บทความวิจัย

ความสัมพันธ์ของจุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสและจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

ภิญโญ มนูศิลป์[1*]

บทคัดย่อ

บทความฉบับนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหาตำแหน่งของจุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส หาตำแหน่งของจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส และ หาความสัมพันธ์ระหว่างจุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสและจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสโดยใช้วิธีการของแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ซึ่งผลการศึกษาพบว่า จุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสอยู่บนแกนโดยมีระยะห่างจากจุดกึ่งกลางฐานเท่ากับ $\frac{2}{5}$ ของความยาวแกน จุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสอยู่บนแกนของเซกเมนต์พาราโบลาโดยมีระยะห่างจากจุดกึ่งกลางฐานเท่ากับ $\frac{2}{3}$ ของความยาวแกนและระยะห่างจากจุดกึ่งกลางฐานถึงจุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดิสเท่ากับะ $\frac{3}{5}$ ของระยะห่างจากจุดกึ่งกลางฐานถึงจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดิส

คำสำคัญ: เซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส จุดเซนทรอยด์

---

[1]ภาควิชาวิทยาศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย

[*]ผู้นิพนธ์ประสานงาน, e-mail : manoosilp@yahoo.co.th

The Relationship Between the Centroid of Archimedes' Parabolic Segment and the Centroid of Archimedes' Triangle

Pinyo Manoosilp[1*]

ABSTRACT

The purposes of this article were to study the centroid of Archimedes' parabolic segment, the centroid of Archimedes' triangle and the relationship of the centroid of Archimede' parabolic segment and Archimedes' triangle by using calculus and analytic geometry method. The results are : the centroid of Archimedes' parabolic segment is on an axis of parabolic segment and distance from the midpoint of base to centroid is $\frac{2}{5}$ times as the length of an axis, the centroid of Archimedes' triangle is on an axis of parabolic segment and distance from the midpoint of base to centroid is $\frac{2}{3}$ times as the length of an axis and distance from the midpoint of base to centroid of Archimedes' parabolic segment is $\frac{3}{5}$ times as distance from the midpoint of base to centroid of Archimedes' triangle.

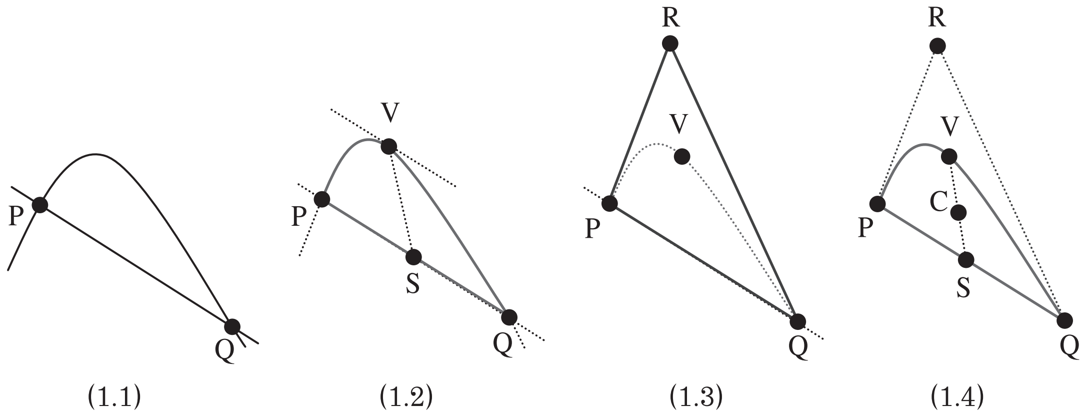
Keywords: Archimedes' parabolic segment, Archimedes' triangle, Centroid

[1]Department of Science, Faculty of Science and Technology, Loei Rajabhat University

[*]Corresponding author, e-mail : manoosilp@yahoo.co.th

บทนำ

อาร์คิมีดีส (Archimedes) นักคณิตศาสตร์ชาวกรีก (287-212 ปี ก่อนคริสต์ศักราช) ได้ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส ซึ่งหมายถึง อาณาบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยโค้งพาราโบลาและคอร์ดที่ลากเชื่อมจุดสองจุดซึ่งอยู่บนโค้งพาราโบลานั้น [2] โดยที่ รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีฐานเป็นคอร์ดของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสและมีด้านสองด้านเป็นเส้นตรงที่สัมผัสโค้งพาราโบลาที่จุดปลายทั้งสองของคอร์ด [6]



