บทความวิจัย

การหาตัวแบบ EOQ ที่มีสินค้าขาดแคลนและสินค้ามีราคาสูงขึ้นโดยวิธีพีชคณิต

สิทธิกรณ์ คำรอด และ คณินทร์ ธีรภาพโอฬาร*

บทคัดย่อ

Teerapabolarn และ Khamrod [4] ได้ใช้วิธีพีชคณิตหาตัวแบบ EOQ ที่มีสินค้าขาดแคลนและสินค้ามีราคาสูงขึ้น โดยสมมุติให้มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษก่อนที่ระดับสินค้าคงคลังจะมีค่าเท่ากับ S^*-Q^* หน่วย ซึ่งไม่ครอบคลุมระดับสินค้าคงคลังอื่นๆ งานวิจัยนี้ใช้วิธีพีชคณิตปรับปรุงตัวแบบ EOQ ใน [4] โดยสมมุติให้ระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ q หน่วย และแบ่ง q ออกเป็นสามกรณีดังนี้ กรณีที่ 1 $0 \le q \le S^*$ กรณีที่ 2 S^*-$Q^* < q < 0$ และ กรณีที่ 3 $q = S^*$-Q^* โดยที่ Q^* คือ ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าเหมาะที่สุดก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น และ S^* คือ ระดับสินค้าคงคลังสูงสุดเหมาะที่สุดก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น สุดท้ายได้ยกตัวอย่างเชิงตัวเลขเพื่อแสดงการประยุกต์ใช้ผลลัพธ์ต่างๆ ที่ได้มา

คำสำคัญ: ตัวแบบ EOQ สินค้าขาดแคลน สินค้ามีราคาสูงขึ้น วิธีพีชคณิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

*ผู้นิพนธ์ประสานงาน, e-mail: kanint@buu.ac.th

Determination of EOQ Model with Shortage and Price Increase by Algebraic Method

Sittikorn Khamrod and Kanint Teerapabolarn*

ABSTRACT

Teerapabolarn and Khamrod [4] used algebraic method to determine the EOQ model with shortage and price increase by assuming a special order to be placed before the level of inventory is S^*-Q^* units, which does not cover other levels of inventory. This research uses the algebraic method to improve the EOQ model in [4] by assuming the level of inventory, while a special order is placed, to be q units and dividing q into three cases as follows: Case 1 $0 \leq q \leq S^*$, Case 2 $S^*-Q^* < q < 0$ and Case 3 $q = S^*-Q^*$, where Q^* is the optimal order quantity before price increase and S^* is the optimal maximum inventory before price increase. Finally, the numerical examples is provided to illustrate applications of the results obtained.

Keywords: EOQ model, shortage, price increase, algebraic method.

Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University

*Corresponding author, e-mail: kanint@buu.ac.th

บทนำ

ตั้งแต่ Harris [1] ได้ตีพิมพ์เผยแพร่ตัวแบบ EOQ (Economic Order Quantity) พื้นฐานของทฤษฎีสินค้าคงคลัง และเป็นตัวแบบแรกที่ใช้หาปริมาณการสั่งซื้อสินค้าที่เหมาะที่สุดในรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ ต่อจากนั้นเป็นต้นมา ตัวแบบพื้นฐานนี้ได้นำไปสู่การปรับปรุงพัฒนาเป็นตัวแบบ EOQ อื่นๆ อีกมากมาย ซึ่งตัวแบบ EOQ ที่น่าสนใจตัวแบบหนึ่งที่ได้พัฒนาและปรับปรุงมาจากตัวแบบพื้นฐานเพื่อให้สอดคล้องกับระบบสินค้าคงคลังที่เป็นจริงมากขึ้น คือ ตัวแบบ EOQ ที่สามารถประยุกต์ใช้กับกรณีที่มีการขึ้นราคาสินค้าโดยมีรายละเอียดพอสังเขปดังนี้ สมมติว่าในขณะนี้ราคาของสินค้าเท่ากับ c บาทต่อหน่วย และผู้ขายได้ประกาศขึ้นราคาในอีก 3 เดือนข้างหน้า ซึ่งทำให้ราคาของสินค้ามีค่าเพิ่มขึ้นอีก k บาทต่อหน่วย โดยมีราคาใหม่เป็น $c+k$ บาทต่อหน่วย และราคา $c+k$ บาทต่อหน่วยนี้จะคงที่อีกในช่วงเวลาหนึ่ง หลังจากนั้นอาจจะมีราคาสูงขึ้นอีก จะเห็นได้ว่าราคาของสินค้าที่กล่าวมานั้นจะมีราคาคงตัวในช่วงระยะเวลาหนึ่ง หลังจากนั้นจะมีราคาสูงขึ้นอีกครั้งเมื่อถึงจุดเวลาที่ผู้ขายได้กำหนด ดังนั้นสมมติฐานเบื้องต้นเกี่ยวกับราคาของสินค้าจะไม่คงตัวเหมือนกับในสมมติฐานของตัวแบบ EOQ พื้นฐาน ระบบสินค้าคงคลังดังกล่าวนี้ถูกพัฒนาขึ้นมาโดย Naddor [2] นอกจากนี้ Naddor [2] ได้สมมติให้มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษก่อนที่ระดับสินค้าคงคลังจะมีค่าเท่ากับ 0 หน่วย (หรือก่อนที่มีการขึ้นราคาสินค้า) และได้ใช้วิธีแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ (differential calculus method) หาตัวแบบ EOQ ที่ทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายได้สูงสุด ต่อมา Tersine [3] ได้ปรับปรุงตัวแบบดังกล่าวให้สามารถใช้ได้กับระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ q $(q \geq 0)$ หน่วย โดยใช้วิธีแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์เช่นเดียวกับ [2] และงานวิจัยในปัจจุบัน Teerapabolarn และ Khamrod [4] ได้ปรับปรุงระบบสินค้าคงคลังใน Naddor [2] โดยเพิ่มสมมติฐานเกี่ยวกับการขาดแคลนสินค้าเพิ่มเข้ามา คือ ยอมให้มีสินค้าขาดแคลนเกิดขึ้นในระบบสินค้าคงคลัง และได้สมมติให้มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษก่อนที่ระดับสินค้าคงคลังจะมีค่าเท่ากับ S^*-Q^* หน่วย โดยที่ Q^* คือ ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าเหมาะที่สุดก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น และ S^* คือ ระดับสินค้าคงคลังสูงสุดเหมาะที่สุดก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น นอกจากนี้ Teerapabolarn และ Khamrod [4] ได้ใช้วิธีพีชคณิต (algebraic method) หาตัวแบบ EOQ ที่มีสินค้าขาดแคลนและสินค้ามีราคาสูงขึ้นที่ทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายได้สูงสุด

เมื่อพิจารณาตัวแบบ EOQ ในงานวิจัยของ Teerapabolarn และ Khamrod [4] จะพบว่าตัวแบบนี้เหมาะสำหรับกรณีที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษก่อนที่ระดับสินค้าคงคลังจะมีค่าเท่ากับ S^*-Q^* หน่วยเท่านั้น ซึ่งไม่ครอบคลุมระดับสินค้าคงคลังอื่นๆ และเพื่อให้ครอบคลุมทุกระดับสินค้าคงคลังในขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ ดังนั้นในการศึกษาครั้งนี้เราต้องการปรับปรุงตัวแบบ EOQ ใน [4] โดยสมมติให้ระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ q หน่วย เมื่อ $0 \leq q \leq S^*$, S^*-$Q^* < q < 0$ และ $q = S^*$-Q^* (โดยใช้แนวคิดของ [3]) และวิธีที่ใช้ในการหาตัวแบบที่ต้องการ คือ วิธีพีชคณิตเช่นเดียวกับใน [4]

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อหาตัวแบบ EOQ ที่มีสินค้าขาดแคลนและสินค้ามีราคาสูงขึ้นเมื่อระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ q หน่วย โดยใช้วิธีพีชคณิต

สมมติฐานของตัวแบบ (Model Assumptions)

ในการศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีสินค้าคงคลัง ตัวแบบ EOQ ที่สนใจศึกษา คือ ตัวแบบ EOQ ที่มีการขาดแคลนสินค้าและสินค้ามีราคาสูงขึ้น ซึ่งมีสมมติฐานดังนี้

