บทความวิจัย

คูลอมบ์แอคชันของรอยต่อการทะลุผ่านแบบเรียงแถว ในหนึ่งมิติ

อังคาร อินทนิล และ ประธาน ศรีวิไล*

บทคัดย่อ

คูลอมบ์แอคชันของระบบรอยต่อการทะลุผ่านที่ต่ออนุกรมกัน ถูกคำนวณโดยการแสดงพาร์ทิชันฟังก์ชันในรูปฟังก์ชันนัลอินทิกรัลฟอร์มูเลชัน เพื่อตรวจสอบผลการคำนวณดังกล่าว คณะวิจัยได้นำคูลอมบ์แอคชันไปคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยและสร้างแผนภาพเสถียรของระบบ 2 และ 3 ควอนตัมดอท ตามลำดับ พบว่าแผนภาพเสถียรดังกล่าวสอดคล้องกับผลการคำนวณโดยตรงจากพลังงานการเพิ่มประจุ แต่วิธีการที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ สามารถแสดงผลของอุณหภูมิต่อการเปลี่ยนแปลงแผนภาพเสถียรและสะดวกต่อการนำไปประยุกต์ใช้ในการคำนวณแผนภาพเสถียรของระบบที่มีจำนวนควอนตัมดอทเพิ่มมากขึ้นได้

คำสำคัญ: คูลอมบ์แอคชัน ควอนตัมดอท พลังงานการเพิ่มประจุ

ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม

*ผู้นิพนธ์ประสานงาน, e-mail: prathansrivilai27@gmail.com

Coulomb Action of Finite One Dimensional Array of Tunneling Junctions

Angkhan Intanin and Prathan Srivilia*

ABSTRACT

The Coulomb action of serial tunneling junctions was calculated by the partition function expressed in the functional integral formulation. To verify the calculated result, the Coulomb action was applied to calculate the average electron numbers and the stability diagrams of double and triple quantum dots systems, respectively. We found that the results correspond to the stability diagrams directly calculated from the charging energy of the systems. Moreover, this approach can determine the temperature dependence of the stability diagrams and be easily applied to larger systems containing more quantum dots.

Keywords: Coulomb action, Quantum dots, Charging energy

Department of Physics, Faculty of Science, Mahasarakham University

*Corresponding author, email: prathansrivilai@gmail.com

บทนำ

สองทศวรรษที่ผ่านมา อุปกรณ์อิเล็กตรอนเดี่ยว (single electron devices) [1] ได้รับความสนใจเป็นอย่างมาก เนื่องจากมีขนาดเล็กในระดับอะตอม (atomic scale) สูญเสียพลังงานน้อย (low power dissipation) และสามารถประยุกต์ใช้งานได้หลากหลาย เช่น เครื่องตรวจจับความไวสูง (supersensitive electrometers) [2] ควอนตัมคอมพิวเตอร์ (quantum computers) [3] เซลล์แสงอาทิตย์ (solar cells) [4] และสิ่งประดิษฐ์เชิงตรรกะ (logic devices) [5] เป็นต้น โดยทั่วไปอุปกรณ์อิเล็กตรอนเดี่ยวประกอบด้วยรอยต่อของการทะลุผ่าน (tunneling junctions) และควอนตัมดอท (quantum dots) วางคั่นอยู่ระหว่างขั้วไฟฟ้าทั้งสอง (two electrodes) ที่เชื่อมต่อกับแหล่งจ่ายไฟฟ้าภายนอก จำนวนอิเล็กตรอนภายในควอนตัมดอทสามารถควบคุมได้ โดยการเปลี่ยนแปลงศักย์ไฟฟ้าที่ขั้วเกต (gate electrodes) ดังนั้นความซับซ้อนของอุปกรณ์อิเล็กตรอนเดี่ยวจึงขึ้นอยู่กับจำนวนรอยต่อของการทะลุผ่านและจำนวนควอนตัมดอท เช่น ทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว (single electron transistors) [6] ประกอบด้วยรอยต่อของการทะลุผ่านสองรอยต่อและควอนตัมดอทหนึ่งควอนตัมดอท และปั๊มอิเล็กตรอนเดี่ยว (single electron pumps) [7] ประกอบด้วยรอยต่อของการทะลุผ่านสามรอยต่อและควอนตัมดอทสองควอนตัมดอท เป็นต้น

การควบคุมให้อิเล็กตรอนหนึ่งตัวเคลื่อนที่ผ่านอุปกรณ์อิเล็กตรอนเดี่ยว ต้องอาศัยปรากฏการณ์การขัดขวางแบบคูลอมบ์ (Coulomb blockade effect) [1] ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ที่ทำให้กระแสการทะลุผ่าน (tunneling current) มีค่าลดต่ำลง โดยในปี ค.ศ. 1987 ศาสตราจารย์ฟูตอลและคณะ [8] ได้ประสบความสำเร็จในการควบคุมอิเล็กตรอนให้เคลื่อนที่ทีละหนึ่งตัว ในโครงสร้างสถานะของแข็ง ต่อมาในปี ค.ศ. 1991 ศาสตราจารย์ลาฟานและคณะ [9] ได้ประดิษฐ์กล่องอิเล็กตรอนเดี่ยว (single electron box) จากอะลูมิเนียมเพื่อศึกษาปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์ โดยแสดงให้เห็นว่าปัจจัยที่สำคัญของการเกิดปรากฏการณ์ดังกล่าวคือพลังงานการเพิ่มประจุ (charging energy) [1, 9] ซึ่งเป็นพลังงานที่น้อยที่สุดในการเพิ่ม (หรือลด) ประจุหนึ่งตัวในระบบ

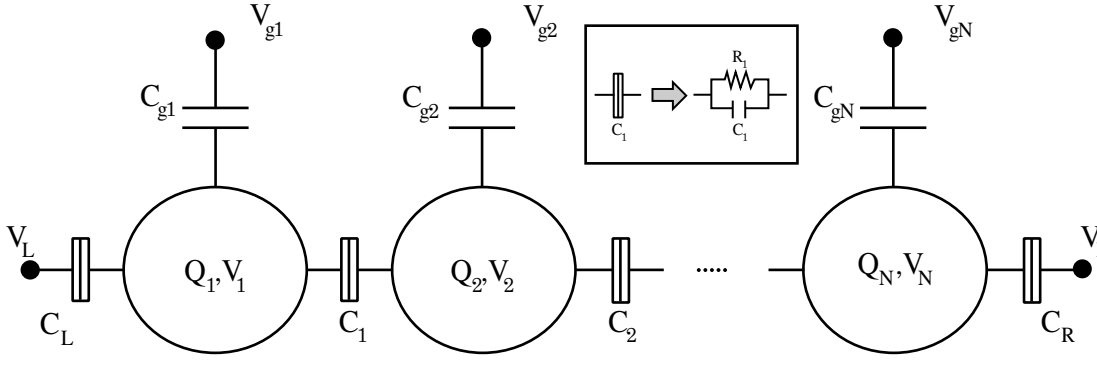
การอธิบายปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ที่เกิดขึ้นในอุปกรณ์อิเล็กตรอนเดี่ยว กรณีที่พลังงานการเพิ่มประจุมีค่ามากกว่าพลังงานของการทะลุผ่าน (tunneling energy) ระบบสามารถอธิบายได้ด้วยทฤษฎีรบกวน (perturbation theory) [7, 10] หรือในกรณีที่พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนมีค่ามากกว่าพลังงานการเพิ่มประจุ ระบบสามารถอธิบายได้ด้วยทฤษฎีการประมาณกึ่งแบบฉบับ (semiclassical approximation) [11, 12] แต่ในกรณีที่พิจารณาผลของปรากฏการณ์การทะลุผ่านร่วมด้วย ระบบสามารถบรรยายโดยฟังก์ชันนัลอินทิกรัลฟอร์มูเลชัน (functional integral formulation) [13] และวิธีการควอนตัมมอนติคาร์โล (quantum Monte Carlo method) [14, 15, 16] ซึ่งเป็นวิธีการมาตรฐานในการศึกษาระบบของอุปกรณ์อิเล็กตรอนเดี่ยว โดยการคำนวณค่าคาดหมาย (expectation values) ของปริมาณทางฟิสิกส์ที่สนใจ เช่น จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ย [8] และค่าความนำไฟฟ้าของระบบ [6] ในการคำนวณดังกล่าว จำเป็นต้องคำนวณเอฟเฟคทีฟแอคชัน (effective action) ของระบบ โดยเอฟเฟคทีฟแอคชันเป็นปริมาณที่ขึ้นอยู่กับจำนวนรอยต่อการทะลุผ่านและจำนวนของควอนตัมดอท เมื่ออุปกรณ์อิเล็กตรอนเดี่ยวมีจำนวนรอยต่อการทะลุผ่านและจำนวนของควอนตัมดอทเพิ่มมากขึ้น ทำให้การคำนวณเอฟเฟคทีฟแอคชันของระบบมีความซับซ้อนตามไปด้วย เช่น การคำนวณเอฟเฟคทีฟแอคชันของทรานซิสเตอร์อิเล็กตรอนเดี่ยว [6] และปั๊ม

