำมาพิจารณาเป็นนิยามของค่าเฉลี่ย รวมทั้งพิจารณาว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต และค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก มีสมบัติใดบ้าง ในหัวข้อที่สี่เราจะให้นิยามในกรณีทั่วไปของค่าเฉลี่ยสำหรับตัวดำเนินการเชิงบวก รวมทั้งกล่าวถึงทฤษฎีบทต่างๆที่สำคัญ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างค่าเฉลี่ย ฟังก์ชันทางเดียวเชิงตัวดำเนินการ (operator monotone function) และเมเชอร์โบเรล (Borel measure) ในหัวข้อสุดท้ายเราจะยกตัวอย่างค่าเฉลี่ยที่สำคัญของตัวดำเนินการเชิงบวก

ความรู้พื้นฐาน

ให้ $(H, \langle \bullet,\bullet \rangle)$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตเหนือฟิลด์ของจำนวนเชิงซ้อน ให้ $B(H)$ แทนเซตของตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขตทั้งหมดบน H ตัวดำเนินการ $A \in B(H)$ จะกล่าวว่าเป็น

- *ตัวดำเนินการเชิงบวก (positive operator)* ก็ต่อเมื่อ A เป็นตัวดำเนินการผูกพันในตัว (self-adjoint operator) และ $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ สำหรับทุก $x \in H$

- *ตัวดำเนินการที่เป็นบวกแน่นอน (positive definite operator)* ก็ต่อเมื่อ A เป็นตัวดำเนินการเชิงบวกที่หาผกผันได้ กำหนดสัญลักษณ์ต่างๆ ดังนี้
- $B(H)^{sa}$ แทนเซตของตัวดำเนินการผูกพันในตัวทั้งหมดบน H
- $B(H)^{+}$ แทนเซตของตัวดำเนินการเชิงบวกทั้งหมดบน H
- $B(H)^{++}$ แทนเซตของตัวดำเนินการที่เป็นบวกแน่นอนทั้งหมดบน H
- $\mathbb{R}^{+}$ แทนเซตของจำนวนจริงบวกรวมกับศูนย์

เนื่องจาก $B(H)^{sa}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟิลด์ $\mathbb{R}^{+}$ โดยมี $B(H)^{+}$ เป็นกรวยเชิงบวก (positive cone) เราจึงสามารถนิยามอันดับของตัวดำเนินการผูกพันในตัว A และ B บน H ได้อย่างธรรมชาติ ดังนี้

$$A \geq B \Leftrightarrow A - B \in B(H)^{+}$$

ความสัมพันธ์นี้เป็นการเรียงอันดับบางส่วน (partial order) ในทำนองเดียวกัน สำหรับ $A, B \in B(H)^{sa}$ นิยาม

$$A > B \Leftrightarrow A - B \in B(H)^{++}$$

ในกรณีเฉพาะ $A \geq 0$ หมายความว่า A เป็นตัวดำเนินการเชิงบวก และ $A > 0$ หมายความว่า A เป็นตัวดำเนินการที่เป็นบวกแน่นอน

ลำดับ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ หรือเขียนอย่างย่อว่า A_n จะกล่าวว่า*ลู่เข้าในทอพอโลยีเชิงตัวดำเนินการแบบเข้ม (strong-operator topology)* ก็ต่อเมื่อ $A_n x$ ลู่เข้าสู่ Ax (เทียบกับทอพอโลยีที่ได้จากนอร์มบน H) สำหรับทุก $x \in H$ ในบทความนี้การลู่เข้าจะหมายถึงการลู่เข้าในทอพอโลยีเชิงตัวดำเนินการแบบเข้ม สำหรับลำดับ A_n ใน $B(H)^{sa}$ สัญลักษณ์ $A_n \downarrow A$ หมายความว่า A_n เป็นลำดับลด (เทียบกับอันดับบางส่วนของตัวดำเนินการ) ซึ่งลู่เข้าสู่ A เราจะได้ว่าลิมิตของลำดับของตัวดำเนินการเชิงบวกที่ลู่เข้าจะเป็นตัวดำเนินการเชิงบวก

สมบัติที่สำคัญของค่าเฉลี่ยสำหรับตัวดำเนินการ

ค่าเฉลี่ย M สำหรับตัวดำเนินการเชิงบวกบนปริภูมิฮิลเบิร์ต H คือการดำเนินการทวิภาค

$$M : B(H)^{+} \times B(H)^{+} \rightarrow B(H)^{+}$$

(นั่นคือ $M(A, B) \geq 0$ สำหรับ $A, B \geq 0$) ที่สอดคล้องกับสมบัติบางอย่าง สมบัติที่สำคัญของการดำเนินการดังกล่าวที่เราต้องการมีดังต่อไปนี้ ให้ $A, A', B, B' \in B(H)^{+}$