1. ความต้องการสินค้าต่อหน่วยเวลามีค่าคงตัว และทราบค่าแน่นอน
2. ระยะเวลาระหว่างการสั่งซื้อสินค้าจนได้รับสินค้า หรือช่วงเวลานำมีค่าเท่ากับศูนย์
3. การได้รับสินค้าที่สั่งซื้อ จะได้รับทีเดียวทั้งหมดทันทีที่สั่งซื้อสินค้า
4. จะทำการสั่งซื้อสินค้าเมื่อระดับสินค้าคงคลังลดลงมาเท่ากับจุดสั่งซื้อหรือเท่ากับจุดที่กำหนด
5. ปริมาณสินค้าที่สั่งซื้อในแต่ละครั้งมีค่าไม่คงตัว
6. ราคาสินค้าต่อหน่วยไม่คงตัวตลอดเวลา
7. ระบบสินค้าคงคลังจะดำเนินไปเรื่อยๆ อย่างต่อเนื่องไม่สิ้นสุด
8. ยอมให้มีสินค้าขาดแคลน หรือระดับสินค้าคงคลังมีค่าต่ำกว่าศูนย์

สัญกรณ์ของตัวแบบ (Model Notation)

สัญกรณ์ของตัวแบบ EOQ ที่ที่มีสินค้าขาดแคลนและสินค้ามีราคาสูงขึ้น มีดังนี้

D แทนอัตราความต้องการสินค้าต่อหน่วยเวลา
A แทนค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อสินค้าต่อครั้ง
c แทนราคาสินค้าที่สั่งซื้อต่อหน่วยสินค้า
i แทนค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าที่แปรไปตามราคาสินค้า
k แทนผลต่างของราคาสินค้าปกติและราคาสินค้าใหม่
p แทนค่าใช้จ่ายที่มีการขาดแคลนสินค้าที่แปรไปตามราคาสินค้า
q แทนระดับสินค้าคงคลังเมื่อมีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ
Q แทนปริมาณการสั่งซื้อสินค้าก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น
Q^* แทนปริมาณการสั่งซื้อสินค้าเหมาะที่สุดก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น
Q_0 แทนปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ
Q_1 แทนปริมาณการสั่งซื้อสินค้าหลังสินค้ามีราคาสูงขึ้น
Q_1^* แทนปริมาณการสั่งซื้อสินค้าเหมาะที่สุดหลังสินค้ามีราคาสูงขึ้น
S^* แทนระดับสินค้าคงคลังสูงสุดเหมาะที่สุดก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น
S_1^* แทนระดับสินค้าคงคลังสูงสุดเหมาะที่สุดหลังสินค้ามีราคาสูงขึ้น
S_0 แทนระดับสินค้าคงคลังสูงสุดเมื่อมีการสั่งซื้อแบบพิเศษ
S_0^* แทนระดับสินค้าคงคลังสูงสุดเมื่อมีการสั่งซื้อแบบพิเศษเหมาะที่สุด

Q_K แทนปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ
Q_K^* แทนปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด
C_s แทนค่าใช้จ่ายรวมเมื่อมีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ
C_n แทนค่าใช้จ่ายรวมที่เกิดขึ้นเมื่อไม่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ
G^* แทนค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุด

วิธีดำเนินการศึกษา

การหาตัวแบบ EOQ ที่มีสินค้าขาดแคลนและสินค้ามีราคาสูงขึ้นที่ต้องการสำหรับการศึกษาครั้งนี้มีขั้นตอนการดำเนินงานดังต่อไปนี้

1. ศึกษารายละเอียดของระบบสินค้าคงคลังในหนังสือของ Tersine [3] และงานวิจัยของ Teerapabolarn และ Khamrod [4]

2. ใช้วิธีพีชคณิตที่นำเสนอใน Grubbstrom [5] หาตัวแบบ EOQ ที่มีสินค้าขาดแคลนและสินค้ามีราคาสูงขึ้นที่ต้องการ โดยจัดรูปแบบของค่าใช้จ่ายในระบบสินค้าคงคลังที่สนใจให้อยู่ในรูปแบบกำลังสอง (quadratic form) ของปริมาณการสั่งซื้อสินค้า เพื่อทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายได้สูงสุด วิธีนี้มีหลักการคือ ให้ a_1 และ a_2 เป็นจำนวนจริงบวก และ x เป็นตัวแปรตัดสินใจ หลักการของวิธีนี้ คือ จัดฟังก์ชัน a_1x^2-a_2x ให้อยู่ในรูป $a_1\left(x^2 - \frac{2a_2x}{2a_1} + \left(\frac{a_2}{2a_1}\right)^2\right) - \frac{a_2^2}{4a_1}$ ซึ่งเรียกว่ารูปแบบกำลังสอง

3. ยกตัวอย่างที่สอดคล้องกับตัวแบบ EOQ ที่หาได้ในขั้นตอนที่ 2 เพื่อแสดงการประยุกต์ผลลัพธ์ต่างๆ ที่ได้มา

ผลการศึกษา

ผลลัพธ์หลักที่ต้องการหา คือ ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าเหมาะที่สุดของระบบสินค้าคงคลังที่มีสินค้าขาดแคลนและสินค้ามีราคาสูงขึ้น สามารถหาได้โดยใช้วิธีพีชคณิตดังนี้

บทตั้ง 1. ถ้า $Q^{**} = \sqrt{\frac{2AD}{i\delta}}\sqrt{\frac{i+p}{p}}$ และ $S^{**} = \sqrt{\frac{2AD}{i\delta}}\sqrt{\frac{p}{i+p}}$ แล้วจะได้ว่า

$$\frac{i\delta S^{**} + p\delta\left(Q^{**} - S^{**}\right)^2}{2Q^{**}} = \frac{AD}{Q^{**}} \tag{1}$$

พิสูจน์ แทนค่า Q^{**} และ S^{**} ใน $\frac{i\delta S^{**} + p\delta\left(Q^{**} - S^{**}\right)^2}{2Q^{**}}$ จะได้ว่า

$$\frac{i\delta S^{**} + p\delta\left(Q^{**} - S^{**}\right)^2}{2Q^{**}} = \frac{i\delta\left[\frac{2AD}{i\delta}\left(\frac{p}{i+p}\right)\right] + p\delta\frac{2ADi}{\delta(i+p)p}}{2Q^{**}} = \frac{AD}{Q^{**}}$$

ทฤษฎีบท 1. ให้ Q_0-S_0 = Q_1^*-S_1^* และ q แทนระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษแล้ว จะได้ระดับสินค้าคงคลังสูงสุดเมื่อมีการสั่งซื้อแบบพิเศษเหมาะที่สุด คือ

$$S_0^* = \frac{D}{ic}\left(\frac{2A}{Q_1^*}+k\right) \tag{2}$$

หน่วย ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด คือ

$$Q_K^* = S_0^*\text{-}q \tag{3}$$

หน่วย และค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุดมีค่าดังนี้

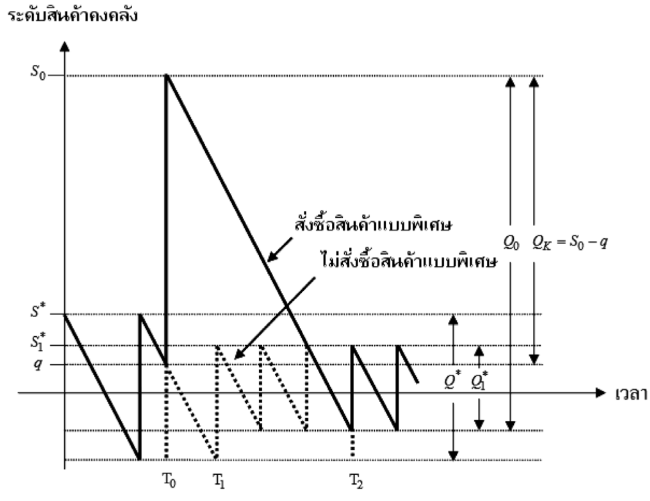
$$G^* = \begin{cases} A\left\{\left(\dfrac{Q_K^*}{Q^*}\right)^2 + \dfrac{2}{Q_1^*}(S^*-Q^*-S_1^*)+1\right\}+Z_1 & ; 0 \le q \le S^* \\ A\left\{\left(\dfrac{Q_K^*}{Q^*}\right)^2 - \left(\dfrac{q}{Q^*}\right)^2 + \dfrac{2}{Q_1^*}\left(S^*-Q^*-S_1^*\right)+1\right\}+Z_2 & ; S^*-Q^* < q < 0 \\ A\left\{\left(\dfrac{Q_K^*+q}{Q^*}-1\right)^2 + 2\left(\dfrac{S_1^*}{Q_1^*}-1\right)\right\}+Z_3 & ; q = S^*-Q^* \end{cases} \tag{4}$$