อิเล็กตรอนเดี่ยว [17]

จากที่กล่าวมาข้างต้น ได้แสดงให้เห็นว่า เอฟเฟคทีฟแอคชันมีความสำคัญเป็นอย่างมากในการศึกษาอุปกรณ์อิเล็กตรอนเดี่ยว โดยทั่วไป เอฟเฟคทีฟแอคชันของอุปกรณ์อิเล็กตรอนเดี่ยวประกอบด้วยพจน์ของคูลอมบ์แอคชัน (Coulomb action) และพจน์ของทัลนัลลิงแอคชัน (tunneling action) แต่ในกรณีที่ค่าความนำไฟฟ้ารวมของระบบมีค่าน้อย ส่งผลให้ค่าทัลนัลลิงแอคชันมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับค่าคูลอมบ์แอคชัน ดังนั้น เอฟเฟคทีฟแอคชันของระบบสามารถประมาณได้ด้วยคูลอมบ์แอคชัน ซึ่งในกรณีดังกล่าว พาร์ทิชันฟังก์ชัน (partition function) สามารถหาคำตอบแบบแม่นตรง (exact solution) ทำให้สามารถคำนวณค่าคาดหมายของปริมาณที่สนใจได้โดยตรง ดังนั้น เพื่ออธิบายพฤติกรรมของอุปกรณ์อิเล็กตรอนเดี่ยวที่มีค่าความนำไฟฟ้าต่ำ ในงานวิจัยนี้ได้คำนวณคูลอมบ์แอคชันของระบบที่ประกอบด้วยรอยต่อการทะลุผ่านแบบเรียงแถวในหนึ่งมิติ ด้วยวิธีฟังก์ชันนัลอินทิกรัลฟอร์มูเลชัน ซึ่งนำไปสู่การคำนวณแบบแม่นตรงของพาร์ทิชันฟังก์ชันของระบบและจำนวนอิเล็กตรอนในแต่ละควอนตัมดอท นอกจากนี้ในงานวิจัยยังได้แสดงการประยุกต์ใช้คูลอมบ์แอคชันในการอธิบายและทำนายพฤติกรรมของระบบที่ประกอบด้วย 2 และ 3 ควอนตัมดอท ตามลำดับ

วิธีดำเนินการวิจัย

โดยทั่วไปอุปกรณ์อิเล็กตรอนเดี่ยวประกอบด้วย รอยต่อของการทะลุผ่านและควอนตัมดอทวางคั่นอยู่ระหว่างขั้วไฟฟ้าทั้งสองที่สามารถเชื่อมต่อกับแหล่งจ่ายไฟฟ้าภายนอก อุปกรณ์อิเล็กตรอนเดี่ยวในกรณีทั่วไปสามารถแสดงด้วยแบบจำลองดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 แบบจำลองของระบบ N ควอนตัมดอท ประกอบด้วยรอยต่อของการทะลุผ่าน N+1 รอยต่อ โดยแต่ละรอยต่อการทะลุผ่านมีค่าความจุไฟฟ้าเป็น C_L, C_1,...,C_{N-1} และ C_R ตามลำดับ ส่วนรอยต่อที่ไม่มีการทะลุผ่านอยู่ระหว่างขั้วเกต (V_g) และควอนตัมดอท มีความจุไฟฟ้าเป็น C_{g1},...,C_{gN-1} และ C_{gN} ตามลำดับ เมื่อ Q_j และ V_j เป็นจำนวนประจุไฟฟ้าและความต่างศักย์ของควอนตัมดอทลำดับที่ j

1. การคำนวณคูลอมบ์แอคชันของระบบควอนตัมดอท

จากงานวิจัยของวอลลิสเซอร์และศรีวิไล [6, 17] ที่แสดงการคำนวณเอฟเฟคทีฟแอคชันของระบบที่ประกอบไปด้วย 1 และ 2 ควอนตัมดอท ตามลำดับ พบว่า พาร์ทิชันฟังก์ชัน $Z(\beta)$ ของระบบสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลคูณของพาร์ทิชันฟังก์ชันที่สอดคล้องกับพลังงานการเพิ่มประจุ $Z_C[\beta]$ และ $Z_{TB}[\beta]$ ซึ่งเป็นพาร์ทิชันฟังก์ชันที่ขึ้นกับพลังงานของการทะลุผ่านและพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอน เมื่อ $\beta = 1/(k_BT)$ โดย k_B คือค่าคงที่ของโบลต์ซมันน์ (Boltzmann's constant) และ T เป็นค่าของอุณหภูมิในหน่วยเคลวิน พาร์ทิชันฟังก์ชันทั้งสองสามารถแยกคำนวณได้ทีละส่วน เนื่องจากเวกเตอร์มูลฐาน (basis vectors) ที่บรรยายพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนสามารถคำนวณค่าปริพันธ์ได้โดยตรง ทำให้คงเหลือเฉพาะตัวแปรเฟส (phase variables) ดังนั้น ในการคำนวณคูลอมบ์แอคชันของระบบ N ควอนตัมดอท จึงแสดงเฉพาะการคำนวณพาร์ทิชันฟังก์ชัน $Z_C[\beta]$ ซึ่งนำไปสู่คูลอมบ์แอคชันของระบบ N ควอนตัมดอท โดยพาร์ทิชันฟังก์ชันของคูลอมบ์สามารถเขียนอยู่ในรูปปริพันธ์ของฟังก์ชันนัลได้ [6, 18] ดังสมการ

$$Z_C[\beta] = \int D\mu(\vec{\boldsymbol{\varphi}}) \langle \vec{\boldsymbol{\varphi}} | e^{-\beta \hat{H}_C} | \vec{\boldsymbol{\varphi}} \rangle \tag{1}$$

โดยที่สัญลักษณ์ $|\vec{\boldsymbol{\varphi}}\rangle$ แทนสถานะของระบบที่บรรยายด้วยตัวแปรเฟส (phase states) ซึ่งสอดคล้องกับเฟสเวกเตอร์ $\vec{\boldsymbol{\varphi}} \equiv \left(\varphi_1(\tau),\ \varphi_2(\tau),\ ...,\varphi_j(\tau),\ ...,\ \varphi_N(\tau)\right)^T$ เมื่อตัวห้อย $(1, 2, ..., j, ..., N)$ แสดงลำดับของควอนตัมดอท ตัวแปรเฟส φ_j เป็นตัวแปรสังยุค (conjugate variable) ของจำนวนอิเล็กตรอน n ในควอนตัมดอทลำดับที่ j โดยสัญลักษณ์ย่อของปริพันธ์ในสมการ (*1*) นิยามตามสมการ

$$\int D\mu(\vec{\boldsymbol{\varphi}}) \equiv \prod_{I=1}^{N} \int_0^{2\pi} d\varphi_I \tag{2}$$

ตัวดำเนินการ $\hat{H}_C$ สอดคล้องกับพลังงานการเพิ่มประจุ E_C โดยค่าพลังงานการเพิ่มประจุของระบบ N ควอนตัมดอทสามารถคำนวณได้ตามสมการ [19]

$$E_C = \sum_{j=1}^{N} E_{jj}(n_j - n_{0j})^2 + 2\sum_{j<k}^{N} E_{jk}(n_j - n_{0j})(n_k - n_{0k}) \tag{3}$$

เมื่อ n_j เป็นจำนวนอิเล็กตรอนที่อยู่ในควอนตัมดอทลำดับที่ j และ n_{0j} เป็นจำนวนประจุที่เกิดจากการเหนี่ยวนำของความต่างศักย์ที่ขั้วเกตแต่ละควอนตัมดอท ในกรณีนี้ นิยามตามสมการ

$$n_{0j} = \begin{cases} \left(C_L V_L + C_{gj} V_{gj}\right)/|e| & \text{โดย} \quad j = 1 \\ \left(C_{gj} V_{gj}\right)/|e| & \text{โดย} \quad j \in \{2,\ ...,\ (N-1)\} \\ \left(C_R V_R + C_{gj} V_{gj}\right)/|e| & \text{โดย} \quad j = N \end{cases} \tag{4}$$

ส่วนค่า E_{jj} และ E_{jk} เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ $\mathbf{E}_N$ แสดงได้ดังสมการ

$$\mathbf{E}_N = \begin{pmatrix} E_{11} & \cdots & E_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{N1} & \cdots & E_{NN} \end{pmatrix} = \frac{e^2}{2}\mathbf{C}_N^{-1} \tag{5}$$