(M1) *ความเป็นทางเดียว (monotonicity)* นั่นคือ $A \geq A',\ B \geq B' \Rightarrow M(A, B) \geq M(A', B')$

(M2) *สมบัติเอกพันธ์เชิงบวก (positive homogeneity)* นั่นคือ $M(kA, kB) = kM(A, B)$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{R}^{+}$

(M3) *อสมการหม้อแปลงไฟฟ้า (transformer inequality)* นั่นคือ สำหรับทุก $X \in B(H)$

$$M(X^* AX,\ X^* BX) \leq X^* M(A, B)\ X$$

ชื่อของสมบัตินี้มีที่มาจากการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าซึ่งมีการเชื่อมต่อกับหม้อแปลงไฟฟ้า [2]

(M4) *ความยืนยงภายใต้สมภาค (congruence invariance)* นั่นคือ สำหรับทุก $X \in B(H)$ ที่หาผกผันได้

$$M(X^* AX, X^* BX) = X^* M(A, B) X$$

นั่นคือ M ยืนยงภายใต้*การแปลงสมภาค* $A \mapsto X^* AX$ สำหรับทุก $X \in B(H)$ ที่หาผกผันได้

(M5) *ความเว้า (concavity)* นั่นคือ สำหรับทุก $t \in [0,1]$

$$M(tA+(1-t)B, tA'+(1-t)B') \geq tM(A, A')+(1-t)M(B,B')$$

(M6) *ภาวะต่อเนื่องจากด้านบน (continuity from above)* นั่นคือ ถ้า $A_n \downarrow A$ และ $B_n \downarrow B$ แล้ว

$$M(A_n, B_n) \downarrow M(A, B)$$

(M7) *สมบัตินิจพล หรือสมบัติจุดตรึง (idempotent or fixed point property)* นั่นคือ $M(A, A)=A$

(M8) *สมบัติการอยู่ระหว่าง (betweenness)* นั่นคือ $A \leq B \Rightarrow A \leq M(A, B) \leq B$

ในการศึกษาค่าเฉลี่ยของเมทริกซ์หรือตัวดำเนินการในกรณีทั่วไป สิ่งแรกที่ต้องพิจารณาคือ ค่าเฉลี่ยพื้นฐานที่เรารู้จัก ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (arithmetic mean) ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก (harmonic mean) และค่าเฉลี่ยเรขาคณิต (geometric mean)

*ค่าเฉลี่ยเลขคณิต*ของตัวดำเนินการ $A, B \in B(H)^+$ นิยามโดย

$$A \nabla B = \frac{1}{2}(A+B)$$

ทฤษฎีบทที่ 1 *ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของตัวดำเนินการสอดคล้องกับสมบัติ (M1)-(M8) ยิ่งกว่านั้นค่าเฉลี่ยนี้มีสมบัติสมมาตร (symmetry) นั่นคือ* $A\nabla B = B\nabla A$ *สำหรับทุก* $A, B \geq 0$ *และสมบัติสัมพรรค (affine) นั่นคือ*

$$(kA+C)\nabla(kB+C) = k(A\nabla B)+C$$

สำหรับทุก $A, B, C \geq 0$ และ $k \in \mathbb{R}^+$

พิสูจน์ ได้โดยตรงจากนิยาม

*ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก*ของตัวดำเนินการ $A, B \in B(H)^{++}$ นิยามโดย

$$A!\,B = 2(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$$

ในกรณีที่ A และ B เป็นตัวดำเนินการเชิงบวกใดๆ เรานิยาม

$$A!B = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (A+\varepsilon I)!(B+\varepsilon I)$$

เมื่อลิมิตดังกล่าวพิจารณาในทอพอโลยีเชิงตัวดำเนินการแบบเข้ม

ทฤษฎีบทที่ 2 *ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกของตัวดำเนินการสอดคล้องกับสมบัติ (M1)-(M8) ยิ่งกว่านั้นยังสอดคล้องกับสมบัติสมมาตร นั่นคือ* $A!B = B!A$ *สำหรับทุก* $A, B \geq 0$

พิสูจน์ การพิสูจน์สมบัติความเป็นทางเดียว (M1) และสมบัติความเว้า (M5) ดูได้จากงานวิจัย [4] ส่วนสมบัติอื่นๆ สามารถพิสูจน์ได้โดยตรงจากนิยามของค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวดำเนินการเชิงบวก $A, B \in B(H)$ ถูกนำเสนอเป็นครั้งแรก [5] ดังนี้

$$A \# B = \max\{T \geq 0 : |\langle Tx, y\rangle| \leq \| A^{1/2} x\| \, \| B^{1/2} y\| \; \forall x, y \in H\} \tag{1}$$