รูปที่ 1 เซกเมนต์พาราโบลาและรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

โค้งพาราโบลาตัดกับคอร์ด PQ ที่ จุด P และ จุด Q (รูปที่ 1.1) จุด V เป็นจุดสัมผัสซึ่งเกิดจากเส้นตรงที่สัมผัสกับโค้งพาราโบลาและขนานกับคอร์ด PQ จะได้ เซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส PVQ (รูปที่ 1.2) โดยเรียก คอร์ด PQ ว่า ฐาน (base) เรียก จุด V ว่า จุดยอด (vertex) เรียก เส้นตรง VS ซึ่งลากจากยอดมาแบ่งครึ่งฐานที่จุด S ว่า แกน (axis) เรียก รูปสามเหลี่ยม PQR ว่า รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส (รูปที่ 1.3) โดยมีฐาน PQ ร่วมกับเซกเมนต์พาราโบลาและมีด้านทั้งสอง คือ ด้าน PR และด้าน QR ซึ่งเป็นเส้นสัมผัสโค้งพาราโบลาที่ จุด P และ จุด Q ลากมาพบกันที่จุด R โดยมี จุด C เป็นจุดเซนทรอยด์ ซึ่งหมายถึง จุดศูนย์กลางทางเรขาคณิตของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส PQR (รูปที่ 1.4)

อาร์คิมีดีสใช้ระเบียบวิธีเกษียณ (method of exhaustion) ศึกษาพบว่า จุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลาโดยค้นพบว่าจุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสอยู่บนแกนโดยมีระยะห่างจากจุดกึ่งกลางฐานเท่ากับ $\frac{2}{5}$ ของความยาวแกน [3] และ [4]

เนื่องจากเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสและรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสมีความสัมพันธ์กันในเชิงโครงสร้างและจุดเซนทรอยด์มีบทบาทสำคัญในทางฟิสิกส์ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการหาตำแหน่งความเร็ว หรือ ความเร่งของวัตถุ การศึกษาครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อมุ่งอธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่างจุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสและจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสโดยใช้วิธีการของแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ (calculus and analytic geometry) ในการศึกษาค้นคว้า

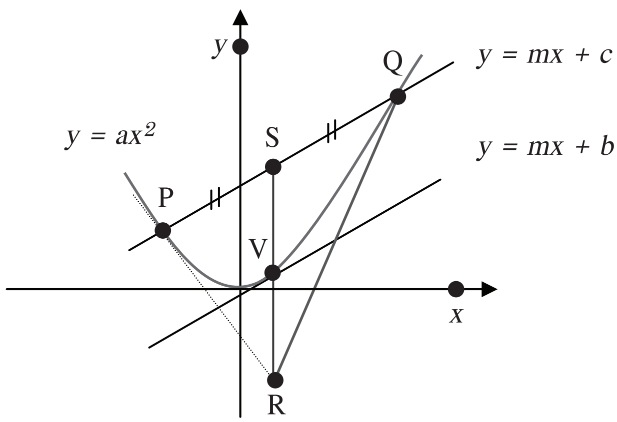
ทฤษฎีบทของอาร์คิมีดีส

บทนิยาม 1 เซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส (Archimedes' Parabolic Segment) หมายถึง อาณาบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยโค้งพาราโบลาและคอร์ดที่ลากเชื่อมจุดสองจุดซึ่งอยู่บนโค้งพาราโบลานั้น

ทฤษฎีบทของอาร์คิมีดีส (The Archimedes' Proposition) สำหรับเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสใดๆ ถ้าลากเส้นตรงจากจุดกึ่งกลางฐานผ่านจุดยอดไปตัดกับเส้นสัมผัสโค้งพาราโบลาซึ่งมีจุดปลายของฐานเป็นจุดสัมผัสแล้วระยะจากจุดกึ่งกลางฐานถึงจุดยอดจะเท่ากับระยะจากจุดยอดถึงจุดตัด

วิธีพิสูจน์ประพจน์ของอาร์คิมีดีสซึ่งประยุกต์จากแนวคิดของ สเวน (Swain) โดยใช้วิธีการของแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ [5] สามารถทำได้ ดังนี้