โดยที่ $Z_1 = \frac{pc}{2D}\left[(Q^*-S^*)^2-(S_1^*-Q_1^*)^2\right]$, $Z_2 = \frac{pc}{2D}\left[(Q^*-S^*+q)^2-(S_1^*-Q_1^*)^2\right]$

และ $Z_3 = -kq - \frac{pc}{2D}(S_1^*-Q_1^*)^2$ เมื่อ $Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{ic}}\sqrt{\frac{i+p}{p}}$, $S^* = \frac{pQ^*}{i+p}$, $Q_1^* = \sqrt{\frac{2AD}{i(c+k)}}\sqrt{\frac{i+p}{p}}$ และ $S_1^* = \frac{pQ_1^*}{i+p}$

พิสูจน์ การพิสูจน์ทฤษฎีบทแบ่งออกได้เป็นสามกรณีตามค่าของ q ดังนี้

กรณีที่ 1 $0 \le q \le S^*$



รูปที่ 1 ระบบสินค้าคงคลังที่มีสินค้าขาดแคลนและสินค้ามีราคาสูงขึ้นสำหรับกรณี $0 \le q \le S^*$

พิจารณาระบบสินค้าคงคลังในรูปที่ 1 เมื่อราคาสินค้ามีการปรับราคาจาก c บาทต่อหน่วยสินค้า เป็น $c+k$ บาทต่อหน่วยสินค้า ซึ่งการปรับราคาสินค้าให้มีราคาสูงขึ้นจะเกิดขึ้นหลังจุดเวลา T_0 ถ้าไม่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ ณ จุดเวลา T_0 เมื่อทำการสั่งซื้อสินค้าในภายหลัง ราคาสินค้าต่อหน่วยจะสูงขึ้นและปริมาณสินค้าที่สั่งซื้อเหมาะที่สุดจะมีค่าลดลง ซึ่งจะเห็นได้ว่าก่อนจุดเวลา T_0 จนถึงจุดเวลา T_0 สามารถจัดหาสินค้าเหมาะที่สุดด้วยราคา c บาทต่อหน่วยสินค้าในปริมาณ

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{ic}}\sqrt{\frac{i+p}{p}} \tag{5}$$

หน่วย เมื่อราคาสินค้ามีค่าเพิ่มขึ้นหลังจุดเวลา T_0 จะทำให้ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าเหมาะที่สุดเปลี่ยนเป็น

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2AD}{i(c+k)}}\sqrt{\frac{i+p}{p}} \tag{6}$$

หน่วย (ณ จุดเวลา T_1 เป็นต้นไป) จะเห็นว่าค่าของ Q^* มากกว่าค่าของ Q_1^* แสดงว่าเมื่อสินค้ามีราคาสูงขึ้น ปริมาณการสั่งซื้อสินค้าเหมาะสมที่สุดจะมีค่าลดลง ถ้ามีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ ณ จุดเวลา T_0 หรือมีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเมื่อระดับสินค้าคงคลังมีค่าเท่ากับ q $(0 \le q \le S^*)$ หน่วย ในปริมาณ Q_K หน่วย ดังรูปที่ 1 ค่าใช้จ่ายรวมในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 สามารถพิจารณาได้ดังนี้

ค่าใช้จ่ายที่เกิดจากการสั่งซื้อสินค้าในปริมาณ Q_K หน่วยมีค่าเท่ากับ $A+cQ_K$ ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาที่แปรไปตามราคาสินค้ามีค่าเท่ากับ $ic\int_0^{\frac{S_0}{D}}(S_0-Dx)dx = ic\left[S_0x-\frac{Dx^2}{2}\right]_0^{\frac{S_0}{D}} = \frac{icS_0^2}{2D}$ และค่าใช้จ่ายเมื่อมีสินค้าขาดแคลนที่แปรไปตามราคาสินค้าเท่ากับ $pc\frac{(S_0-Q_0)^2}{2D} = pc\frac{(S_1^*-Q_1^*)^2}{2D}$ ดังนั้น ค่าใช้จ่ายรวมในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ $A+cQ_K+\frac{icS_0^2}{2D}+pc\frac{(S_1^*-Q_1^*)^2}{2D}$ และจะได้ค่าใช้จ่ายรวมเมื่อมีการสั่งซื้อสินค้า ณ จุดเวลา T_0 โดยแทนค่า $Q_K=S_0-q$ มีค่าเท่ากับ

$$C_s = A+c(S_0-q)+\frac{icS_0^2}{2D}+pc\frac{(S_1^*-Q_1^*)^2}{2D} \tag{7}$$

ถ้าไม่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ แต่สั่งซื้อสินค้าในปริมาณปกติ ณ จุดเวลา T_1 เป็นต้นไปเท่ากับ Q_1^* หน่วย (พิจารณาเส้นประในรูปที่ 1) และเนื่องจากปริมาณสินค้าในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ Q_K หน่วย ค่าใช้จ่ายรวมในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 สามารถหาได้ดังนี้

ค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 ประกอบไปด้วยค่าใช้จ่ายสองส่วน คือ ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้า และค่าใช้จ่ายเมื่อมีสินค้าขาดแคลน เป็นดังนี้

ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 มีค่าเท่ากับ $ic\int_0^{\frac{q}{D}}(q-Dx)dx = \frac{icq^2}{2D}$ และค่าใช้จ่ายเมื่อมีสินค้าขาดแคลนในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 มีค่าเท่ากับ $pc\int_0^{\frac{Q^*-S^*}{D}}\left((Q^*-S^*)-Dx\right)dx = pc\frac{(Q^*-S^*)^2}{2D}$

ค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา T_1 ถึง T_2 ประกอบด้วยค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อสินค้า ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้า และค่าใช้จ่ายเมื่อมีสินค้าขาดแคลน ซึ่งราคาสินค้าในช่วงนี้มีค่าเป็น $c+k$ บาทต่อหน่วยสินค้า และจำนวนครั้งในการสั่งซื้อสินค้ามีค่าเท่ากับ $\frac{Q_K - Q^* + S^* + Q_1^* - S_1^*}{Q_1^*}$ ครั้ง ดังนั้นค่าใช้จ่ายในช่วงเวลา T_1 ถึง T_2 เป็นดังนี้

ค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อสินค้าปริมาณ Q_K หน่วยมีค่าเท่ากับ $\frac{Q_K - Q^* + S^* + Q_1^* - S_1^*}{Q_1^*} A+(c+k)Q_K$

ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าในช่วงเวลา T_1 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ

$$\left(\frac{Q_K - Q^* + S^* + Q_1^* - S_1^*}{Q_1^*}\right) i(c+k)\int_0^{\frac{S_1^*}{D}} (S_1^* - Dx)\,dx = \left(\frac{Q_K - Q^* + S^* + Q_1^* - S_1^*}{Q_1^*}\right) i(c+k)\left[\frac{(S_1^*)^2}{2D}\right]$$

ค่าใช้จ่ายเมื่อมีสินค้าขาดแคลนในช่วงเวลา T_1 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ

$$\left(\frac{Q_K - Q^* + S^* + Q_1^* - S_1^*}{Q_1^*}\right) p(c+k)\frac{\left(S_0 - Q_0\right)^2}{2D} = \left(\frac{Q_K - Q^* + S^* + Q_1^* - S_1^*}{Q_1^*}\right) p(c+k)\frac{\left(S_1^* - Q_1^*\right)^2}{2D}$$