เมื่อค่าสูงสุดดังกล่าวพิจารณาเทียบกับอันดับบางส่วนของตัวดำเนินการ อย่างไรก็ตามนิยามดังกล่าวยากต่อการนำไปใช้ ต่อมา Ando [6] ได้ให้นิยามของค่าเฉลี่ยเรขาคณิตสำหรับตัวดำเนินการเชิงบวก $A, B \in B(H)$ ที่หาผกผันได้ ดังนี้

$$A \# B = A^{1/2} (A^{-1/2} B A^{-1/2})^{1/2} A^{1/2}$$

นิยามดังกล่าวมาจากสมบัติที่เป็นธรรมชาติของค่าเฉลี่ยเรขาคณิตสองเงื่อนไขต่อไปนี้

- $A \# B = (AB)^{1/2}$ เมื่อ $AB = BA$
- $X^* (A \# B) X = (X^* AX) \# (X^* BX)$ สำหรับทุก $X \in B(H)$ ที่หาผกผันได้

ในกรณีที่ A และ B เป็นตัวดำเนินการเชิงบวกใดๆ เรานิยาม

$$A \# B = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (A + \varepsilon I) \# (B + \varepsilon I) \tag{2}$$

ในงานวิจัย [6] ได้แสดงว่านิยามของค่าเฉลี่ยเรขาคณิตในสมการ (1) และ (2) นั้นสมมูลกัน

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของ $A, B \geq 0$ สามารถนิยามได้จากกระบวนการทำซ้ำดังนี้ [7]

$$A_1 = A,\ B_1 = B,\ A_{n+1} = A_n ! B_n,\ B_{n+1} = A_n \nabla B_n,\ n \in \mathbb{N}$$

จะได้ว่าลำดับ A_n เป็นลำดับลด และลำดับ B_n เป็นลำดับเพิ่ม ลำดับทั้งสองลู่เข้าโดยมีลิมิตร่วมกันคือ $A \# B$

ในงานวิจัย [8] ได้แสดงว่า $A \# B$ คือผลเฉลย X เพียงหนึ่งเดียวของสมการริกกาติ

$$XA^{-1} X = B$$

สมการริกกาติดังกล่าวมีที่มาจากทฤษฎีระบบในสาขาวิศวกรรมระบบควบคุม

ทฤษฎีบทที่ 3 *ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวดำเนินการสอดคล้องกับสมบัติ (M1)-(M8) สมบัติสมมาตร นั่นคือ* $A \# B = B \# A$ *สำหรับทุก* $A, B \geq 0$ *และสมบัติภาวะคู่กันในตัว (self-duality) นั่นคือสำหรับทุก* $A, B > 0$ *จะได้ว่า*

$$(A \# B)^{-1} = A^{-1} \# B^{-1}$$

พิสูจน์ การพิสูจน์สมบัติความเป็นทางเดียว (M1) และสมบัติความเว้า (M5) ดูได้จากงานวิจัย [4] สำหรับสมบัติสมมาตรพิสูจน์ได้โดยใช้ความรู้ที่ว่า $A \# B$ คือผลเฉลย X เพียงหนึ่งเดียวของสมการริกกาติ $XA^{-1}X = B$ ส่วนสมบัติอื่นๆ สามารถพิสูจน์ได้โดยตรงจากนิยามของค่าเฉลี่ยเรขาคณิต [9]

ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกและค่าเฉลี่ยเรขาคณิตเป็นเครื่องมือสำคัญในการศึกษาอสมการของเมทริกซ์หรือตัวดำเนินการ โดยมีแนวคิดต้นฉบับในงานวิจัย [4]

ค่าเฉลี่ย ฟังก์ชันทางเดียวเชิงตัวดำเนินการและเมเชอร์โบเรล

จากสมบัติของค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกและค่าเฉลี่ยเรขาคณิต นักคณิตศาสตร์ชื่อ Kubo กับ Ando [10] ได้นำเสนอนิยามของค่าเฉลี่ยในกรณีทั่วไปสำหรับตัวดำเนินการเชิงบวกดังนี้

บทนิยามที่ 1 *ค่าเฉลี่ย*ของตัวดำเนินการเชิงบวก คือการดำเนินการทวิภาคสำหรับตัวดำเนินการเชิงบวกที่สอดคล้องกับสมบัติความเป็นทางเดียว (M1) อสมการหม้อแปลงไฟฟ้า (M3) ภาวะต่อเนื่องจากด้านบน (M6) และสมบัติจุดตรึง (M7)

สังเกตว่า

- (M1) เป็นสมบัติเกี่ยวกับอันดับ
- (M3) เป็นสมบัติเกี่ยวกับอันดับและพีชคณิต (การคูณ)
- (M6) เป็นสมบัติเกี่ยวกับอันดับและทอพอโลยี
- (M7) เป็นสมบัติที่บังคับให้ค่าเฉลี่ยระหว่างตัวดำเนินการเดียวกันเป็นตัวดำเนินการนั้น