เซกเมนต์พาราโบลา PVQ เกิดจาก เส้นตรง $y = mx + c$ ตัดกับ โค้งพาราโบลา $y = ax^2$ ที่จุด P และ จุด Q โดยมี เส้นตรง $y = mx + b$ ขนานกับ ฐาน PQ และสัมผัสโค้งพาราโบลาที่ จุดยอด V ให้ S เป็นจุดกึ่งกลางของ ฐาน PQ และ เส้นตรง SV เป็นแกนของเซกเมนต์พาราโบลา PVQ ลากต่อเส้นตรง SV ไปทางจุด V พบเส้นสัมผัสโค้งพาราโบลาซึ่งลากมาจาก จุดสัมผัส Q ที่จุด R (รูปที่ 2)



รูปที่ 2 แสดงการพิสูจน์ประพจน์ของอาร์คิมีดีส

ต้องการพิสูจน์ว่า VS = VR

การพิสูจน์

เนื่องจาก จุด P และ จุด Q เป็นจุดตัดของ พาราโบลา $y = ax^2$ และ เส้นตรง $y = mx + c$

จะได้ พิกัดของ จุด Q คือ $\left(\dfrac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}, \dfrac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

พิกัดของ จุด P คือ $\left(\dfrac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}, \dfrac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

เพราะว่า จุด S เป็นจุดกึ่งกลางของ ฐาน PQ

ดังนั้น พิกัดของ จุด S คือ $\left(\dfrac{m}{2a}, \dfrac{m^2}{2a} + c\right)$

เพราะว่า จุด S และ จุด V อยู่บนเส้นตรง $x = \dfrac{m}{2a}$

และ เนื่องจาก จุด V เป็นจุดที่ เส้นตรง $y = mx + b$ สัมผัสกับพาราโบลา $y = ax^2$

จะได้ พิกัดของ จุด V คือ $(\frac{m}{2a}, \frac{m^2}{4a})$ ....(1)

เพราะว่า เส้นตรง QR เป็นเส้นสัมผัสกับ พาราโบลา $y = ax^2$ ที่ จุด Q

จะได้ว่า ความชันของ เส้นสัมผัส QR คือ $y' = 2ax$

$$= 2a\left(\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}\right)$$

$$= m+\sqrt{m^2+4ac}$$

ดังนั้น สมการของ เส้นสัมผัส QR คือ

$$y - \left(\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right) = \left(m+\sqrt{m^2+4ac}\right)\left(x - \frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}\right)$$

$$y = \left(m+\sqrt{m^2+4ac}\right)x - \left(\frac{m\sqrt{m^2+4ac}+m^2+2ac}{2a}\right)$$

เนื่องจาก สมการของ เส้นตรง SR คือ $x = \frac{m}{2a}$ ดังนั้น ค่า y ของ จุด R คือ

$$y = \left(m+\sqrt{m^2+4ac}\right)\left(\frac{m}{2a}\right) - \left(\frac{m\sqrt{m^2+4ac}+m^2+2ac}{2a}\right)$$

$$y = -c$$

จะได้ว่า พิกัดของ จุด R คือ $(\frac{m}{2a}, -c)$

สมมุติให้ จุด V′ เป็นจุดกึ่งกลางของ เส้นตรง SR

เนื่องจาก จุดปลายของ เส้นตรง SR อยู่ที่ จุด S $(\frac{m}{2a}, \frac{m^2}{2a} + c)$ และ จุด R $(\frac{m}{2a}, -c)$

จะได้ พิกัดของ จุด V′ คือ $\left(\frac{\frac{m}{2a}+\frac{m}{2a}}{2}, \frac{\frac{m^2}{2a}+c+(-c)}{2}\right)$

ดังนั้น จุดกึ่งกลางของ เส้นตรง SR อยู่ที่ จุด V′ $(\frac{m}{2a}, \frac{m^2}{4a})$ ....(2)

จะเห็นว่า (1) = (2) แสดงว่า จุด V และ จุด V′ คือ จุดเดียวกัน ดังนั้น จุด V คือ จุดกึ่งกลางของเส้นตรง SR นั่นคือ VS = VR

(กรณี เส้นตรง PR สัมผัสโค้งพาราโบลาที่ จุด P ก็พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน)

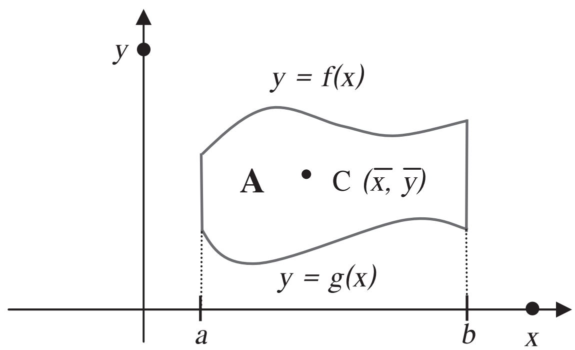
จุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส

แบรดลี และ สมิธ (Bradley and Smith) ได้กำหนดบทนิยามของจุดเซนทรอยด์ [1] ไว้ ดังนี้

บทนิยาม 2 จุดเซนทรอยด์ (Centroid or Center of Gravity) หมายถึง จุดศูนย์กลางทางเรขาคณิตของวัตถุ

เนื่องจาก จุดเซนทรอยด์ คือ จุดศูนย์กลางของวัตถุใดๆ ซึ่งอาจอยู่ภายในหรือภายนอกวัตถุก็ได้ พิกัดของจุดเซนทรอยด์ของพื้นที่รูปเรขาคณิตสามารถหาได้โดยใช้วิธีการของแคลคูลัสได้ ดังนี้

ให้ A เป็นพื้นที่บนระนาบ XY ซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ บนช่วง [a, b] โดยมี C $(\bar{x}, \bar{y})$ เป็น จุดเซนทรอยด์ของพื้นที่ A (รูปที่ 3)



รูปที่ 3 จุดเซนทรอยด์ของพื้นที่ A

จากรูปที่ 3 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องโดยที่ $f(x) \geq g(x)$ บนช่วง [a, b] เมื่อ A เป็นพื้นที่ซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ บนช่วง [a, b]

พื้นที่ $A = \int_a^b \{[f(x)] - [g(x)]\}dx$

โมเมนต์ของพื้นที่ A รอบแกน y แทนด้วย $M_x = \int_a^b x\{[f(x)] - [g(x)]\}dx$

โมเมนต์ของพื้นที่ A รอบแกน x แทนด้วย $M_y = (\frac{1}{2})\int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx$

จุดเซนทรอยด์ของพื้นที่ A แทนด้วย C $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{M_x}{A}, \frac{M_y}{A})$

ตำแหน่งของจุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลา

ให้ PVQ เป็นเซกเมนต์พาราโบลาที่เกิดจาก เส้นตรง $y = mx + c$ ตัด พาราโบลา $y = ax^2$ ที่ จุด P และ จุด Q โดยมี เส้นตรง PQ เป็นฐาน จุด S เป็นจุดกึ่งกลางฐาน จุด V เป็นจุดยอด และ จุด C เป็นจุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลา PVQ

ต้องการหา ตำแหน่งของจุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลา PVQ

ให้ C ($\bar{x}$, $\bar{y}$) เป็น จุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลา PVQ

จากการพิสูจน์ ทฤษฎีบทของอาร์คิมีดีส จะพบว่า

พิกัดของ จุด Q คือ $\left(\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}, \frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

พิกัดของ จุด P คือ $\left(\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}, \frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

พิกัดของ จุด V คือ $\left(\frac{m}{2a}, \frac{m^2}{4a}\right)$

ให้ A แทน พื้นที่เซกเมนต์พาราโบลา PVQ

เนื่องจาก พาราโบลา $y = ax^2$ และ เส้นตรง $y = mx + c$ ตัดกันที่ จุด P และ จุด Q

ดังนั้น A

$$= \int_{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}^{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}} [(mx+c)-ax^2]dx$$

$$= \left[c(x) + m\left(\frac{x^2}{2}\right) - a\left(\frac{x^3}{3}\right) \right]\Bigg|_{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}^{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}$$

$$= c(x)\Bigg|_{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}^{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}} + m\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}^{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}} - a\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}^{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}$$

$$= \frac{c\sqrt{m^2+4ac}}{a} + \frac{m^2\sqrt{m^2+4ac}}{2a^2} - \left(\frac{m^2\sqrt{m^2+4ac}+ac\sqrt{m^2+4ac}}{3a^2}\right)$$

$$= \frac{6ac\sqrt{m^2+4ac}+3m^2\sqrt{m^2+4ac}-2m^2\sqrt{m^2+4ac}-2ac\sqrt{m^2+4ac}}{6a^2}$$

$$= \frac{(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{6a^2} \qquad \text{..............................(3)}$$