โดย $\mathbf{C}_N^{-1}$ เป็นเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ C_N ซึ่งสามารถแจกแจงได้ดังนี้

$$\mathbf{C}_N \equiv \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & \cdots & C_{NN} \end{pmatrix} \tag{6}$$

เมื่อเงื่อนไขในการกำหนดสมาชิกของเมทริกซ์ $\mathbf{C}_N$ แสดงได้ดังนี้

$$C_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{โดย} \quad |j-k|>1 \\ C_{\Sigma j} & \text{โดย} \quad j=k \\ -C_j & \text{โดย} \quad k-j=1 \\ -C_k & \text{โดย} \quad j-k=1 \end{cases} \tag{7}$$

ค่า $C_{\Sigma j}$ เป็นผลรวมของค่าความจุไฟฟ้าของทุกตัวที่ต่อเข้ากับควอนตัมดอทตัวที่ j เช่น $C_{\Sigma 1} = \mathrm{C}_L + \mathrm{C}_{g1} + \mathrm{C}_1$

ในการคำนวณสมการที่ (*1*) ลำดับแรกให้พิจารณาที่ช่วงเวลาสั้น $\Delta_j = \tau_j - \tau_{j-1}$ โดยที่ $\Delta_j = \beta/P$ ดังนั้น พาร์ทิชันฟังก์ชันในสมการที่ (*1*) สามารถเขียนใหม่ในรูปตัวแผ่กระจายในช่วงเวลาสั้น (short-time propagator) $\left\langle \vec{\boldsymbol{\varphi}}_j \left| e^{-\Delta_j \hat{H}_C} \right| \vec{\boldsymbol{\varphi}}_{j-1} \right\rangle$ ได้ดังนี้

$$Z_C[\beta] = \prod_{I=1}^{N} \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi_{I,P} \ldots \int_0^{2\pi} d\varphi_{I,0} \delta(\varphi_{I,P} - \varphi_{I,0}) \right\} \times \left\langle \vec{\boldsymbol{\varphi}}_P \left| e^{-\Delta_P \hat{H}_C} \right| \vec{\boldsymbol{\varphi}}_{P-1} \right\rangle \cdots \left\langle \vec{\boldsymbol{\varphi}}_1 \left| e^{-\Delta_1 \hat{H}_C} \right| \vec{\boldsymbol{\varphi}}_0 \right\rangle \tag{8}$$

โดยที่ $\vec{\boldsymbol{\varphi}}_j = \left(\varphi_1(\tau_j), \varphi_2(\tau_j), ..., \varphi_N(\tau_j)\right)^T$ และ $\vec{\boldsymbol{\varphi}}_{j-1} = \left(\varphi_1(\tau_j), \varphi_2(\tau_j), ..., \varphi_N(\tau_j)\right)^T$ จากคุณสมบัติปิด (closure relation) ของตัวแปรเฟส φ และตัวแปรสังยุค n เป็นดังสมการ

$$1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \left|\varphi\right\rangle\left\langle\varphi\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|n\right\rangle\left\langle n\right| \tag{9}$$

โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม เมื่อแทรกคุณสมบัติปิดในสมการ (9) ลงไปในตัวแผ่กระจายในช่วงเวลาสั้น พบว่า

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\boldsymbol{\varphi}}_j \left| e^{-\Delta_j \hat{H}_C} \right| \vec{\boldsymbol{\varphi}}_{j-1} \right\rangle &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \left\langle \varphi_{1,j} \middle| n_1 \right\rangle \cdots \left\langle \varphi_{N,j} \middle| n_N \right\rangle e^{-\Delta_j E_C(n_1,\ldots,n_N)} \left\langle n_1 \middle| \varphi_{1,j-1} \right\rangle \cdots \left\langle n_N \middle| \varphi_{N,j-1} \right\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} e^{-\Delta_j E_C(n_1,\ldots,n_N) - \sum_{I=1}^{N} i n_I (\varphi_{I,j} - \varphi_{I,j-1})} \end{aligned} \tag{10}$$

โดยที่ $\left\langle n_I \middle| \varphi_{I,j} \right\rangle = (2\pi)^{-1/2} \exp(i n_I \varphi_{I,j})$ เพื่อความสะดวกในการคำนวณสมการที่ (10) กำหนดให้ $\tilde{n}_I = (n_I - n_{0I})$ และ $\Delta\varphi_I = (\varphi_{I,j} - \varphi_{I,j-1} + 2\pi k_{I,j})/\Delta_j$ และใช้ผลรวมของฟังก์ชันของจำนวนเต็ม ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของปริพันธ์ได้โดยการใช้สูตรผลรวมของปัวซอง (Poisson's resummation formula) [18] กล่าวคือ

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dn \; e^{-2\pi i k n} f(n) \tag{11}$$

ดังนั้นสมการ (10) สามารถเขียนใหม่ในรูปของเมทริกซ์ ได้เป็น

$$\left\langle \vec{\varphi}_j \left| e^{-\Delta_j \hat{H}_C} \right| \vec{\varphi}_{j-1} \right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{k_{I,j}=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{n}_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{n}_N \times \exp\left[-i\Delta_j \sum_{I=1}^{N} \tilde{n}_I \Delta\varphi_I - i\Delta_j \sum_{I=1}^{N} n_{0I} \Delta\varphi_I \right]$$
$$\times \exp\left[-\Delta_j \left(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \ldots, \tilde{n}_N \right) \begin{pmatrix} E_{11} & \cdots & E_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{N1} & \cdots & E_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{n}_1 \\ \vdots \\ \tilde{n}_N \end{pmatrix} \right] \tag{12}$$

จากสูตรปริพันธ์ของเกาส์ในรูปเมทริกซ์ (Gaussian's integral formula) [13]

$$\int_{-\infty}^{\infty} dn_1 \ldots dn_N \exp\left[-\lambda \left(\vec{\mathbf{n}}^T \mathbf{E}_N \vec{\mathbf{n}} + \vec{\mathbf{n}}^T \vec{\mathbf{J}} \right) \right] = \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^{N/2} \left[\det \mathbf{E}_N \right]^{\frac{-1}{2}} \exp\left[\left(\frac{\lambda}{4} \right) \vec{\mathbf{J}}^T \mathbf{E}_N^{-1} \vec{\mathbf{J}} \right] \tag{13}$$

เมื่อเมทริกซ์ $\vec{\mathbf{n}} = \left(\tilde{n}_1,\ \tilde{n}_2,\ \ldots,\ \tilde{n}_N \right)^T$, $\vec{\mathbf{J}} = \left(\Delta\varphi_1,\ \Delta\varphi_2,\ \ldots,\ \Delta\varphi_N \right)^T$, และ λ เป็นค่าคงที่ ดังนั้น สมการที่ (12) สามารถคำนวณได้เป็น

$$\left\langle \vec{\varphi}_j \left| e^{-\Delta_j \hat{H}_C} \right| \vec{\varphi}_{j-1} \right\rangle = \mathrm{N}_j \sum_{k_{I,j}=-\infty}^{\infty} \exp\left\{ \frac{-\Delta_j}{4} \left(\Delta\vec{\varphi}_j^T \right) \mathbf{E}_N^{-1} \left(\Delta\vec{\varphi}_j \right) + \left[-i\Delta_j \left(\vec{\mathbf{n}}_g^T \right) \left(\Delta\vec{\varphi}_j \right) \right] \right\} \tag{14}$$

โดยที่ $\vec{\mathbf{n}}_g = (n_{01}, \ldots, n_{0N})^T$ และพจน์ N_j เป็นค่าคงที่ของการนอมอลไรซ์ (normalization constant) มีค่าดังสมการ

$$\mathrm{N}_j = \frac{1}{(2\pi)^N} \left(\frac{\pi}{\Delta_j} \right)^{N/2} \left[\det \mathbf{E}_N \right]^{\frac{-1}{2}} \tag{15}$$

เพื่อความสะดวกในการจัดรูป กำหนดให้

$$k'_{I,n} = \sum_{j=1}^{n} k_{I,j} \quad \text{โดยที่} \quad n = 1, 2, 3 \ldots, P \tag{16}$$

และกำหนดให้

$$\varphi'_{I,j} = \varphi_{I,j} + 2\pi k'_{I,j} \tag{17}$$

จากนิยามของสมการที่ (*16*) และ (*17*) พบว่า

$$\Delta\varphi_{I,j} = \frac{\left(\varphi_{I,j} + 2\pi k'_{I,j} \right) - \left(\varphi_{I,j-1} + 2\pi k'_{I\,j-1} \right)}{\Delta_j} = \frac{\varphi'_j - \varphi'_{j-1}}{\Delta_j} = \Delta\varphi'_{j-1} \tag{18}$$