และจะได้ค่าใช้จ่ายรวมที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 โดยแทนค่า $Q_K = S_0 - q$ มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} C_n = {} & \frac{S_0 - q - Q^* + S^* + Q_1^* - S_1^*}{Q_1^*} A + (c+k)\left(S_0 - q\right) + \frac{ic}{2D}q^2 + \frac{pc}{2D}\left(S^* - Q^*\right)^2 \\ & + \left(S_0 - q - Q^* + S^* + Q_1^* - S_1^*\right)\left(\frac{i(c+k)\left(S_1^*\right)^2}{2Q_1^* D} + \frac{p(c+k)(S_1^* - Q_1^*)^2}{2Q_1^* D}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

ดังนั้น โดยประยุกต์ใช้บทตั้ง 1 ค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้เมื่อมีการสั่งซื้อแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} G &= C_n - C_s \\ &= \frac{S_0 - q - Q^* + S^* + Q_1^* - S_1^*}{Q_1^*} A + (c+k)\left(S_0 - q\right) + \frac{ic}{2D}q^2 + \frac{pc}{2D}\left(S^* - Q^*\right)^2 \\ &\quad + \left(S_0 - q - Q^* + S^* + Q_1^* - S_1^*\right)\left(\frac{i(c+k)\left(S_1^*\right)^2}{2Q_1^* D} + \frac{p(c+k)\left(S_1^* - Q_1^*\right)^2}{2Q_1^* D}\right) - A - c\left(S_0 - q\right) - \frac{ic}{2D}S_0^2 - \frac{pc}{2D}(S_1^* - Q_1^*)^2 \\ &= k\left(S_0 - q\right) + \frac{(S_0 - q - Q^* + S^* + Q_1^* - S_1^*)}{D}\left(\frac{2AD}{2Q_1^*} + \frac{AD}{Q_1^*}\right) + \frac{ic}{2D}q^2 + \frac{pc}{2D}\left(S^* - Q^*\right)^2 - A - \frac{ic}{2D}S_0^2 - \frac{pc}{2D}(S_1^* - Q_1^*)^2 \\ &= kS_0 + \frac{2A}{Q_1^*}S_0 - \frac{ic}{2D}S_0^2 + \frac{2A}{Q_1^*}(S^* - Q^* + Q_1^* - S_1^*) + \frac{ic}{2D}q^2 + \frac{pc}{2D}\left(S^* - Q^*\right)^2 - \frac{pc}{2D}\left(S_1^* - Q_1^*\right)^2 - \frac{2Aq}{Q_1^*} - kq - A \end{aligned}$$

$$= kS_0 + \frac{2A}{Q_1^*}S_0 - \frac{ic}{2D}S_0^2 - q\left(\frac{2A}{Q_1^*}+k\right) + \frac{2A}{Q_1^*}(S^* - Q^* + Q_1^* - S_1^*) + \frac{ic}{2D}q^2 + Z_1 - A$$

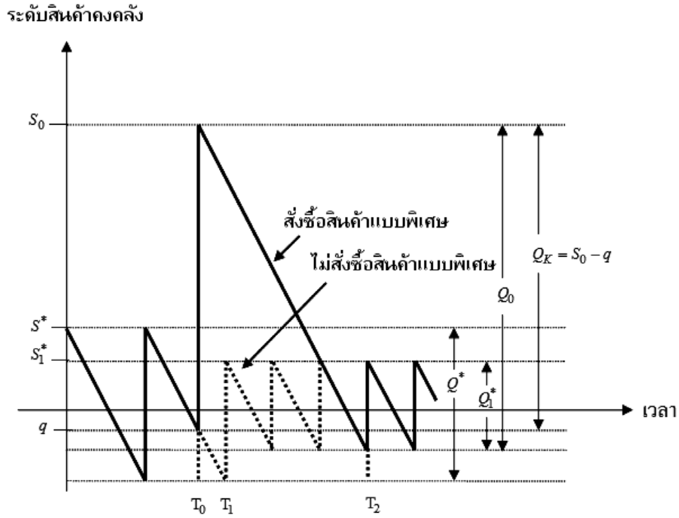
$$= -\frac{ic}{2D}\left(S_0^2 - 2S_0\left(\frac{2AD}{icQ_1^*}+\frac{kD}{ic}\right)\right) - q\left(\frac{2A}{Q_1^*}+k\right) + \frac{2A}{Q_1^*}(S^* - Q^* + Q_1^* - S_1^*) + \frac{ic}{2D}q^2 + Z_1 - A$$

$$= -\frac{ic}{2D}\left(S_0 - \left(\frac{2AD}{icQ_1^*}+\frac{kD}{ic}\right)\right)^2 + \frac{ic}{2D}\left(\frac{2AD}{icQ_1^*}+\frac{kD}{ic}\right)^2 - q\left(\frac{2A}{Q_1^*}+k\right) + \frac{2A}{Q_1^*}(S^* - Q^* + Q_1^* - S_1^*) + \frac{ic}{2D}q^2 + Z_1 - A \quad (10)$$

ซึ่ง G ในสมการ (10) จะมีค่าสูงสุดเมื่อ $S_0 - \left(\frac{2AD}{icQ_1^*}+\frac{kD}{ic}\right) = 0$ หรือเมื่อ $S_0 = \frac{D}{ic}\left(\frac{2A}{Q_1^*}+k\right)$ ดังนั้น ระดับสินค้าคงคลังที่เกิดจากการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดเมื่อสินค้ามีราคาสูงขึ้น คือ $S_0^* = \frac{D}{ic}\left(\frac{2A}{Q_1^*}+k\right)$ หน่วย และปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดเมื่อสินค้ามีราคาสูงขึ้น คือ $Q_K^* = S_0^* - q$ หน่วย ต่อไปแทนค่า $S_0^* = \frac{D}{ic}\left(\frac{2A}{Q_1^*}+k\right)$ ในสมการ (10) จะได้ค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุดเมื่อมีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษมีค่าเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
G^* &= \frac{ic}{2D}\left(\frac{2AD}{icQ_1^*}+\frac{kD}{ic}\right)^2 - q\left(\frac{2A}{Q_1^*}+k\right) + \frac{2A}{Q_1^*}(S^* - Q^* + Q_1^* - S_1^*) + \frac{ic}{2D}q^2 + Z_1 - A \\
&= \frac{ic}{2D}\left(S_0^*\right)^2 - q\left(\frac{2A}{Q_1^*}+k\right) + \frac{2A}{Q_1^*}(S^* - Q^* + Q_1^* - S_1^*) + \frac{ic}{2D}q^2 + Z_1 - A \\
&= \frac{ic}{2D}\left(S_0^* - q\right)^2 + \frac{2A}{Q_1^*}(S^* - Q^* + Q_1^* - S_1^*) + Z_1 - A \\
&= \frac{ic}{2D}\left(Q_K^*\right)^2 + \frac{2A}{Q_1^*}(S^* - Q^* + Q_1^* - S_1^*) + Z_1 - A \\
&= A\left\{\left(\frac{Q_K^*}{Q^*}\right)^2 + \frac{2}{Q_1^*}(S^* - Q^* - S_1^*) + 1\right\} + Z_1 \qquad (11)
\end{aligned}$$

กรณีที่ 2 $S^* - Q^* < q < 0$



รูปที่ 2 ระบบสินค้าคงคลังที่มีสินค้าขาดแคลนและสินค้ามีราคาสูงขึ้นสำหรับกรณี $S^* - Q^* < q < 0$

พิจารณาระบบสินค้าคงคลังในรูปที่ 2 ระบบสินค้าคงคลังในกรณีนี้จะเหมือนกับในกรณีที่ $0 \le q \le S^*$ (รูปที่ 1) ยกเว้นว่าระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษมีค่าอยู่ระหว่าง S^*-Q^* และ 0 ($S^* - Q^* < q < 0$) หน่วย ค่าใช้จ่ายรวมในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 สามารถพิจารณาได้ดังนี้