ให้ M_x แทน โมเมนต์ของพื้นที่ A รอบแกน x

$$M_x = \int_{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}^{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}} x[(mx+c)-ax^2]dx$$

$$= [m(\frac{x^3}{3}) + c(\frac{x^2}{2}) - a(\frac{x^4}{4})]\Bigg|_{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}^{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}$$

$$= m(\frac{x^3}{3})\Bigg|_{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}^{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}} + c(\frac{x^2}{2})\Bigg|_{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}^{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}} - a(\frac{x^4}{4})\Bigg|_{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}^{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}$$

$$= m(\frac{m^2\sqrt{m^2+4ac}+ac\sqrt{m^2+4ac}}{3a^3}) + c(\frac{m\sqrt{m^2+4ac}}{2a^2})$$
$$- a(\frac{m^3\sqrt{m^2+4ac}+2mac\sqrt{m^2+4ac}}{4a^4})$$

$$= \frac{4m^3\sqrt{m^2+4ac}+4mac\sqrt{m^2+4ac}+6mac\sqrt{m^2+4ac}-3m^3\sqrt{m^2+4ac}-6mac\sqrt{m^2+4ac}}{12a^3}$$

$$= \frac{m(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{12a^3} \qquad \text{..............................(4)}$$

ให้ M_y แทน โมเมนต์ของพื้นที่ A รอบแกน y

$$M_y = (\frac{1}{2}) \int_{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}^{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}} [(mx+c)^2-(ax^2)^2]dx$$

$$= (\frac{1}{2})[m^2(\frac{x^3}{3}) + mc(x^2) + c^2(x) - a^2(\frac{x^5}{5})]\Bigg|_{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}^{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}$$

$$= \left[\frac{m^2}{6}(x^3)+\frac{mc}{2}(x^2)+\frac{c^2}{2}(x)-\frac{a^2}{10}(x^5)\right]\Bigg|_{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}^{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}$$

$$= (\frac{m^2}{6})(\frac{m^2\sqrt{m^2+4ac}+ac\sqrt{m^2+4ac}}{a^3}) + (\frac{mc}{2})(\frac{m\sqrt{m^2+4ac}}{a^2}) + (\frac{c^2}{2})(\frac{\sqrt{m^2+4ac}}{a})$$

$$- (\frac{a^2}{10})(\frac{m^4\sqrt{m^2+4ac}+3m^2ac\sqrt{m^2+4ac}+a^2c^2\sqrt{m^3+4ac}}{a^5})$$

$$= \frac{m^4\sqrt{m^2+4ac}+m^2ac\sqrt{m^2+4ac}}{6a^3} + \frac{m^2c\sqrt{m^2+4ac}}{2a^2} + \frac{c^2\sqrt{m^2+4ac}}{2a}$$

$$- (\frac{m^4\sqrt{m^2+4ac}+3m^2ac\sqrt{m^2+4ac}+a^2c^2\sqrt{m^2+4ac}}{10a^3})$$

$$= \frac{2m^4\sqrt{m^2+4ac}+11m^2ac\sqrt{m^2+4ac}+12a^2c^2\sqrt{m^2+4ac}}{30a^3}$$

$$= \frac{(2m^4+11m^2ac+12a^2c^2)\sqrt{m^2+4ac}}{30a^3} \qquad \text{..............................(5)}$$

จาก (3) และ (4) จะได้ว่า $\bar{x} = \frac{M_x}{\text{A}}$

$$= \frac{\frac{m(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{12a^3}}{\frac{(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{6a^2}}$$

$$= \frac{m}{2a}$$

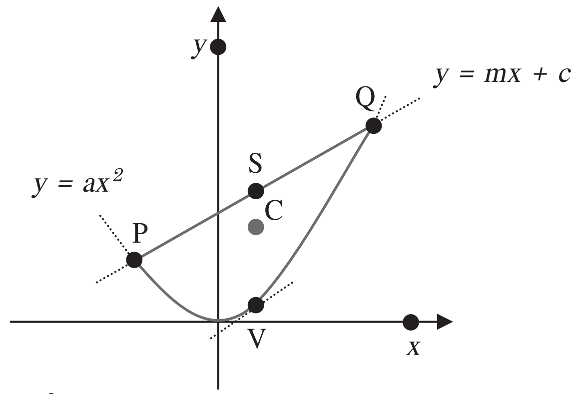
จาก (3) และ (5) จะได้ว่า $\bar{y} = \frac{M_y}{\text{A}}$

$$= \frac{\frac{(2m^4+11m^2ac+12a^2c^2)\sqrt{m^2+4ac}}{30a^3}}{\frac{(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{6a^2}}$$

$$= \frac{2m^4+11m^2ac+12a^2c^2}{5a(m^2+4ac)}$$

นั่นคือ จุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลา PVQ อยู่ที่จุด C $(\frac{m}{2a}, \frac{2m^4+11m^2ac+12a^2c^2}{5a(m^2+4ac)})$