ดังนั้น เมื่อแทนตัวแผ่กระจายในช่วงเวลาสั้นลงในสมการ (*8*) พบว่า

$$Z_C[\beta] = \mathrm{N} \prod_{I=1}^{N} \left(\sum_{k'_{I,1}, \ldots, k'_{I,P}=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi k'_{I,P}}^{2\pi (k'_{I,P}+1)} d\varphi'_{I,P} \ldots \int_{2\pi k'_{I,1}}^{2\pi (k'_{I,1}+1)} d\varphi'_{I,1} \int_0^{2\pi} d\varphi'_{I,0}\, \delta(\varphi'_{I,P} - \varphi'_{I,0} - 2\pi k'_{I,P}) \right)$$
$$\times \exp\left\{ \sum_{j=1}^{P} \Delta_j \left[\frac{-1}{4} \Delta\vec{\varphi}'^T_j \mathbf{E}_N^{-1} \Delta\vec{\varphi}'_j - i\vec{\mathbf{n}}_g^T \cdot \Delta\vec{\varphi}'_j \right] \right\} \tag{19}$$

เมื่อ

$$\Delta\vec{\varphi}'_j = \left(\frac{\varphi'_{1,j} - \varphi'_{1,j-1}}{\Delta_j}, \frac{\varphi'_{2,j} - \varphi'_{2,j-1}}{\Delta_j}, ..., \frac{\varphi'_{N,j} - \varphi'_{N,j-1}}{\Delta_j} \right)^T \tag{20}$$

ในสมการที่ (19) พจน์นอมอลไรซ์ $\mathrm{N} = \prod_{j=1}^{P} \mathrm{N}_j$ ดังนั้น พาร์ทิชันฟังก์ชันสามารถเขียนได้ดังสมการ

$$Z_C[\beta] = \sum_{k'_1,...,k'_N=-\infty}^{\infty} \int_{\varphi'_1(0)}^{\varphi'_1(0)+2\pi k'_1} D[\varphi'_1(\tau)] ... \int_{\varphi'_N(0)}^{\varphi'_N(0)+2\pi k'_N} D[\varphi'_N(\tau)]\, e^{-S_C[\vec{\varphi}'(\tau)]} \tag{21}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} &\int_{\varphi'_1(0)}^{\varphi'_1(0)+2\pi k'_1} D[\varphi'_1(\tau)] ... \int_{\varphi'_N(0)}^{\varphi'_N(0)+2\pi k'_N} D[\varphi'_N(\tau)] \\ &\qquad = \mathrm{N} \prod_{I=1}^{N} \int_{2\pi k'_{I,P}}^{2\pi(k'_{I,P}+1)} d\varphi'_{I,P} ... \int_{2\pi k'_{I,1}}^{2\pi(k'_{I,1}+1)} d\varphi'_{I,1} \int_0^{2\pi} d\varphi'_{I,0}\, \delta(\varphi'_{I,P} - \varphi'_{I,0} - 2\pi k'_{I,P}) \end{aligned} \tag{22}$$

เมื่อคูลอมบ์แอคชันของระบบที่ประกอบด้วย N ควอนตัมดอทสามารถแสดงได้ตามสมการ

$$S_C[\vec{\varphi}'(\tau)] = \int_0^{\beta} d\tau \left[\dot{\vec{\varphi}}'^T \mathrm{E}_N \dot{\vec{\varphi}}' + i(\vec{\mathbf{n}}_g^T \cdot \dot{\vec{\varphi}}') \right] \tag{23}$$

เมื่อ $\dot{\vec{\varphi}}'(\tau_j) = \left(\dot{\varphi}'_1(\tau_j), ..., \dot{\varphi}'_N(\tau_j)\right)^T$ และ $\mathrm{E}_N = \mathbf{E}_N^{-1}/4 = \mathrm{C}_N/2e^2$ จากสมการ (23) พบว่าค่าคูลอมบ์แอคชันสามารถเขียนได้โดยตรงจากเมทริกซ์ C_N ตามนิยามในสมการ (6) และ (7) ทำให้การศึกษาระบบควอนตัมดอทที่ซับซ้อน มีความสะดวกมากยิ่งขึ้น เมื่อระบบถูกบรรยายในรูปฟังก์ชันนัลอินทิกรัลฟอร์มูเลชัน เพื่อความสะดวกในหัวข้อต่อจากนี้ จะละเครื่องหมายไพร์ม (′) ในตัวแปรเฟสและค่าขอบเขตของการปริพันธ์

2. การคำนวณพาร์ทิชันฟังก์ชันของระบบ *N* ควอนตัมดอท

จากที่ได้แสดงพาร์ทิชันฟังก์ชันของระบบที่ประกอบไปด้วย N ควอนตัมดอท ในสมการ (21) พบว่าสมการดังกล่าว สามารถคำนวณคำตอบแบบแม่นตรงได้ เนื่องจากสามารถจัดพจน์ให้อยู่ในรูปของปริพันธ์ของเกาส์ ในหัวข้อนี้จึงได้แสดงการคำนวณค่าพาร์ทิชันฟังก์ชันในสมการ (21) และเขียนให้อยู่ในรูปที่สะดวกในการประมวลผลเชิงตัวเลข (numerical calculation) จากสมการ (21) พบว่า ขอบเขตของการคำนวณค่าปริพันธ์มีค่าเพิ่มขึ้นเป็นจำนวนเท่าของค่า 2π กล่าวคือ $2\pi k_i$ ซึ่งค่า k_i ถูกเรียกว่าตัวเลขไวน์ดิง (winding numbers) เพื่อความสะดวกในการประมวลผลเชิงตัวเลข ขอบเขตของการหาค่าปริพันธ์ที่มีหลายค่าสามารถเขียนใหม่ได้ โดยการเปลี่ยนตัวแปร ดังนี้

$$\vec{\varphi}(\tau) = \vec{\xi}_I + \tau \vec{\mathbf{V}}_{k_I} \tag{24}$$

เมื่อ $\vec{\mathbf{V}}_{k_I} = (2\pi/\beta)\ \vec{\mathbf{k}}_I$ โดยที่ $\vec{\mathbf{k}}_I = (k_1, ..., k_N)^T$ และเมทริกซ์ $\vec{\xi}_I = (\xi_1\tau_j), ..., \xi_N(\tau_j))^T$ เมื่อ $I \in \{1, ..., N\}$ ดังนั้น พาร์ทิชันฟังก์ชันในสมการ (21) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$Z_C[\beta] = \int_{\xi_I(0)=0}^{\xi_I(\beta)=0} D\vec{\xi}\, \exp\left[-\int_0^{\beta} d\tau' \left[\left(\dot{\vec{\xi}}_I + \vec{\mathbf{V}}_{k_I} \right)^T \mathrm{E}_N \left(\dot{\vec{\xi}}_I + \vec{\mathbf{V}}_{k_I} \right) + i\vec{\mathbf{n}}_g^T \cdot \left(\dot{\vec{\xi}}_I + \vec{\mathbf{V}}_{k_I} \right) \right] \right] \tag{25}$$

เมื่อ

$$\int_{\xi(0)=0}^{\xi(\beta)=0} D\vec{\xi} \equiv \mathrm{N} \sum_{k_1',\ldots,k_N'=-\infty}^{\infty} \int_{\xi(0)=0}^{\xi(\beta)=0} D\left[\xi_1(\tau)\right] \ldots \int_{\xi(0)=0}^{\xi(\beta)=0} D\left[\xi_N(\tau)\right]$$
$$= \mathrm{N} \prod_{I=1,\ldots,N} \sum_{k_{I,1},\ldots,k_{I,P}=-\infty}^{\infty} \int_{\xi(0)=0}^{\xi(\beta)=0} d\,\xi_{I,P} \cdots \int_{\xi(0)=0}^{\xi(\beta)=0} d\xi_{I,1} \int_{\xi(0)=0}^{\xi(\beta)=0} d\xi_{I,0}\,\delta(\xi_P - \xi_0 - 2\pi k_P) \tag{26}$$

จากเงื่อนไขขอบเขต $\xi_I(\beta) = \xi_I(0)$ ทำให้ค่าพาร์ทิชันฟังก์ชันในสมการที่ (25) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$Z_C[\beta] = \sum_{k_1,\ldots,k_N=-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-2^2\pi^2}{\beta}\left[\vec{\mathbf{k}}_I^T \mathrm{E}_N \vec{\mathbf{k}}_I\right] - i2\pi\vec{\mathbf{n}}_g^T \cdot \vec{\mathbf{k}}_I\right] \int_{\xi_I(0)=0}^{\xi_I(\beta)=0} D\vec{\xi} \exp\left[-\int_0^{\beta} d\tau \left[\dot{\vec{\xi}}_I^T \mathrm{E}_N \dot{\vec{\xi}}_I\right]\right] \tag{27}$$