ค่าใช้จ่ายที่เกิดจากการสั่งซื้อสินค้าในปริมาณ Q_K มีค่าเท่ากับ A+cQ_K ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าที่แปรไปตามราคาสินค้ามีค่าเท่ากับ $ic\int_0^{\frac{S_0}{D}}(S_0 - Dx)dx = \frac{icS_0^2}{2D}$ และค่าใช้จ่ายเมื่อมีสินค้าขาดแคลนที่แปรไปตามราคาสินค้าเท่ากับ $pc\frac{(S_0 - Q_0)^2}{2D} = pc\frac{(S_1^* - Q_1^*)^2}{2D}$ ดังนั้น ค่าใช้จ่ายรวมในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ

$$A + cQ_K + \frac{ic}{2D}S_0^2 + \frac{pc}{2D}(S_1^* - Q_1^*)^2$$

และ จะได้ค่าใช้จ่ายรวมเมื่อมีการสั่งซื้อสินค้า ณ จุดเวลา T_0 โดยแทนค่า Q_K=S_0-q มีค่าเท่ากับ

$$C_s = A + c(S_0 - q) + \frac{ic}{2D}S_0^2 + \frac{pc}{2D}(S_1^* - Q_1^*)^2 \quad (12)$$

ถ้าไม่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษแต่สั่งซื้อสินค้าในปริมาณปกติ ณ จุดเวลา T_1 เป็นต้นไปเท่ากับ Q_1^* หน่วย (พิจารณาเส้นประในรูปที่ 2) และเนื่องจากปริมาณสินค้าในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ Q_K หน่วย ค่าใช้จ่ายรวมในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 สามารถหาได้ดังนี้

ค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 คือค่าใช้จ่ายเมื่อมีสินค้าขาดแคลนสินค้าซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$pc\int_0^{\frac{(Q^*-S^*+q)}{D}}\left[(Q^*-S^*+q)-Dx\right]dx = pc\frac{\left(Q^*-S^*+q\right)^2}{2D}$$

ค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา T_1 ถึง T_2 ประกอบด้วยค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อสินค้า ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้า และค่าใช้จ่ายเมื่อมีสินค้าขาดแคลน และจำนวนครั้งในการสั่งซื้อสินค้ามีค่าเท่ากับ $\frac{Q_K-Q^*+S^*+Q_1^*-S_1^*}{Q_1^*}$ ครั้ง ดังนั้นค่าใช้จ่ายในช่วงเวลา T_1 ถึง T_2 มีดังนี้

ค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อสินค้าจำนวน Q_K หน่วยมีค่าเท่ากับ $\left(\frac{Q_K-Q^*+S^*+Q_1^*-S_1^*}{Q_1^*}\right)A+(c+k)Q_K$

ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าในช่วงเวลา T_1 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ

$$\left(\frac{Q_K-Q^*+S^*+Q_1^*-S_1^*}{Q_1^*}\right)i(c+k)\int_0^{\frac{S_1^*}{D}}\left(S_1^*-Dx\right)dx = i(c+k)\frac{\left(S_1^*\right)^2}{2D}\left(\frac{Q_K-Q^*+S^*+Q_1^*-S_1^*}{Q_1^*}\right)$$

ค่าใช้จ่ายเมื่อมีสินค้าขาดแคลนในช่วงเวลา T_1 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ

$$p(c+k)\frac{\left(Q_K-Q^*+S^*+Q_1^*-S_1^*\right)\left(S_0-Q_0\right)^2}{2Q_1^*D} = p(c+k)\frac{\left(Q_K-Q^*+S^*+Q_1^*-S_1^*\right)\left(S_1^*-Q_1^*\right)^2}{2Q_1^*D}$$

ดังนั้นค่าใช้จ่ายรวมในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 โดยแทนค่า $Q_K = S_0 - q$ มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}C_n = {} & \frac{S_0-q-Q^*+S^*+Q_1^*-S_1^*}{Q_1^*}A+\left(c+k\right)\left(S_0-q\right)+\frac{pc}{2D}\left(Q^*-S^*+q\right)^2 \\ & +\frac{\left(S_0-q-Q^*+S^*+Q_1^*-S_1^*\right)}{D}\left(\frac{i\left(c+k\right)\left(S_1^*\right)^2}{2Q_1^*}+\frac{p\left(c+k\right)\left(S_1^*-Q_1^*\right)^2}{2Q_1^*}\right)\end{aligned} \tag{13}$$

ดังนั้น โดยประยุกต์ใช้บทตั้ง 1 ค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้เมื่อมีการสั่งซื้อแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ

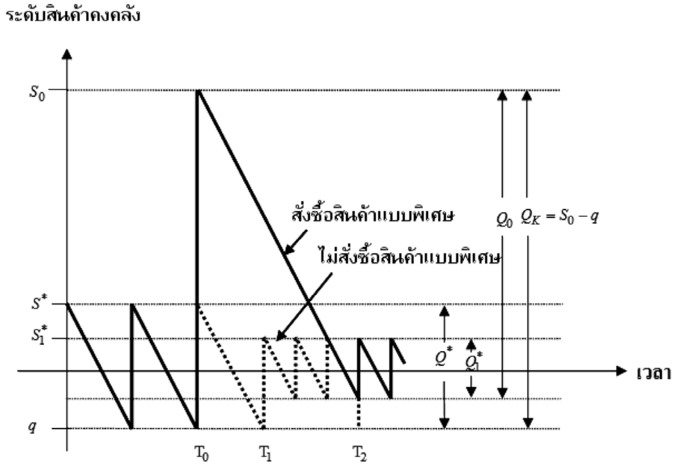
$$
\begin{aligned}
G &= C_n - C_s \\
&= \frac{S_0 - q - Q^* + S^* + Q_1^* - S_1^*}{Q_1^*} A + k\left(S_0 - q\right) + \frac{pc}{2D}\left(Q^* - S^* + q\right)^2 \\
&\quad + \frac{(S_0 - q - Q^* + S^* + Q_1^* - S_1^*)}{D}\left(\frac{AD}{Q_1^*}\right) - A - \frac{ic}{2D}S_0^2 - \frac{pc}{2D}\left(S_1^* - Q_1^*\right)^2 \\
&= k\left(S_0 - q\right) + \left(S_0 - q - Q^* + S^* + Q_1^* - S_1^*\right)\left(\frac{2A}{Q_1^*}\right) - \frac{ic}{2D}S_0^2 + \frac{pc}{2D}\left(Q^* - S^* + q\right)^2 - \frac{pc}{2D}\left(S_1^* - Q_1^*\right)^2 - A \\
&= kS_0 + \frac{2A}{Q_1^*}S_0 - \frac{ic}{2D}S_0^2 + \frac{2A}{Q_1^*}\left(S^* - Q^* + Q_1^* - S_1^*\right) + \frac{pc}{2D}\left(Q^* - S^* + q\right)^2 - \frac{pc}{2D}\left(S_1^* - Q_1^*\right)^2 - \frac{2Aq}{Q_1^*} - kq - A \\
&= kS_0 + \frac{2A}{Q_1^*}S_0 - \frac{ic}{2D}S_0^2 - q\left(\frac{2A}{Q_1^*} + k\right) + \frac{2A}{Q_1^*}\left(S^* - Q^* + Q_1^* - S_1^*\right) + Z_2 - A \\
&= -\frac{ic}{2D}\left[S_0^2 - 2S_0\left(\frac{2AD}{icQ_1^*} + \frac{kD}{ic}\right)\right] - q\left(\frac{2A}{Q_1^*} + k\right) + \frac{2A}{Q_1^*}\left(S^* - Q^* + Q_1^* - S_1^*\right) + Z_2 - A \\
&= -\frac{ic}{2D}\left[S_0 - \left(\frac{2AD}{icQ_1^*} + \frac{kD}{ic}\right)\right]^2 + \frac{ic}{2D}\left(\frac{2AD}{icQ_1^*} + \frac{kD}{ic}\right)^2 - q\left(\frac{2A}{Q_1^*} + k\right) + \frac{2A}{Q_1^*}\left(S^* - Q^* + Q_1^* - S_1^*\right) + Z_2 - A \qquad (14)
\end{aligned}
$$