โดยสมบัติ (M7) สามารถแทนที่ได้ด้วยสมบัติการอยู่ระหว่าง (M8) แนวคิดของค่าเฉลี่ยเชิงสัจพจน์สำหรับเมทริกซ์หรือตัวดำเนินการสามารถศึกษาได้จาก [11-13] แนวคิดดังกล่าวมีการประยุกต์ในฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์เรื่องเอนโทรปี ([14]) ในทฤษฎีตัวดำเนินการเรื่องอสมการของตัวดำเนินการ ([15-18]) และสมการของตัวดำเนินการ ([19])

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกและค่าเฉลี่ยเรขาคณิตเป็นค่าเฉลี่ยในแนวคิดของคูโบ-อันโด ในหัวข้อถัดไปเราจะแสดงตัวอย่างของค่าเฉลี่ยอื่นๆที่สำคัญ

เครื่องมือสำคัญในทฤษฎีค่าเฉลี่ยคือ ฟังก์ชันทางเดียวเชิงตัวดำเนินการ (operator monotone function) ซึ่งได้มีการศึกษาอย่างเป็นระบบใน [20] (ดูเอกสารอ้างอิง [12, 21] เพิ่มเติมเนื่องจาก [20] เป็นภาษาเยอรมัน)

บทนิยามที่ 2 ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ จะเรียกว่า*ฟังก์ชันทางเดียวเชิงตัวดำเนินการ* ก็ต่อเมื่อ

$$A \leq B \Rightarrow f(A) \leq f(B)$$

สำหรับทุกตัวดำเนินการเชิงบวก A และ B บน H สำหรับทุกปริภูมิฮิลเบิร์ต H ในที่นี้ $f(A)$ คือ*แคลคูลัสฟังก์ชันนัล (functional calculus)* ของ f ที่ A

จะเห็นว่าเงื่อนไข $A \leq B \Rightarrow f(A) \leq f(B)$ ในกรณีที่ $H = \mathbb{C}$ คือเงื่อนไขของฟังก์ชันทางเดียว (monotone increasing function) นั่นเอง ดังนั้นเงื่อนไขของฟังก์ชันทางเดียวเชิงตัวดำเนินการจึงเข้มกว่าฟังก์ชันทางเดียวที่เราคุ้นเคยมาก นั่นคือมีฟังก์ชันทางเดียวที่ไม่ใช่ฟังก์ชันทางเดียวเชิงตัวดำเนินการ เช่น $f(x) = x^2$

ตัวอย่างที่ 1

1. ฟังก์ชันเส้นตรงที่มีความชันไม่เป็นลบเป็นฟังก์ชันทางเดียวเชิงตัวดำเนินการบน $\mathbb{R}^+$ (พิสูจน์ได้โดยตรงจากนิยาม)

2. ฟังก์ชัน $f(x) = x^p$ เป็นฟังก์ชันทางเดียวเชิงตัวดำเนินการบน $\mathbb{R}^+$ ก็ต่อเมื่อ $p \in [0, 1]$ นั่นคือสำหรับทุก $p \in [0, 1]$ จะได้ว่า

$$A \geq B \geq 0 \Rightarrow A^p \geq B^p$$

ข้อเท็จจริงนี้เรียกว่า*อสมการของโลว์เนอร์-ไฮน์ (Löwner-Heinz inequality)* ซึ่งพิสูจน์เป็นครั้งแรกใน [20]

3. ฟังก์ชัน $f(x) = (x-1)/\log x$ เป็นฟังก์ชันทางเดียวเชิงตัวดำเนินการบน $\mathbb{R}^+$ ในที่นี้เรานิยาม $f(0) \equiv 0$ และ $f(1) \equiv 1$ โดยใช้ภาวะต่อเนื่อง (ดูการพิสูจน์ข้อความจริงนี้ใน [22])

4. ฟังก์ชัน $f(x) = x \log x/(x-1)$ เป็นฟังก์ชันทางเดียวเชิงตัวดำเนินการบน $\mathbb{R}^+$ ในที่นี้เรานิยาม $f(0) \equiv 0$ และ $f(1) \equiv 1$ โดยใช้ภาวะต่อเนื่อง [22]

5. ฟังก์ชัน $f(x) = [(1+x^p)/2]^{1/p}$ เป็นฟังก์ชันทางเดียวเชิงตัวดำเนินการบน $\mathbb{R}^+$ ก็ต่อเมื่อ $p \in [-1,1]$ ในที่นี้เมื่อ $p = 0$ โดยใช้ภาวะต่อเนื่องในการนิยาม [21]

6. เซตของฟังก์ชันทางเดียวเชิงตัวดำเนินการมีสมบัติปิดภายใต้การบวก การคูณด้วยค่าคงตัวที่ไม่เป็นลบและลิมิตรายจุด (pointwise limits)