ในการคำนวณค่าปริพันธ์ในสมการ (27) ได้กำหนดให้ช่วงเวลา τ ถูกแบ่งช่วงออกเป็น P ช่วง ซึ่งแต่ละช่วงมีขนาดเท่ากับ $\Delta_j = \beta/P$ และเขียนแอคชันใหม่ด้วยผลรวมของรีมันน์ (Reimann sum) ดังนี้

$$\int_{\xi_I(0)=0}^{\xi_I(\beta)=0} D\vec{\xi} \exp\left[-\int_0^{\beta} d\tau \left[\dot{\vec{\xi}}_I^T \mathrm{E}_N \dot{\vec{\xi}}_I\right]\right] = \int_{\xi_I(0)=0}^{\xi_I(\beta)=0} D\vec{\xi} \exp \sum_{j=0}^{P-1} \frac{-1}{\Delta_j} \left[\begin{pmatrix} \xi_{1_{j+1}} - \xi_{1_j} \\ \vdots \\ \xi_{N_{j+1}} - \xi_{N_j} \end{pmatrix}^T \mathrm{E}_N \begin{pmatrix} \xi_{1_{j+1}} - \xi_{1_j} \\ \vdots \\ \xi_{N_{j+1}} - \xi_{N_j} \end{pmatrix} \right]$$
$$= \int_{\xi_I(0)=0}^{\xi_I(\beta)=0} D\vec{\xi} \exp\left[\sum_{j=0}^{P-1} \frac{-1}{\Delta_j} \left[\vec{\xi}_{j+1}^T \mathrm{E}_N \vec{\xi}_{j+1} - 2\vec{\xi}_{j+1}^T \mathrm{E}_N \vec{\xi}_j + \vec{\xi}_j^T \mathrm{E}_N \vec{\xi}_j\right]\right] \tag{29}$$

โดยที่เมทริกซ์ $\vec{\xi}_j = (\xi_{1_j},\ldots,\xi_{N_j})^T$ ซึ่ง $j \in \{0,\ 1\ ,\ldots,\ (P\text{-}1)\}$ และใช้คุณสมบัติสมมาตรของเมทริกซ์ กล่าวคือ $\mathrm{E}_N = \mathrm{E}_N^T$ ในการคำนวณสมการ (28) สามารถแยกคำนวณค่าปริพันธ์ได้ทีละส่วน โดยคำนวณค่าปริพันธ์ของเมทริกซ์เฟส $\vec{\xi}_{j+1}$ ไปจนถึงปริพันธ์ของเมทริกซ์เฟส $\vec{\xi}_{P-1}$ พบว่า สมการ (28) สามารถคำนวณได้เป็น

$$\int_{\xi_I(0)=0}^{\xi_I(\beta)=0} D\vec{\xi} \exp\left[-\int_0^{\beta} d\tau \left[\dot{\vec{\xi}}_I^T \mathrm{E}_N \dot{\vec{\xi}}_I\right]\right] = \frac{2^N \pi^N}{\sqrt{\pi\beta}^N} \left[\det \mathrm{E}_N\right]^{\frac{1}{2}} \tag{29}$$

เมื่อแทนสมการ (29) ลงในสมการ (27) พาร์ทิชันฟังก์ชันของระบบ N ควอนตัมดอท สามารถเขียนใหม่ได้ดังสมการ

$$Z_C[\beta] = \frac{2^N \pi^N}{\sqrt{\pi\beta}^N} \left[\det \mathrm{E}_N\right]^{\frac{1}{2}} \sum_{k_1,\ldots,k_N=-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-2^2\pi^2}{\beta}\left[\vec{\mathbf{k}}_I^T \mathrm{E}_N \vec{\mathbf{k}}_I\right] - i2\pi\vec{\mathbf{n}}_g^T \vec{\mathbf{k}}_I\right] \tag{30}$$

3. จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยของระบบ N ควอนตัมดอท

เพื่อแสดงการประยุกต์ใช้ค่าคูลอมบ์แอคชันในสมการ (23) และพาร์ทิชันฟังก์ชันในสมการ (30) ในหัวข้อนี้ได้แสดงการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในระบบ โดยผลรวมของจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในระบบที่ประกอบไปด้วย N ควอนตัมดอท สามารถนิยามได้ ตามสมการ

$$\langle n_T \rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle n_j \rangle \tag{31}$$

โดย $\langle n_T \rangle$ คือจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยของระบบ และ $\langle n_j \rangle$ หมายถึง จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในควอนตัมดอท ลำดับที่ j โดยที่ $j \in \{1, 2,...,N\}$ ซึ่งสามารถคำนวณได้ [20] ตามสมการ

$$\langle n_j \rangle = n_{0j} - \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{N} \frac{E_{jk}}{E_{jj}} \left(\langle n_k \rangle - n_{0k} \right) + \frac{1}{2\beta E_{jj}} \frac{\partial \ln Z_C}{\partial n_{0j}} \tag{32}$$

โดยค่า E_{jj} และ E_{jk} เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ E_N ดังนั้น เมื่อนำค่าพาร์ทิชันฟังก์ชันของระบบ N ควอนตัมดอท จากสมการที่ (30) แทนลงในสมการ (32) สามารถเขียนสมการ (32) ใหม่ได้เป็น

$$\langle n_j \rangle = \begin{cases} n_{0j} + \dfrac{i2\pi}{e^2\beta} \left(C_j \langle k_{j+1} \rangle - C_{\Sigma j} \langle k_j \rangle \right) & \text{โดย } j = 1 \\ n_{0j} + \dfrac{i2\pi}{e^2\beta} \left(C_{j-1} \langle k_{j-1} \rangle - C_{\Sigma j} \langle k_j \rangle + C_j \langle k_{j+1} \rangle \right) & \text{โดย } j \in (2,..., (N-1)) \\ n_{0j} + \dfrac{i2\pi}{e^2\beta} \left(C_{j-1} \langle k_{j-1} \rangle - C_{\Sigma j} \langle k_j \rangle \right) & \text{โดย } j = N \end{cases} \tag{33}$$

เมื่อค่าคาดหมายของตัวเลขไวน์ดิงในสมการ (33) นิยามดังสมการ

$$\langle k_j \rangle = \frac{\sum_{k_1,...,k_N=-\infty}^{\infty} ie^{\frac{-2^2\pi^2}{\beta}\left[\vec{\mathbf{k}}_I^T \mathrm{E}_N \vec{\mathbf{k}}_I\right]} k_j \sin\left(2\pi \vec{\mathbf{n}}_g^T \cdot \vec{\mathbf{k}}_I\right)}{\sum_{k_1,...,k_N=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-2^2\pi^2}{\beta}\left[\vec{\mathbf{k}}_I^T \mathrm{E}_N \vec{\mathbf{k}}_I\right]} \cos\left(2\pi \vec{\mathbf{n}}_g^T \cdot \vec{\mathbf{k}}_I\right)} \tag{34}$$

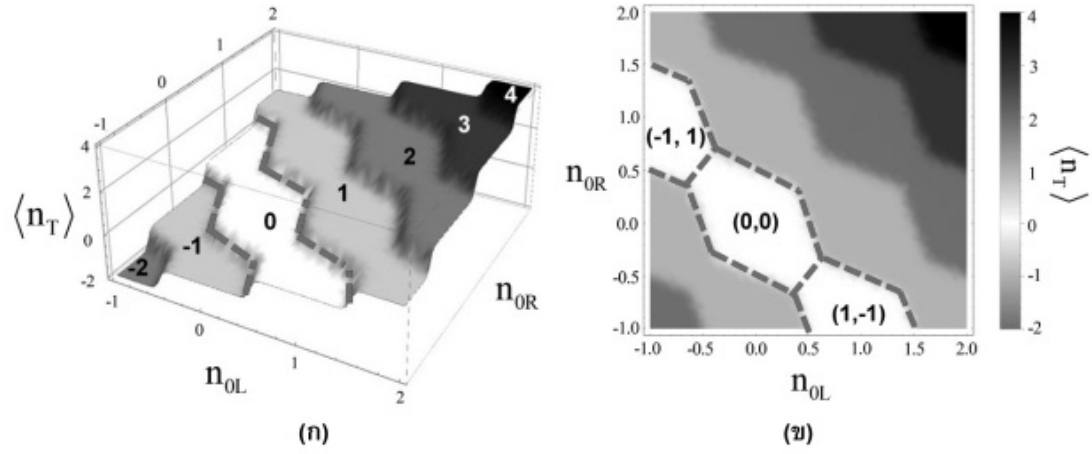
สมการ (32) สามารถตรวจสอบได้โดยตรงจากการหาค่าเฉลี่ยโดยการใช้การแจกแจงแบบแมกซ์เวลล์-โบลต์ซมันน์ (Maxwell-Boltzmann distribution) โดยที่พาร์ทิชันฟังก์ชันในกรณีนี้ $Z_C[\beta] = \sum_{n_1,...,n_N=-\infty}^{\infty} \exp[-\beta E_C]$ เมื่อ E_C นิยามตามสมการ (3) ซึ่งสะดวกกว่าการคำนวณจากฟังก์ชันนัลอินทิกรัลฟอร์มูเลชัน เนื่องจากพลังงานการเพิ่มประจุของระบบ เป็นฟังก์ชันของจำนวนอิเล็กตรอนในแต่ละควอนตัมดอท แต่อย่างไรก็ตาม วิธีการทั้งสองให้ผลการคำนวณที่เหมือนกัน เพื่อแสดงตัวอย่างการประยุกต์ใช้คูลอมบ์แอคชัน ในการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยตามสมการ (33) และ (34) ในหัวข้อต่อไป จะได้กล่าวถึงการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยของระบบที่ประกอบด้วย 2 และ 3 ควอนตัมดอท ตามลำดับ