ซึ่ง G ในสมการ (14) จะมีค่าสูงสุดเมื่อ $S_0 - \left(\frac{2AD}{icQ_1^*} + \frac{kD}{ic}\right) = 0$ หรือ เมื่อ $S_0 = \frac{D}{ic}\left(\frac{2A}{Q_1^*} + k\right)$ ดังนั้น ระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดเมื่อสินค้ามีราคาสูงขึ้น คือ $S_0^* = \frac{D}{ic}\left(\frac{2A}{Q_1^*} + k\right)$ หน่วย และปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดเมื่อสินค้ามีราคาสูงขึ้น คือ $Q_K^* = S_0^* - q$ หน่วย ต่อไปแทนค่า $S_0^* = \frac{D}{ic}\left(\frac{2A}{Q_1^*} + k\right)$ ในสมการ (14) จะได้ค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุดเมื่อมีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษมีค่าดังนี้

$$
\begin{aligned}
G^* &= \frac{ic}{2D}\left(\frac{2AD}{icQ_1^*} + \frac{kD}{ic}\right)^2 - q\left(\frac{2A}{Q_1^*} + k\right) + \frac{2A}{Q_1^*}\left(S^* - Q^* + Q_1^* - S_1^*\right) + Z_2 - A \\
&= \frac{ic}{2D}\left(S_0^*\right)^2 - q\left(\frac{2A}{Q_1^*} + k\right) + \frac{2A}{Q_1^*}\left(S^* - Q^* + Q_1^* - S_1^*\right) + Z_2 - A \\
&= \frac{ic}{2D}\left(S_0^* - q\right)^2 - \frac{icq^2}{2D} + \frac{2A}{Q_1^*}\left(S^* - Q^* + Q_1^* - S_1^*\right) + Z_2 - A \\
&= \frac{ic}{2D}\left(Q_K^*\right)^2 - \frac{icq^2}{2D} + \frac{2A}{Q_1^*}\left(S^* - Q^* + Q_1^* - S_1^*\right) + Z_2 - A \\
&= A\left\{\left(\frac{Q_K^*}{Q^*}\right)^2 - \left(\frac{q}{Q^*}\right)^2 + \frac{2}{Q_1^*}\left(S^* - Q^* - S_1^*\right) + 1\right\} + Z_2 \qquad (15)
\end{aligned}
$$

กรณีที่ 3 $q = S^* - Q^*$

พิจารณาระบบสินค้าคงคลังในรูปที่ 3 ระบบสินค้าคงคลังในกรณีนี้จะเหมือนกับในกรณีที่ $0 \le q \le S^*$ ยกเว้นเมื่อมีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ ระดับสินค้าคงคลังมีค่าเท่ากับ $q = S^* - Q^*$ หน่วย ค่าใช้จ่ายรวมในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 สามารถพิจารณาได้ดังนี้



รูปที่ 3 ระบบสินค้าคงคลังที่มีสินค้าขาดแคลนและสินค้ามีราคาสูงขึ้นสำหรับกรณี $q = S^* - Q^*$

ค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อสินค้าในปริมาณ Q_K มีค่าเท่ากับ $A + cQ_K$ ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าที่แปรไปตามราคาสินค้ามีค่าเท่ากับ $ic\int_0^{\frac{S_0}{D}} (S_0 - Dx)\,dx = \frac{icS_0^2}{2D}$ ค่าใช้จ่ายเมื่อมีสินค้าขาดแคลนที่แปรไปตามราคาสินค้าค่าเท่ากับ

$$pc \int_0^{\frac{S_1^* - Q_1^*}{D}} \left(\left(S_1^* - Q_1^* \right) - Dx \right) dx = pc \frac{\left(S_1^* - Q_1^* \right)^2}{2D}$$

ค่าใช้จ่ายรวมที่เกิดขึ้นเมื่อมีการสั่งซื้อแบบพิเศษในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 โดยแทนค่า $Q_K = S_0 - q$ มีค่าเท่ากับ

$$C_s = A + c\left(S_0 - q\right) + \frac{icS_0^2}{2D} + \frac{pc\left(S_1^* - Q_1^*\right)^2}{2D} \tag{16}$$

ถ้าไม่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษ แต่สั่งซื้อสินค้าในปริมาณปกติ ณ จุดเวลา T_1 เป็นต้นไปเท่ากับ Q_1^* หน่วย (พิจารณาเส้นประในรูปที่ 3) และเนื่องจากปริมาณสินค้าในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ Q_K หน่วย ค่าใช้จ่ายรวมในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 สามารถหาได้ดังนี้

ค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 ประกอบไปด้วยค่าใช้จ่ายสองส่วน คือ ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้า และค่าใช้จ่ายเมื่อมีสินค้าขาดแคลน เป็นดังนี้

ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 มีค่าเท่ากับ $ic\int_0^{\frac{S^*}{D}}(S^*-Dx)dx = \frac{ic(S^*)^2}{2D}$

ค่าใช้จ่ายเมื่อมีสินค้าขาดแคลนในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 มีค่าเท่ากับ $pc\int_0^{\frac{q}{D}}(q-Dx)dx = \frac{pcq^2}{2D}$

ค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา T_1 ถึง T_2 ประกอบด้วยค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อสินค้า ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้า และค่าใช้จ่ายเมื่อมีสินค้าขาดแคลน และจำนวนครั้งในการสั่งซื้อสินค้ามีค่าเท่ากับ $\frac{(Q_K-Q^*+q+Q_1^*-S_1^*)}{Q_1^*}$ ครั้ง ดังนั้นค่าใช้จ่ายในช่วงเวลา T_1 ถึง T_2 มีดังนี้

ค่าใช้จ่ายในสั่งซื้อสินค้าในปริมาณ Q_K มีค่าเท่ากับ

$$A+cQ^*+\frac{(Q_K-Q^*+q+Q_1^*-S_1^*)}{Q_1^*}A+(c+k)(Q_K-Q^*) = 2A+\frac{(S_0-Q^*-S_1^*)}{Q_1^*}A+cQ_K+k(Q_K-Q^*)$$

ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าในช่วงเวลา T_1 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ

$$i(c+k)\frac{(S_0-Q^*+Q_1^*-S_1^*)}{Q_1^*}\int_0^{\frac{S_1^*}{D}}(S_1^*-Dx)dx = i(c+k)\frac{(S_0-Q^*+Q_1^*-S_1^*)}{Q_1^*}\left[\frac{\left(S_1^*\right)^2}{2D}\right]$$

ค่าใช้จ่ายเมื่อมีสินค้าขาดแคลนในช่วงเวลา T_1 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ

$$p(c+k)\frac{(S_0-Q^*+Q_1^*-S_1^*)}{Q_1^*}\int_0^{\frac{Q_1^*-S_1^*}{D}}\left((Q_1^*-S_1^*)-Dx\right)dx = p(c+k)\frac{(Q_1^*-S_1^*)^2(S_0-Q^*+Q_1^*-S_1^*)}{2Q_1^*D}$$

ค่าใช้จ่ายรวมเมื่อไม่มีการสั่งซื้อหรือผลิตแบบพิเศษในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 โดยแทนค่า $Q_K=S_0-q$ มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} C_n &= 2A+\left(\frac{S_0-Q^*-S_1^*}{Q_1^*}\right)A+c(S_0-q)+k(S_0-q-Q^*)+\frac{ic\left(S^*\right)^2}{2D} \\ &+\frac{\left(S_0-Q^*+Q_1^*-S_1^*\right)}{D}\left(\frac{i(c+k)\left(S_1^*\right)^2+p(c+k)\left(Q_1^*-S_1^*\right)^2}{2Q_1^*}\right)+\frac{pcq^2}{2D} \end{aligned} \quad (17)$$