ทฤษฎีสำคัญของค่าเฉลี่ยกล่าวว่ามีการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงระหว่างค่าเฉลี่ย ฟังก์ชันทางเดียวเชิงตัวดำเนินการ และเมเชอร์โบเรล ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 4 *สำหรับแต่ละค่าเฉลี่ย σ จะมีฟังก์ชันทางเดียวเชิงตัวดำเนินการ $f:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}^{+}$ ซึ่ง $f(1)=1$ เพียงฟังก์ชันเดียวที่ทำให้*

$$f(x)I = I\,\sigma\,(xI), \qquad x\in\mathbb{R}^{+}$$

ยิ่งกว่านั้นการส่ง $\sigma\mapsto f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง

พิสูจน์ ดูเอกสารอ้างอิง [10]

ฟังก์ชัน f ดังกล่าวเรียกว่า*ฟังก์ชันตัวแทน (representing function)* ของค่าเฉลี่ย σ

ทฤษฎีบทที่ 5 *สำหรับแต่ละค่าเฉลี่ย σ จะมีเมเชอร์ความน่าจะเป็นโบเรล (probability Borel measure) μ บน* [0,1] *เพียงเมเชอร์เดียวที่ทำให้*

$$A\ \sigma B = \int_{[0,1]} (A\,!_t\,B)\,d\mu(t), \qquad A,B\geq 0 \tag{3}$$

โดยอินทิกรัลดังกล่าวเป็นอินทิกรัลในแนวคิดของบ๊อคเนอร์ (Bochner integral) และ $A\,!_t\,B$ คือค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกถ่วงน้ำหนักซึ่งนิยามโดย

$$A\,!_t\,B = [(1\text{-}t)A^{-1} + tB^{-1}]^{-1}, \qquad A,B>0$$

และ $A\,!_t\,B$ นิยามสำหรับ $A,B\geq 0$ โดยใช้ภาวะต่อเนื่อง

ยิ่งกว่านั้นการส่ง $\sigma\mapsto\mu$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง

พิสูจน์ ใช้สมบัติของค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกถ่วงน้ำหนักร่วมกับทฤษฎีบทการลู่เข้าครอบงำ (dominated convergence theorem) [23]

เมเชอร์ μ ดังกล่าวเรียกว่า*เมเชอร์ตัวแทน (representing measure)* ของค่าเฉลี่ย σ

ข้อสังเกต

1. ทฤษฎีบทที่ 5 กล่าวว่ามีการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างค่าเฉลี่ยและเมเชอร์ความน่าจะเป็นโบเรล นั่นคือ ถ้าเรามีค่าเฉลี่ยแล้วเราจะสร้างเมเชอร์ดังกล่าวได้โดยค่าเฉลี่ยและเมเชอร์จะสัมพันธ์กันตามเงื่อนไข (3) ในทางกลับกันเมื่อเรามีเมเชอร์ เราจะสามารถสร้างค่าเฉลี่ยได้โดยใช้สูตร (3)

2. ทฤษฎีบทนี้ให้รูปแบบทั่วไปของค่าเฉลี่ยสำหรับตัวดำเนินการเชิงบวกว่าอยู่ในรูปอินทิกรัล (3)

3. ทฤษฎีบทนี้แสดงให้เห็นถึงความสำคัญของค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกถ่วงน้ำหนัก โดยค่าเฉลี่ยใดๆ จะอยู่ในรูปอินทิกรัลของค่าเฉลี่ยนี้เทียบกับเมเชอร์ความน่าจะเป็นโบเรล นั่นคือค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกถ่วงน้ำหนักเป็นหน่วยโครงสร้าง (building blocks) สำหรับค่าเฉลี่ยใดๆ

จากทฤษฎีบทที่ 4 และทฤษฎีบทที่ 5 จะได้ว่ามีการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างค่าเฉลี่ย ฟังก์ชันทางเดียวเชิงตัวดำเนินการและเมเชอร์ความน่าจะเป็นโบเรล โดยฟังก์ชันและเมเชอร์ดังกล่าวมีความสัมพันธ์กันดังนี้ ([24])

$$f(x) = \int_{[0,1]} (1\,!_t\,x)\,d\mu(t), \qquad x\geq 0$$

เมื่ออินทิกรัลดังกล่าวคืออินทิกรัลเลอเบก (Lebesgue integral)

ทฤษฎีบทที่ 6 *ค่าเฉลี่ยใดๆ สอดคล้องกับสมบัติ (M1)-(M8)*

พิสูจน์ ใช้ทฤษฎีบทที่ 5 ร่วมกับสมบัติของค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกถ่วงน้ำหนัก

ตัวอย่างที่สำคัญของค่าเฉลี่ย

ตัวอย่างที่ 2 ค่าเฉลี่ยชัด (trivial means)