ผลและการวิเคราะห์ผลการวิจัย

จากผลการคำนวณพาร์ทิชันฟังก์ชันในสมการ (30) สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการอธิบายพฤติกรรมของระบบควอนตัมดอทที่เรียงแถวในหนึ่งมิติ โดยในหัวข้อนี้ ได้แสดงตัวอย่างการนำผลการวิจัยไปประยุกต์ใช้ในการอธิบายระบบที่ประกอบด้วย 2 และ 3 ควอนตัมดอท ตามลำดับ

1. ระบบ 2 ควอนตัมดอท

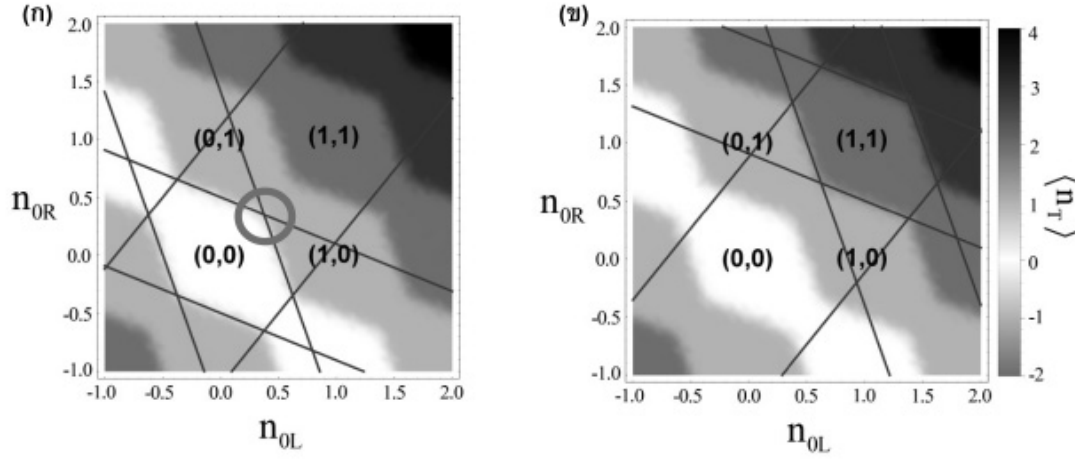
จากเอกสารอ้างอิง [7] ที่ได้รายงานผลการศึกษาระบบที่ประกอบด้วย 2 ควอนตัมดอทที่ทำจากโลหะ (two metallic quantum dot system) ซึ่งถูกเรียกว่าปั๊มอิเล็กตรอนเดี่ยว เมื่อนำค่าพารามิเตอร์ของระบบที่ถูกสร้างขึ้นนี้ มาคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยตามสมการ (31)-(34) โดยกำหนดให้จำนวนควอนตัมดอท $N = 2$ ผลการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ย สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 (ก) จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยของระบบปั๊มอิเล็กตรอนเดี่ยว ที่อุณหภูมิประมาณ 107 mK (ข) แผนภาพเสถียร (stability diagrams) ของปั๊มอิเล็กตรอนเดี่ยวที่สร้างจากภาพฉายของจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยของระบบลงบนระนาบ (n_{0L}, n_{0R})

จากรูปที่ 2 (ก) เมื่อ n_{0L} และ n_{0R} มีการเปลี่ยนแปลงอยู่ในช่วง -1 ถึง 2 พบว่า จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยของระบบมีค่าเพิ่มขึ้นแบบไม่ต่อเนื่อง จาก -2 เป็น 4 (โดยจำนวนที่เป็นลบหมายถึงในควอนตัมดอทมีประจุรวมเป็น $+|e|$ และ $+2|e|$ ตามลำดับ) พิจารณาเส้นประ แสดงตัวอย่างของบริเวณที่มีการส่งผ่านอิเล็กตรอนในระบบซึ่งเป็นขอบเขตของบริเวณที่เกิดการขัดขวางแบบคูลอมบ์ (Coulomb blockade regions) ซึ่งมีลักษณะเป็นขั้นบันได รูปที่ 2 (ข) เส้นประเป็นเส้นที่แสดงขอบเขตของบริเวณที่เกิดการขัดขวางแบบคูลอมบ์ในกรณีที่ $\langle n_T \rangle = 0$ ซึ่งสามารถแบ่งบริเวณดังกล่าวได้เป็นเซลล์รูปหกเหลี่ยม โดยแต่ละเซลล์มีจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยของระบบเท่ากับศูนย์ ในทำนองเดียวกัน กรณีที่ $\langle n_T \rangle \in \{1, 2, 3, 4\}$ ได้แสดงบริเวณที่เกิดการขัดขวางแบบคูลอมบ์ด้วยระดับความเข้มสีที่แตกต่างกัน

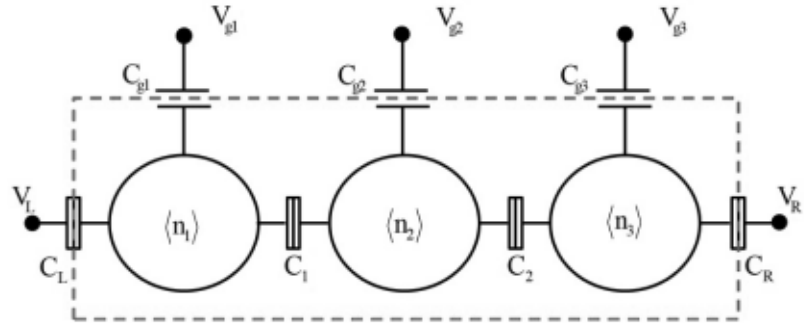
นอกจากนั้น ในงานวิจัยนี้ได้นำแผนภาพเสถียรในรูปที่ 2 (ข) ไปเปรียบเทียบกับวิธีการคำนวณมาตรฐานซึ่งคำนวณแผนภาพดังกล่าวจากพลังงานการเพิ่มประจุของระบบโดยตรง [21, 22] ผลการเปรียบเทียบได้แสดงดังรูปที่ 3 พบว่า ทั้งสองวิธีแสดงบริเวณของการเกิดการขัดขวางแบบคูลอมบ์ที่สอดคล้องกัน แต่อย่างไรก็ตาม การสร้างแผนภาพเสถียรโดยวิธีมาตรฐาน ไม่สามารถแสดงผลของอุณหภูมิต่อการเปลี่ยนแปลงจำนวนอิเล็กตรอนในควอนตัมดอทได้ แต่จากสมการ (33) สามารถสร้างแผนภาพเสถียรที่ขึ้นกับค่าอุณหภูมิได้ โดยการกำหนดจากค่าพารามิเตอร์ β ซึ่งจากการศึกษาพบว่า เมื่ออุณหภูมิมีค่าสูงขึ้นส่งผลให้บริเวณของการส่งผ่านอิเล็กตรอน (ที่แสดงด้วยเส้นประ) ขยายออกมากขึ้น โดยผลดังกล่าวสืบเนื่องจากเมื่ออิเล็กตรอนมีพลังงานจลน์มากขึ้น อิเล็กตรอนจึงมีโอกาสที่จะเอาชนะแรงผลักคูลอมบ์ได้มากขึ้น กล่าวคือ บริเวณที่เกิดการขัดขวางแบบคูลอมบ์จะมีพื้นที่แคบลง นอกจากนี้ ในรูปที่ 3 (ก) ในวงกลมได้แสดงตัวอย่างของจุดทริปเปิล (triple point) ซึ่งเป็นจุดที่มีการส่งผ่านอิเล็กตรอนจากขั้วซอร์สไปยังควอนตัมดอทลำดับที่ 1, 2 และขั้วเดรน ตามลำดับ กล่าวคือ (0,0) → (1,0) → (0,1) → (0,0) ซึ่งพบว่า ให้ผลตรงกับผลการทดลองของลิมบัชและคณะ [7] ที่ให้ค่า $n_x = n_{0L} + n_{0R} \approx 0.7$ เช่นเดียวกัน