ดังนั้น โดยประยุกต์ใช้บทตั้ง 1 ค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้เมื่อมีการสั่งซื้อแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ

$$
\begin{aligned}
G &= C_n - C_s \\
&= \left(\frac{S_0 - Q^* - S_1^*}{D}\right)\frac{2AD}{Q_1^*} + k(S_0 - q - Q^*) + \frac{ic}{2D}\left(S^*\right)^2 + \frac{\left(S_0 - Q^* + Q_1^* - S_1^*\right)}{D}\left(\frac{AD}{Q_1^*}\right) + \frac{pcq^2}{2D} - \frac{icS_0^2}{2D} - \frac{pc\left(S_1^* - Q_1^*\right)^2}{2D} + A \\
&= k(S_0 - q - Q^*) + \left(\frac{S_0 - Q^* - S_1^*}{D}\right)\left(\frac{2AD}{Q_1^*} + \frac{AD}{Q_1^*}\right) - \frac{icS_0^2}{2D} + \frac{ic}{2D}\left(S^*\right)^2 + \frac{pcq^2}{2D} - \frac{pc\left(S_1^* - Q_1^*\right)^2}{2D} + 2A \\
&= kS_0 + \left(S_0 - Q^* - S_1^*\right)\left(\frac{2A}{Q_1^*}\right) - \frac{icS_0^2}{2D} + \frac{icQ^*\left(S^*\right)^2}{2Q^*D} + \frac{pcQ^*\left(Q^* - S^*\right)^2}{2Q^*D} - \frac{pc\left(S_1^* - Q_1^*\right)^2}{2D} - kq - kQ^* + 2A \\
&= -\frac{ic}{2D}S_0^2 + S_0\left(\frac{2A}{Q_1^*} + k\right) - kq - kQ^* - \frac{2A}{Q_1^*}\left(Q^* + S_1^*\right) - \frac{pc\left(S_1^* - Q_1^*\right)^2}{2D} + 3A \\
&= -\frac{ic}{2D}\left[S_0^2 - 2S_0\left(\frac{2AD}{icQ_1^*} + \frac{kD}{ic}\right)\right] - kq - kQ^* - \frac{2AQ^*}{Q_1^*} - \frac{2AS_1^*}{Q_1^*} - \frac{pc\left(S_1^* - Q_1^*\right)^2}{2D} + 3A \\
&= -\frac{ic}{2D}\left[S_0 - \left(\frac{2AD}{icQ_1^*} + \frac{kD}{ic}\right)\right]^2 + \frac{ic}{2D}\left(\frac{2AD}{icQ_1^*} + \frac{kD}{ic}\right)^2 - Q^*\left(\frac{2A}{Q_1^*} + k\right) - kq - \frac{2AS_1^*}{Q_1^*} - \frac{pc\left(S_1^* - Q_1^*\right)^2}{2D} + 3A \qquad (18)
\end{aligned}
$$

ซึ่ง G ในสมการ (18) จะมีค่าสูงสุดเมื่อ $S_0 - \left(\frac{2AD}{icQ_1^*} + \frac{kD}{ic}\right) = 0$ หรือเมื่อ $S_0 = \frac{D}{ic}\left(\frac{2A}{Q_1^*} + k\right)$ ดังนั้นระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดเมื่อสินค้ามีราคาสูงขึ้นคือ $S_0^* = \frac{D}{ic}\left(\frac{2A}{Q_1^*} + k\right)$ และปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดเมื่อสินค้ามีราคาสูงขึ้น คือ $Q_K^* = S_0^* - q$ ต่อไปแทนค่า $S_0^* = \frac{D}{ic}\left(\frac{2A}{Q_1^*} + k\right)$ ในสมการ (18) จะได้ค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุดเมื่อมีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษมีค่าเป็น

$$
\begin{aligned}
G^* &= \frac{ic}{2D}\left(\frac{2AD}{icQ_1^*} + \frac{kD}{ic}\right)^2 - Q^*\left(\frac{2A}{Q_1^*} + k\right) - kq - \frac{2AS_1^*}{Q_1^*} - \frac{pc\left(S_1^* - Q_1^*\right)^2}{2D} + 3A \\
&= \frac{ic}{2D}\left(S_0^*\right)^2 - Q^*\left(\frac{2A}{Q_1^*} + k\right) - kq - \frac{2AS_1^*}{Q_1^*} - \frac{pc\left(S_1^* - Q_1^*\right)^2}{2D} + 3A \\
&= \frac{ic}{2D}\left(S_0^* - Q^*\right)^2 - \frac{icQ^{*2}}{2D} - kq - \frac{2AS_1^*}{Q_1^*} - \frac{pc\left(S_1^* - Q_1^*\right)^2}{2D} + 3A \\
&= \frac{ic}{2D}\left(S_0^* - Q^*\right)^2 - kq - \frac{2AS_1^*}{Q_1^*} + 2A - \frac{pc}{2D}\left(S_1^* - Q_1^*\right)^2 \\
&= A\left\{\left(\frac{Q_K^* + q}{Q^*} - 1\right)^2 - 2\left(1 - \frac{S_1^*}{Q_1^*}\right)\right\} - kq - \frac{pc}{2D}\left(S_1^* - Q_1^*\right)^2 \\
&= A\left\{\left(\frac{Q_K^* + q}{Q^*} - 1\right)^2 + 2\left(\frac{S_1^*}{Q_1^*} - 1\right)\right\} + Z_3
\end{aligned}
$$

ข้อสังเกต เมื่อพิจารณาระบบสินค้าคงคลังภายใต้สมมติฐานที่ปรากฏใน Teerapabolarn และ Khamrod [4] พบว่าระบบสินค้าคงคลังดังกล่าวเป็นเพียงกรณีพิเศษของระบบสินค้าคงคลังในกรณีที่ 2 ($S^*-Q^*<q<0$) เท่านั้น ดังนั้นผลลัพธ์ต่างๆ ที่ได้จากงานวิจัยในครั้งนี้จะอยู่ในรูปทั่วไปและครอบคลุมมากกว่าผลลัพธ์ทั้งหมดที่อยู่ใน [4]

การประยุกต์ใช้ผลการวิจัย

ในหัวข้อนี้เป็นการยกตัวอย่างเพื่อแสดงการประยุกต์ใช้ผลลัพธ์ต่างๆ ในทฤษฎีบท 1

ตัวอย่าง ปัจจุบันประเทศไทยต้นทุนราคาน้ำมันดีเซลของปั๊มน้ำมันแห่งหนึ่งคือ 22.00 บาทต่อลิตร ต่อมาทราบว่าน้ำมันดีเซลจะมีราคาสูงขึ้นเป็น 25.50 บาทต่อลิตร ในวันที่ 15 กุมภาพันธ์ 2558 ปัจจุบันปั๊มน้ำมันแห่งนี้จำหน่ายน้ำมันปีละ 360,000 ลิตร ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาเท่ากับ 20% ของราคาน้ำมันต่อลิตรต่อปี ค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อครั้งละ 1200 บาท และถ้าปั๊มน้ำมันแห่งนี้มีน้ำมันดีเซลไม่พอจำหน่ายในขณะนั้นจะทำการจัดส่งให้ภายหลังเมื่อได้รับน้ำมันแล้วจะต้องเสียค่าใช้จ่ายในส่วนนี้คิดเป็นเงิน 30% ของราคาน้ำมันต่อลิตรต่อปี อยากทราบว่าปั๊มน้ำมันแห่งนี้ควรจะสั่งซื้อน้ำมันดีเซลมาในวันที่ 14 กุมภาพันธ์ 2558 จึงจะทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายได้สูงสุด และมีค่าเท่าใด ถ้าระดับสินค้าคงคลัง ณ วันที่ 14 กุมภาพันธ์ 2558 มีค่าเท่ากับ 50,000 ลิตร เท่ากับ -2,000 ลิตร และ เท่ากับระดับสินค้าคงคลังต่ำสุด ตามลำดับ

วิธีทำ D = 360,000 ลิตรต่อปี A = 1,200 บาทต่อครั้ง p = 30% ของราคาน้ำมันต่อลิตรต่อปี
i = 20% ของราคาน้ำมันต่อลิตรต่อปี c = 22 บาทต่อลิตร k = 3.50 บาทต่อลิตร

หา Q^* จากสมการ $Q^*=\sqrt{\frac{2AD}{ic}}\sqrt{\frac{i+p}{p}}=\sqrt{\frac{2(1,200)(360,000)}{(0.20)(22)}}\sqrt{\frac{0.20+0.30}{0.30}}=18,090.6807$ ลิตร

หา S^* จากสมการ $S^*=\sqrt{\frac{2AD}{ic}}\sqrt{\frac{p}{i+p}}=\sqrt{\frac{2(1,200)(360,000)}{(0.20)(22)}}\sqrt{\frac{0.30}{0.20+0.30}}=10,854.4084$ ลิตร

หา Q_1^* จากสมการ $Q_1^*=\sqrt{\frac{2AD}{i(c+k)}}\sqrt{\frac{i+p}{p}}=\sqrt{\frac{2(1,200)(180,000)}{(0.20)(22+3.50)}}\sqrt{\frac{0.20+0.30}{0.30}}=16,803.3610$ ลิตร