ค่าเฉลี่ยชัดทางซ้าย (the left-trivial mean) และ*ค่าเฉลี่ยชัดทางขวา (the right-trivial mean)* นิยามตามลำดับดังนี้

$$\omega_l : (A,\ B) \mapsto A, \qquad \omega_r : (A,\ B) \mapsto B$$

ฟังก์ชันตัวแทนของ ω_l และ ω_r คือฟังก์ชัน $f : x \mapsto 1$ และฟังก์ชัน $g : x \mapsto x$ ตามลำดับ เมเชอร์ตัวแทนของ ω_l และ ω_r คือเมเชอร์ δ_0 และ δ_1 ตามลำดับ ([23]) โดยในที่นี้ δ_t คือ*เมเชอร์ไดแรก (Dirac measure)* ที่ t ซึ่งนิยามสำหรับแต่ละเซตโบเรล E ใน [0,1] โดย

$$\delta_t(E) = \begin{cases} 1, & t \in E \\ 0, & t \notin E \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 3 ค่าเฉลี่ยพิทาโกเรียน (Pythagorean means) และรูปแบบถ่วงน้ำหนัก

*ค่าเฉลี่ยพิทาโกเรียน*คือค่าเฉลี่ยที่ศึกษาในสำนักของนักคณิตศาสตร์ชื่อพิทาโกรัสในสมัยกรีกโบราณ โดยประกอบด้วยค่าเฉลี่ย 3 รูปแบบดังนี้

- *ค่าเฉลี่ยเลขคณิตถ่วงน้ำหนัก (weighted arithmetic means)* ด้วยน้ำหนัก $\alpha \in (0,1)$ นิยามโดย

$$A \nabla_\alpha B = (1-\alpha)A + \alpha B$$

  ค่าเฉลี่ยนี้มีฟังก์ชันตัวแทนเป็น $f(x) = 1-\alpha + ax$ และเมเชอร์ตัวแทนคือ $(1-\alpha)\delta_0 + \alpha\delta_1$ [23]

- *ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกถ่วงน้ำหนัก (weighted harmonic means)* ด้วยน้ำหนัก $\alpha \in (0,1)$ นิยามโดย

$$A\,!_\alpha\, B = [(1-\alpha)A^{-1} + \alpha B^{-1}]^{-1}$$

  ค่าเฉลี่ยนี้มีฟังก์ชันตัวแทนเป็น $f(x) = x/(\alpha + (1-\alpha)x)$ และเมเชอร์ตัวแทนคือ δ_α [23]

- *ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตถ่วงน้ำหนัก (weighted geometric means)* ด้วยน้ำหนัก $\alpha \in (0,1)$ นิยามโดย

$$A \#_\alpha B = A^{1/2} (A^{-1/2} B A^{-1/2})^\alpha A^{1/2}$$

  ค่าเฉลี่ยนี้มีฟังก์ชันตัวแทนเป็น $f(x) = x^\alpha$ และเมเชอร์ตัวแทนคือ

$$d\mu(t) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi t^{1-\alpha}(1-t)^\alpha}\, dm(t)$$

เมื่อ m เป็นเมเชอร์เลอเบก (Lebesgue measure) บน [0, 1] (ดูเอกสารอ้างอิง [23])

ตัวอย่างที่ 4 ค่าเฉลี่ยเสมือนเลขคณิตยกกำลัง (quasi-arithmetic power means)
สำหรับแต่ละ $p \in [-1,1]$ และ $\alpha \in [0,1]$ ฟังก์ชัน

$$f_{p,\alpha}(x) = [1-\alpha+\alpha x^p]^{1/p}, \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

เป็นฟังก์ชันทางเดียวเชิงตัวดำเนินการบน $\mathbb{R}^+$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $f_{p,\alpha}(1) = 1$ (ในที่นี้เรานิยาม $f_{0,\alpha}$ โดยใช้ภาวะต่อเนื่อง) ฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันตัวแทนของค่าเฉลี่ยที่เรียกว่า*ค่าเฉลี่ยเสมือนเลขคณิตยกกำลัง*ที่มี*กำลัง*เป็น p และ*น้ำหนัก* α ซึ่งนิยามโดย

$$A \#_{p,\alpha} B = [(1-\alpha)A^p + \alpha B^p]^{1/p}$$

ค่าเฉลี่ยนี้มีสมบัติว่า $A \#_{p,\alpha} B = B \#_{p,1-\alpha} A$ และ

$$(A \#_{p,s} B) \#_{p,\alpha} (A \#_{p,t} B) = A \#_{p,(1-\alpha)s+\alpha t} B$$

สำหรับ $p \notin [-1,1]$ จะได้ว่า $\#_{p,\alpha}$ ไม่ใช่ค่าเฉลี่ยตามบทนิยามที่ 1 สำหรับทุก $\alpha \in [0,1]$ อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่ $p = 2$ และ $\alpha = 1/2$ การดำเนินการทวิภาคดังกล่าวรู้จักกันในสาขาวิศวกรรมหรือฟิสิกส์ว่า *รากกำลังสองเฉลี่ย* (root mean square)