รูปที่ 3 การเปรียบเทียบแผนภาพเสถียรของระบบ 2 ควอนตัมดอทที่คำนวณได้กับวิธีมาตรฐานที่แทนด้วยเส้นทึบ โดยรูป (ก) และ (ข) แสดงกรณีที่จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ย ($\langle n_L \rangle$, $\langle n_R \rangle$) เป็น (0, 0) และ (1, 1) ตามลำดับ

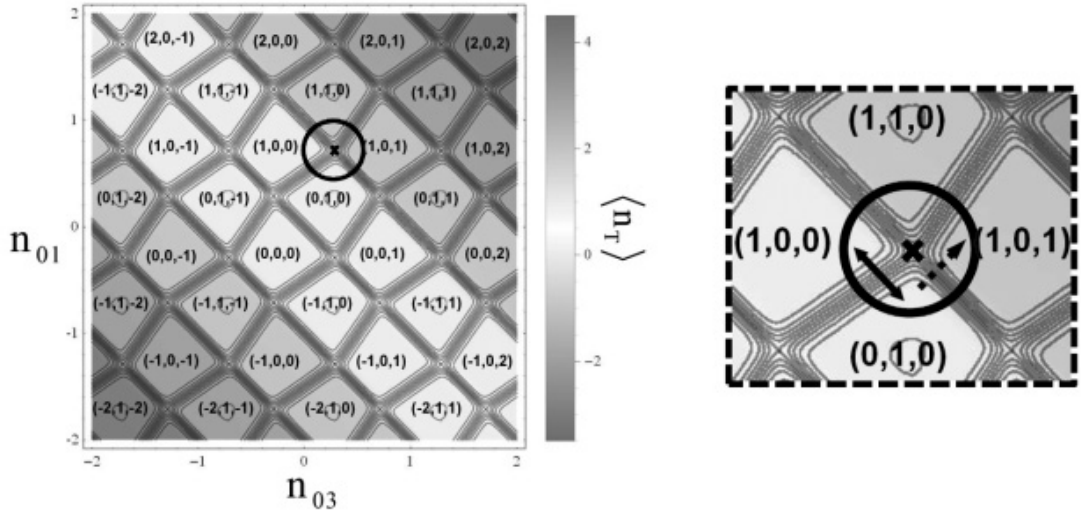
2. จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยของระบบ 3 ควอนตัมดอท

จากหัวข้อที่ผ่านมาได้แสดงการประยุกต์ใช้สมการ (31)-(34) ในการสร้างแผนภาพเสถียรของระบบที่ประกอบด้วย 2 ควอนตัมดอท พบว่าสอดคล้องกับวิธีมาตรฐานซึ่งคำนวณแผนภาพเสถียรโดยตรงจากพลังงานการเพิ่มประจุของระบบ ยิ่งไปกว่านั้น วิธีการที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ ยังสามารถแสดงผลของอุณหภูมิต่อการเปลี่ยนแปลงแผนภาพเสถียรอีกด้วย ในหัวข้อนี้ ได้นำเอาวิธีการดังกล่าวมาประยุกต์ใช้ในการสร้างแผนภาพเสถียรของระบบที่ประกอบด้วย 3 ควอนตัมดอท ซึ่งมีแบบจำลองดังแสดงในรูปที่ 4



รูปที่ 4 แบบจำลองของระบบ 3 ควอนตัมดอท ซึ่งประกอบด้วยรอยต่อของการทะลุผ่าน 4 รอยต่อ เพื่อให้ระบบมีความสมมาตรรอบจุดกึ่งกลางของระบบ กำหนดให้ความจุไฟฟ้า $C_L = C_R = 220$ (aF), $C_1 = C_2 = 140$ (aF) และ $C_{g1} = C_{g2} = C_{g3} = 40$ (aF)

จากแบบจำลองในรูปที่ 4 จำนวนอิเล็กตรอนของระบบขึ้นอยู่กับสนามไฟฟ้าของขั้วเกตทั้ง 3 ดังนั้น เพื่อที่จะสร้างแผนภาพเสถียรของระบบจากภาพฉายของจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในแต่ละควอนตัมดอท ใน 2 มิติ ได้กำหนดให้เฉพาะ n_{01} และ n_{03} มีการเปลี่ยนแปลง แต่ค่า n_{02} มีค่าคงที่ที่ 0.5 ซึ่งค่าดังกล่าวกำหนดเพื่อให้อิเล็กตรอนสามารถส่งผ่านระหว่างควอนตัมดอทได้ โดยผลการคำนวณแผนภาพเสถียรได้แสดงไว้ในรูปที่ 5



รูปที่ 5 แผนภาพเสถียรของระบบ 3 ควอนตัมดอทที่สร้างจากภาพฉายของจำนวนอิเล็กตรอนรวมเฉลี่ย โดยพิจารณากรณีที่ $n_{02} = 0.5$ และอุณหภูมิประมาณ 120 mK สัญลักษณ์ ($\langle n_1 \rangle$, $\langle n_2 \rangle$, $\langle n_3 \rangle$) ในบริเวณสี่เหลี่ยมคางหมู แสดงจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในควอนตัมดอทลำดับที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ

จากรูปที่ 5 ภายในบริเวณสี่เหลี่ยมคางหมู เป็นบริเวณที่เกิดการขัดขวางแบบคูลอมบ์อย่างสมบูรณ์ กล่าวคือ จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในแต่ละควอนตัมดอทจะมีค่าคงที่ จนกระทั่งแรงดันไฟฟ้าที่ขั้วเกตทั้งสองมีค่าที่เหมาะสม อิเล็กตรอนจึงจะมีการส่งผ่านระหว่างควอนตัมดอท ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงจำนวนอิเล็กตรอนภายในระบบ นอกจากนั้น บริเวณที่อยู่ระหว่างบริเวณการขัดขวางแบบคูลอมบ์ จะเป็นบริเวณที่จำนวนอิเล็กตรอนของระบบมีการเปลี่ยนแปลง ยกตัวอย่างเช่น ภายในวงกลม เป็นบริเวณที่เรียกว่าจุดควอดรูเปิล (quadruple point) [23] ซึ่งเป็นบริเวณที่เกิดจากจุดทริปเปิล 2 จุดรวมกัน โดยบริเวณดังกล่าวเป็นตำแหน่งที่ระบบสามารถมีสถานะของประจุได้ 4 สถานะ กล่าวคือ (0,1,0), (1,0,0), (1,1,0), และ (1,0,1), ซึ่งสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 กรณี กล่าวคือ กรณีที่เกิดการส่งผ่านอิเล็กตรอน 1 ตัวระหว่างควอนตัมดอท ดังแสดงด้วยลูกศรทึบ อิเล็กตรอนสามารถเคลื่อนที่จากควอนตัมดอทลำดับที่ 1 (หรือ 2) ไปยังควอนตัมดอทลำดับที่ 2 (หรือ 1) แทนด้วยสัญลักษณ์ (1,0,0) ↔ (0,1,0) ส่วนกรณีที่ 2 คือ เกิดการส่งผ่านอิเล็กตรอน 2 ตัว ดังแสดงด้วยตัวอย่างลูกศรเส้นประ พบว่า เมื่อเพิ่มอิเล็กตรอน 1 ตัวเข้าไปยังควอนตัมดอทลำดับที่ 1 (หรือ 3) อิเล็กตรอนที่อยู่ในควอนตัมดอทลำดับที่ 2 จะถูกผลักไปยังควอนตัมดอทลำดับที่ 3 (หรือ 1) ในทางตรงกันข้าม อิเล็กตรอนที่อยู่ในควอนตัมดอทลำดับที่ 3 (หรือ 1) ถูกส่งผ่านไปยังควอนตัมดอทลำดับที่ 2 และได้ผลักอิเล็กตรอนที่อยู่ในควอนตัมดอทลำดับที่ 1 (หรือ 3) ไปที่ขั้วเดรน (หรือซอร์ส) โดยเหตุการณ์ทั้งสองแทนด้วยสัญลักษณ์ (0,1,0) ↔ (1,0,1) ซึ่งกระบวนการดังกล่าวนี้ ถูกเรียกว่าควอนตัมเซลลูลาร์ออโตมาตา (quantum cellular automata processes) โดยกระบวนการดังกล่าวถูกศึกษาในระบบ 3 ควอนตัมดอท ที่สร้างจากสารกึ่งตัวนำ [23, 24]