หา S_1^* จากสมการ $S_1^*=\sqrt{\frac{2AD}{i(c+k)}}\sqrt{\frac{p}{i+p}}=\sqrt{\frac{2(1,200)(180,000)}{(0.20)(22+3.50)}}\sqrt{\frac{0.30}{0.20+0.30}}=10,082.0166$ ลิตร

หา S_0^* จากสมการ $S_0^*=\frac{D}{ic}\left(k+\frac{2A}{Q_1^*}\right)=\frac{360,000}{(0.2)(22)}\left(3.50+\frac{2(1,200)}{16,803.3610}\right)=298,049.6102$ ลิตร

1. ถ้าปริมาณน้ำมันดีเซล q = 50,000 ลิตร

หา Z_1 จากสมการ
$$\begin{aligned}Z_1 &= \frac{pc}{2D}\left[(Q^*-S^*)^2-(S_1^*-Q_1^*)^2\right]\\ &= \frac{(0.30)(22)}{2(360,000)}\left[(18,090.6807-10,854.4084)^2-(10,082.0166-16,803.3610)^2\right]\\ &= 65.8824 \text{ บาท}\end{aligned}$$

หา Q_K^* จากสมการ $Q_K^* = S_0^* - q$

$= 298{,}049.6102 - 50{,}000 = 248{,}049.6102$ ลิตร

และจะหา G^* ได้จากสมการ $G^* = A\left\{\left(\frac{Q_K^*}{Q^*}\right)^2 + \frac{2}{Q_1^*}(S^* - Q^* - S_1^*) + 1\right\} + Z_1$

$$= (1{,}200)\left\{\left(\frac{248{,}049.6102}{18{,}090.6807}\right)^2 + \frac{2}{16{,}803.3610}(10{,}854.4084 - 18{,}090.6807 - 10{,}082.0166) + 1\right\} + 65.8824$$

$= 224{,}400.2355$ บาท

ดังนั้น ปั้มน้ำมันแห่งนี้จึงควรสั่งซื้อน้ำมันดีเซลมาเก็บไว้ประมาณ 248,049.6102 ลิตร ซึ่งจะทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายได้เท่ากับ 224,400.24 บาท

2. ถ้าปริมาณน้ำมันดีเซล $q = -2{,}000$ ลิตร

หา Z_2 จากสมการ $Z_2 = \frac{pc}{2D}\left[(Q^* - S^* + q)^2 - (S_1^* - Q_1^*)^2\right]$

$$= \frac{(0.30)(22)}{2(360{,}000)}\left[(18{,}090.6807 - 10{,}854.4084) - (2{,}000)^2 - (10{,}082.0166 - 16{,}803.3610)^2\right] = -162.7810 \text{ บาท}$$

หา Q_K^* จากสมการ $Q_K^* = S_0^* - q$

$= 298{,}049.6102 - (-2{,}000) = 300{,}049.6102$ ลิตร

และจะหา G^* ได้จากสมการ $G^* = A\left\{\left(\frac{Q_K^*}{Q^*}\right)^2 - \left(\frac{q}{Q^*}\right)^2 + \frac{2}{Q_1^*}\left(S^* - Q^* - S_1^*\right) + 1\right\} + Z_2$

$$= (1{,}200)\left\{\left(\frac{300{,}049.6102}{18{,}090.6807}\right)^2 - \left(\frac{-2{,}000}{18{,}090.6807}\right)^2 + \frac{2}{16{,}803.3610}(10{,}854.4084 - 18{,}090.6807 - 10{,}082.0166) + 1\right\} - 162.7810$$

$= 328{,}658.1565$ บาท

ดังนั้น ปั้มน้ำมันแห่งนี้จึงควรสั่งซื้อน้ำมันดีเซลมาเก็บไว้ประมาณ 300,049.6102 ลิตร ซึ่งจะทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายได้เท่ากับ 328,658.17 บาท

3. ถ้าปริมาณน้ำมันดีเซล q เท่ากับปริมาณน้ำมันดีเซลต่ำสุด

หา Z_3 จากสมการ

$$\begin{aligned} Z_3 &= -kq - \frac{pc}{2D}(S_1^* - Q_1^*)^2 \\ &= -(3.50)(-7,236.2723) - \frac{(0.30)(22)}{2(360,000)}(10,082.0166 - 16,803.3610)^2 \\ &= 24,912.8354 \end{aligned}$$

หา Q_K^* จากสมการ

$$\begin{aligned} Q_K^* &= S_0^* - q \\ &= 298,049.6102-(-7,236.2723) = 305,285.8825 \text{ ลิตร} \end{aligned}$$

และหา G^* ได้จากสมการ

$$\begin{aligned} G^* &= A\left\{\left(\frac{Q_K^* + q}{Q^*} - 1\right)^2 + 2\left(\frac{S_1^*}{Q_1^*} - 1\right)\right\} + Z_3 \\ &= (1,200)\left\{\left(\frac{305,285.8825 + (-7,236.2723)}{18,090.6807} - 1\right)^2 + 2\left(\frac{10,082.0166}{16,803.3610} - 1\right)\right\} \\ &\quad +24,912.8353 \\ &= 311,335.1759 \end{aligned}$$

ดังนั้น ปั้มน้ำมันแห่งนี้จึงควรสั่งซื้อน้ำมันดีเซลมาเก็บไว้ประมาณ 305,285.8825 ลิตร ซึ่งจะทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายได้เท่ากับ 311,335.18 บาท

สรุปผลการวิจัย

การศึกษาครั้งนี้ เป็นการปรับปรุงตัวแบบของระบบสินค้าคงคลังที่มีสินค้าขาดแคลนและสินค้ามีราคาสูงขึ้นในงานวิจัยของ Teerapabolarn และ Khamrod [4] โดยสมมติให้ระดับสินค้าคงคลังขณะที่มีการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ q หน่วย และแบ่ง q ออกเป็นสามกรณี คือ กรณีที่ 1 $0 \le q \le S^*$ กรณีที่ 2 $S^* - Q^* < q < 0$ และกรณีที่ 3 $q = S^* - Q^*$ (ซึ่งครอบคลุมทุกระดับสินค้าคงคลัง) และได้ใช้วิธีพีชคณิตที่นำเสนอโดย Grubbstrom [5] หาตัวแบบ EOQ ของระบบสินค้าคงคลังที่ต้องการ ภายใต้เงื่อนไขที่ทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นได้สูงสุด ซึ่งวิธีนี้สามารถหาตัวแบบได้จากการจัดรูปของค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นให้อยู่ในรูปแบบกำลังสองคล้ายกับใน [4] และในการศึกษาครั้งนี้ ตัวแบบ EOQ ที่ใช้หาปริมาณการสั่งซื้อสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด $Q_K^* = S_0^* - q$ หน่วย โดยที่ระดับสินค้าคงคลังสูงสุดเมื่อมีการสั่งซื้อแบบพิเศษเหมาะที่สุด $S_0^* = \frac{D}{ic}\left(\frac{2A}{Q_1^*} + k\right)$ หน่วย และสามารถหาค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุดดังสมการ (4) ซึ่งผลลัพธ์ต่างๆ เหล่านี้จะอยู่ในรูปทั่วไปและครอบคลุมมากกว่าผลลัพธ์ทั้งหมดที่อยู่ใน [4]

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณกรรมการผู้อ่านผลงานวิจัยที่ได้กรุณาให้คำแนะนำและแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ จนทำให้ผลงานวิจัยนี้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

เอกสารอ้างอิง

1. Harris, F. W. 1913. How Many Parts to Make at Once, Factory. *The Magazine of Management* 10: p. 135-136.
2. Naddor, E. 1966. *Inventory Systems.* New York. Wiley. p. 97-99.
3. Tersine, R. J. 1994. *Principles of Inventory and Materials Management.* 4th Edition. New Jersey. Prentice-Hall. p. 117-120.
4. Teerapabolarn, K., and Khamrod, S. 2013. The EOQ Model with Shortage and Price Increases Derived Algebraically. *Srinakharinwirot Science Journal.* 29 (1): 37-55. (in Thai)
5. Grubbström, R. W. 1996. Material Requirements Planning and Manufacturing Resource Planning. *International Encyclopedia of Business and Management.* London. Routledge. p. 3410-3411.

ได้รับบทความวันที่ 30 มกราคม 2558
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 13 มีนาคม 2558