ตัวอย่างที่ 5 ค่าเฉลี่ยลอการิทึม (the logarithmic mean)
*ค่าเฉลี่ยลอการิทึม*ของตัวดำเนินการเชิงบวกนิยามโดย

$$A \,\sigma\, B = A^{1/2} f(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2}$$

เมื่อ $f(x) = (x-1)/\log x$ ฟังก์ชัน f ดังกล่าวเป็นฟังก์ชันตัวแทนของค่าเฉลี่ยนี้ เมื่อ $A,B > 0$ โดยที่ $AB = BA$ และ $A \neq B$ จะได้ว่า

$$A \,\sigma\, B = (A-B)(\log A - \log B)^{-1}$$

เมเชอร์ตัวแทนของค่าเฉลี่ยนี้คือ (ดูเอกสารอ้างอิง [23])

$$d\mu(t) = \frac{1}{t(1-t)[\pi^2 + \log^2(t/(1-t))]} \, dm(t)$$

ค่าเฉลี่ยนี้มีความสำคัญในสาขาวิศวกรรมเคมีสำหรับการศึกษาเรื่องการถ่ายเทความร้อน [21]

ตัวอย่างที่ 6 คู่ของค่าเฉลี่ยลอการิทึม (the dual of logarithmic mean)

*คู่ของค่าเฉลี่ยลอการิทึม*คือค่าเฉลี่ยที่นิยามโดย

$$A \eta B = A^{1/2} g(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2}$$

เมื่อ $g(x) = x \log x/(x-1)$ ฟังก์ชัน g ดังกล่าวเป็นฟังก์ชันตัวแทนของค่าเฉลี่ยนี้ เมื่อ $A, B > 0$ โดยที่ $AB = BA$ และ $A \neq B$ จะได้ว่า

$$A \eta B = AB(A\text{-}B)^{-1}(\log A\text{-}\log B)$$

เมเชอร์ตัวแทนของค่าเฉลี่ยนี้คือเมเชอร์เลอเบก [23] นั่นคือ

$$A\eta B = \int_{[0,1]} (A!_t B)\, dt$$

ตัวอย่างที่ 7 ค่าเฉลี่ยเฮอรัน (Heron means)

*ค่าเฉลี่ยเฮอรัน*ที่มีน้ำหนักเป็น $\alpha \in [0,1]$ นิยามโดย

$$(A, B) \mapsto (1-\alpha)(A\#B) + \alpha(A\nabla B)$$

นั่นคือค่าเฉลี่ยเฮอรันเป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตถ่วงน้ำหนักระหว่างค่าเฉลี่ยเรขาคณิตกับค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยเฮอรันดังกล่าวมีฟังก์ชันตัวแทนเป็น

$$f(x) = (1-\alpha)x^{1/2} + \frac{\alpha}{2}(1+x)$$

และมีเมเชอร์ตัวแทนเป็น

$$d\upsilon(t) = (1-\alpha)d\mu(t) + \frac{\alpha}{2}(d\delta_0(t) + d\delta_1(t))$$

เมื่อเมเชอร์ μ เป็นเมเชอร์ตัวแทนของค่าเฉลี่ยเรขาคณิต

กรณีที่ $\alpha = \frac{2}{3}$ ค่าเฉลี่ยที่ได้เรียกว่า*ค่าเฉลี่ยเฮอรันเนียน (Heronian mean)* โดยชื่อดังกล่าวได้จากนักคณิตศาสตร์ในสมัยอียิปต์โบราณชื่อ เฮอโร (Hero of Alexandria) ซึ่งใช้ค่าเฉลี่ยนี้ในการคำนวณปริมาตรของพีระมิดยอดตัด

เราสามารถสร้างค่าเฉลี่ยใหม่จากค่าเฉลี่ยเดิมที่มีอยู่ได้ดังนี้ ให้ σ และ η เป็นค่าเฉลี่ย เรานิยาม*การบวก*และ*การคูณด้วยค่าคงตัว*ของค่าเฉลี่ยดังนี้

$$\sigma + \eta : (A, B) \mapsto (A\ \sigma B) + (A\ \eta B)$$
$$k\sigma : (A, B) \mapsto k(A\ \sigma B),\ k \in \mathbb{R}^+$$

จะได้ว่า $k_1\sigma + k_2\eta$ เป็นค่าเฉลี่ยเมื่อ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ โดยที่ $k_1 + k_2 = 1$

เรานิยาม*การสลับเปลี่ยน (transpose) การผูกพัน (adjoint)* และ*คู่ (dual)* ของค่าเฉลี่ย σ ตามลำดับดังนี้

$$\sigma' : (A, B) \mapsto B\ \sigma A, \qquad A, B \geq 0$$
$$\sigma^* : (A, B) \mapsto A^{-1}\ \sigma B^{-1})^{-1}, \qquad A, B > 0$$
$$\sigma^{\perp} : (A, B) \mapsto B^{-1}\ \sigma A^{-1})^{-1}, \qquad A, B > 0$$