สรุปผลการวิจัย

ระบบที่ประกอบด้วยรอยต่อการทะลุผ่านและควอนตัมดอทต่ออนุกรมกัน คูลอมบ์แอคชันของระบบสามารถคำนวณได้โดยการเขียนพาร์ทิชันฟังก์ชันของระบบให้อยู่ในรูปฟังก์ชันนัลอินทิกรัลฟอร์มูเลชัน และคำนวณปริพันธ์ตามเส้นทางเฉพาะพจน์ที่ขึ้นอยู่กับพลังงานการเพิ่มประจุของระบบ เพื่อตรวจสอบค่าคูลอมบ์แอคชันที่คำนวณได้ ในงานวิจัยนี้ได้นำค่าดังกล่าวไปใช้ในการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยของระบบควอนตัมดอท โดยพิจารณาโครงสร้างที่รอยต่อการทะลุผ่านมีค่าความนำไฟฟ้าน้อย กล่าวคือ ควอนตัมดอทถูกแยกจากกันอย่างชัดเจน เมื่อพิจารณากรณีดังกล่าวที่อุณหภูมิต่ำ ส่งผลให้พลังงานการเพิ่มประจุมีค่ามากกว่าพลังงานจลน์เฉลี่ยของอิเล็กตรอนในระบบ ดังนั้น พาร์ทิชันฟังก์ชันของระบบสามารถประมาณได้จากพจน์ที่ขึ้นอยู่กับพลังงานการเพิ่มประจุเท่านั้น ซึ่งสามารถคำนวณคำตอบได้ในแบบแม่นตรง ผลจากการคำนวณพบว่า พาร์ทิชันฟังก์ชันขึ้นอยู่กับคูลอมบ์แอคชันของระบบเท่านั้น ซึ่งในกรณีนี้ จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยของระบบสามารถคำนวณได้ในแบบแม่นตรง ในงานวิจัยนี้ได้แสดงการประยุกต์ใช้ผลการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยของระบบ เพื่อสร้างแผนภาพเสถียรของระบบที่ประกอบด้วย 2 ควอนตัมดอท ซึ่งเมื่อนำผลที่ได้ไปเปรียบเทียบกับการคำนวณโดยตรงจากพลังงานการเพิ่มประจุ พบว่าผลการคำนวณทั้งสองวิธีสอดคล้องกัน แต่วิธีการที่นำเสนอในงานวิจัยนี้สามารถแสดงผลของอุณหภูมิต่อการเปลี่ยนแปลงแผนภาพเสถียรได้ นอกจากนี้ เมื่อนำวิธีการดังกล่าวไปสร้างแผนภาพเสถียรของระบบ 3

ควอนตัมดอท พบว่าแผนภาพเสถียรที่สร้างขึ้นสามารถแสดงจุดควอดรูเปิลและกระบวนการควอนตัมเซลลูลาร์ออโตมาตาได้เช่นเดียวกับผลการทดลองของระบบ 3 ควอนตัมดอท จากที่กล่าวมาข้างต้นแสดงให้เห็นว่า คูลอมบ์แอคชันที่คำนวณได้ สามารถนำไปอธิบายและทำนายพฤติกรรมของระบบที่ประกอบด้วยรอยต่อของการทะลุผ่านและควอนตัมดอทได้เป็นอย่างดี

กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนจากเงินทุนอุดหนุนการวิจัยงบประมาณเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ 2557 มหาวิทยาลัยมหาสารคาม

เอกสารอ้างอิง

1. Garbert, H., and Devoret, M. H. 1992. Introduction to Single Charge Tunneling: Single Charge Tunneling Coulomb Blockade Phenomena in Nanostructures. 1st Edition. New York. Plenum Press. p. 1-12.
2. Kakade, S. 2012. Supersensitive Electrometer and Electrostatic Data Storage Using Single Electron Transistor. *International Journal of Electronics and Communication Engineering* 5: 591-596.
3. Ruggiero, B., Delsing, P., Granata, C., Pashkin, Y., ang Silvestrini, P. Conditional Gate Operation in Superconducting Charge Qubits: Quantum Computation in Solid State Systems. 1st Edition. New York. Springer. p. 10-18.
4. Alexander, H. Lp., Susanna, M. T., Hoogland, S., Voznyy, O., Zhitomirsky, D., Debnath, R., Levina, L., Rollny, R. L., Carey, H. G., Fischer, A., Kemp, W. K., Kramer, J. I., Ning, Z., Labelle, J. A., Chou, W. K., Amassian, A., and Sargent, H. E. 2012. Hybrid Passivated Colloidal Quantum Dot Solids. *Nature Nanotechnology.* 7: 557-582.
5. Waser, R. 2012. Circuit and System Design: Nanoelectronics and Information Technology. 3rd Edition. New York. Wiley-VCH. p. 167-188.
6. Wallisser, C., Limbach, B., Stein, P. V., Schäfer, R. Theis, C., Göppert, G., and Grabert, H. 2002. Conductance of The Single-electron Transistor a Comparison of Experimental Data With Monte Carlo Calculations. *Physical Review B.* 66(125314): 1-8.
7. Limbach, B., Stein, P. V., Wallisser, C., and Schäfer, R., 2005. Coulomb Blockade in Two-island Systems With Highly Conductive Junctions. *Physical Review B.* 72(045316): 1-8.
8. Fulton, T. A., and Dolan, G. J. 1987. Observation of Single-electron Charging Effects in Small Tunnel Junctions. *Physical Review Letters.* 59: 109-112.

9. Lafarge, P., Pothier, H., Williams, E. R., Esteve, D., Urbina, C., and Devoret, M. H. 1991. Direct Observation of Macroscopic Charge Quantization. *Zeitschrift fur Physik B.* 85: 327-332.
10. Göppert, G., Grabert, H., and Beck, C. 1999. Coulomb Charging Effects for Finite Channel Number. *Europhysics Letters.* 45(2): 154-157.
11. Wang, X. 1996. Properties of Single-electron Box at Arbitrary Temperature. *Physical Review B.* 55(70): 4073-4076.
12. Göppert, G., and Grabert, H. 1998. High-temperature Conductance of the Single-electron Transistor. *Physical Review B.* 58(16): 10155-10158.
13. Negele, J. W., and Orland, H. 1998. Second Quantization and Coherent States, General Formalism at Finite Temperature: Quantum Many-particle Systems. 1st Edition. Westview Press. p. 1-124.
14. Landau, D. P., and Binder, K. 2000. Simple Sampling Monte Carlo Methods: A Guide to Monte Carlo Simulation in Statistical Physics. 1st Edition. Cambridge University Press. p. 48-65.
15. Newman, M. E. J., and Barkema, G. T. 1999. Analysing Monte Carlo Data: Monte Carlo Methods in Statistical Physics. 1st Edition. Oxford University Press. p. 210-256.
16. Janke, W. 2002. Monte Carlo Methods. In: Grotendorst, J., Marx, D., and Muramatsu, A., Editors. Quantum Simulations of Complex Many-body Systems from Theory to Algorithms. NIC Series. p. 1-24.
17. Srivilai, P. 2012. Quantum Monte Carlo Study of the Metallic Single Electron Pump. Doctoral dissertation. Freiburg. Albert Ludwigs University Freiburg. p. 92-114.
18. Theis, C. 2004. Conductance of Single Electron Devices from Imaginary-Time Path Integrals. Doctoral dissertation, Freiburg. Albert Ludwigs University Freiburg. p. 90-99.
19. Suksoi, B. 2013. Charging Energy of a Finite 1D Array of Small Tunnel Junctions. Undergraduate dissertation. Mahasarakham. Mahasarakham University. p. 30-35.
20. Intanin, A. 2015. Coulomb Action of a Finite One Dimensional Araay of Tunneling Junctions. graduate dissertation (preprint). Mahasarakham. Mahasarakham University. p.80-85.
21. Van der Wiel, W. G., De Franceschi, S., Elzerman, J. M., Fujisawa, T., Tarucha, S., and Kouwenhoven, L. P. 2002. Electron Transport Through Double Quantum Dots. *Reviews of Modern Physics.* 75(1): 1-22.
22. Rungsri, P., Boonruesi, W., and Sampanapai, S. 2014. Quantum Monte Carlo Study of the Metallic Single Electron Pump. Undergraduate dissertation. Mahasarakham. Mahasarakham University. p. 25-39.

23. Schröer, D., Greentree, A. D., Gaudreau, L., Eberl, K., Hollenberg, L. C. L., Kotthaus, J. P., and Ludwig, S. 2007. Electrostatical Defined Serial Triple Quantum Dot Charged With Few Electrons. *Physical Review B.* 76(075306): 1-11.
24. Yamahata, G., Tsuchiya, Y., Mizuta, H., Uchida, K., and Oda, S. 2009. Electron Transport Through Silicon Serial Triple Quantum Dots. *Solid-State Electronics.* 59: 779-785.

ได้รับบทความวันที่ 4 ธันวาคม 2557
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 22 มกราคม 2558