จะได้ว่าการสลับเปลี่ยน คู่และการผูกพันของค่าเฉลี่ยเป็นค่าเฉลี่ย

ให้ σ_1, σ_2 และ η เป็นค่าเฉลี่ย เรานิยามการประกอบ (composition) ของ σ_1, η, σ_2 ดังนี้

$$\sigma_1(\eta)\sigma_2 : (A, B) \mapsto (A\sigma_1 B)\eta\, (A\sigma_2 B)$$

จะได้ว่า $\sigma_1(\eta)\sigma_2$ เป็นค่าเฉลี่ย

กิตติกรรมประกาศ

ผู้แต่งได้รับการสนับสนุนทุนพัฒนานักวิจัยจากกองทุนวิจัยสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เลขที่ KREF045710

เอกสารอ้างอิง

1. Toader, G. and Toader, S. 2005. Greek Means and the Arithmetic-Geometric Mean. *RGMIA Monographs,* Victoria University. p. 12-16.
2. Anderson, W.N. and Duffin, R.J. 1969. Series and Parallel Addition of Matrices. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 26: 576-594.
3. Anderson, W.N. and Trapp, G.E. 1975. Shorted Operators II. *SIAM Journal of Applied Mathematics.* 28: 60-71.
4. Ando, T. 1979. Concavity of Certain Maps on Positive Definite Matrices and Applications to Hadamard Products. *Linear Algebra and Its Applications.* 26: 203-241.
5. Pusz, W. and Woronowicz, S. 1975. Functional Calculus for Sesquilinear Forms and the Purification Map. *Reports on Mathematical Physics.* 8: 159-170.
6. Ando, T. 1978. *Topics on Operator Inequalities,* Lecture notes (mimeographed), Hokkaido Univ., Sapporo.
7. Anderson, W.N., Morley, T.D. and Trapp, G.E. 1979. Characterization of Parallel Subtraction. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America.* 76: 3599-3601.
8. Anderson, W.N. and Trapp, G.E. 1980. Operator Means and Electrical Networks. *Proc. 1980 IEEE International Symposium on Circuits and Systems.* 28-30 April 1980, Houston, Texas. p. 523-527.
9. ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม. 2557. ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวดำเนินการเชิงบวกบนปริภูมิฮิลเบิร์ต. วารสารวิทยาศาสตร์ลาดกระบัง 23(1): 100-109.
10. Kubo, F. and Ando, T. 1980. Means of Positive Linear Operators. *Mathemetische Annalen.* 246: 205-224.
11. Chansangiam, P. and Lewkeeratiyutkul, W. 2013. Characterizations of Connections for Positive Operators, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics.* 37: 1-13.
12. Hiai, F. 2010. Matrix Analysis: Matrix Monotone Functions, Matrix Means, and Majorizations. *Interdisciplinary Information Sciences.* 16(2): 139-248.
13. Bhatia, R. 2007. *Positive Definite Matrices.* New Jersey. Princeton University Press. p. 101-111.

14. Fujii, J.I. 1992. Operator Means and the Relative Operator Entropy. Operator Theory: Advances and Applications. 59: 161-172.
15. Furuta, T. 1989. A Proof via Operator Means of an Order Preserving Inequality. *Linear Algebra and Its Applications.* 113: 129-130.
16. Fujii, M. 1990. Furuta's Inequality and Its Mean Theoretic Approach. J*ournal of Operator Theory.* 23: 67-72.
17. Fujii, M. and Kamei, E. 1996. Mean Theoretic Approach to the Grand Furuta Inequality. *Proceedings of the American Mathematical Society.* 124: 2751-2756.
18. Mond, B., Pecaric, J. Sunde, J. and Varosanec, S. 1997. Operator Versions of Some Classical Inequalities. *Linear Algebra and Its Applications.* 264: 117-126.
19. Anderson, W.N., Morley, T.D. and Trapp, G.E. 1990. Positive Solutions to $X = A - BX^{-1} B$. *Linear Algebra and Its Applications.* 134: 53-62.
20. Löwner, C. 1934. Über Monotone Matrix Funktionen. *Mathematische Zeitschrift.* 38: 177-216. In German.
21. Bhatia, R. 1997. *Matrix Analysis.* New York. Springer-Verlag New York Inc. p. 102-110.
22. Hansen F. and Pedersen, G.K. 1982. Jensen's Inequality for Operators and Löwner's Theorem, *Mathemetische Annalen.* 258: 229-241.
23. Chansangiam, P. and Lewkeeratiyutkul, W. 2012. ได้จาก http://arxiv.org/abs/1211.1465. 7 November 2012.

ได้รับบทความวันที่ 31 กรกฎาคม 2557
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 30 ตุลาคม 2557