ตำแหน่งของจุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส PQR แสดงได้ ดังรูปที่ 4

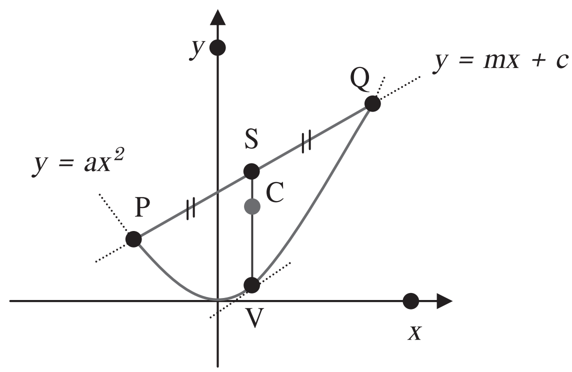


รูปที่ 4 ตำแหน่งจุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลา

จุดเซนทรอยด์บนแกนของเซกเมนต์พาราโบลา

เนื่องจากตำแหน่งของจุดกึ่งกลางฐาน จุดเซนทรอยด์ และ จุดยอดของเซกเมนต์พาราโบลา PVQ อยู่ที่จุด S $(\frac{m}{2a}, \frac{m^2}{2a}+c)$ จุด C $(\frac{m}{2a}, \frac{2m^4+11m^2ac+12a^2c^2}{5a(m^2+4ac)})$ และ V $(\frac{m}{2a}, \frac{m^2}{4a})$ ตามลำดับ

พิจารณาพิกัดของ จุด S จุด C และ จุด V จะเห็นว่าทุกจุดอยู่บนเส้นตรง มีค่า $x = \frac{m}{2a}$ นั่นแสดงว่า จุดเซนทรอยด์ C อยู่บนแกนของเซกเมนต์พาราโบลา PVQ ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 ตำแหน่งของจุดเซนทรอยด์บนแกนของเซกเมนต์พาราโบลา

สามารถหา ความยาวของ CS และ ความยาวของแกน VS ได้ ดังนี้

$$CS = \sqrt{[\frac{m}{2a}-\frac{m}{2a}]^2+[(\frac{m^2}{2a}+c)-\frac{(2m^4+11m^2ac+12a^2c^2)}{(5a)(m^2+4ac)}]^2}$$

$$= \sqrt{[\frac{(5m^2)(m^2+4ac)+(10ac)(m^2+4ac)-(2)(2m^4+11m^2ac+12a^2c^2)}{(10a)(m^2+4ac)}]^2}$$

$$= \frac{(m^2+4ac)(m^2+4ac)}{(10a)(m^2+4ac)}$$

$$= \frac{m^2+4ac}{10a} \text{ หน่วย} \qquad \text{..............................(6)}$$

$$VS = \sqrt{[\frac{m}{2a}-\frac{m}{2a}]^2-[(\frac{m^2}{2a}+c)-(\frac{m^2}{4a})]^2}$$

$$= \sqrt{[\frac{2m^2+4ac-m^2}{4a}]^2}$$

$$= \sqrt{[\frac{m^2+4ac}{4a}]^2}$$

$$= \frac{m^2+4ac}{4a} \text{ หน่วย} \qquad \text{..............................(7)}$$

จาก (6) และ (7) จะได้ว่า อัตราส่วน $CS : SV = \frac{m^2+4ac}{10a} : \frac{m^2+4ac}{4a}$

$$SC = (\frac{2}{5})\,VS$$

นั่นคือ จุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสอยู่บนแกนโดยมีระยะห่างจากจุดกึ่งกลาง ฐานเท่ากับ $\frac{2}{5}$ ของความยาวแกน

จุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

ตำแหน่งจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

เซกเมนต์พาราโบลา PVQ เกิดจาก เส้นตรง $y = mx + c$ ตัด พาราโบลา $y = ax^2$ ที่ จุด P และจุด Q โดยมี เส้นตรง PQ เป็นฐาน มี จุด S เป็นจุดกึ่งกลางฐาน และ จุด V เป็นจุดยอด ให้ จุด P จุด Q และจุด R เป็นจุดยอดทั้งสาม โดยมี จุด M เป็นจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาค์คิมีดีส PQR

ต้องการหา ตำแหน่งจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส PQR

ให้ M (x, y) เป็นจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิยดีส PQR

เนื่องจาก จุดยอดทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส PQR มีพิกัดอยู่ที่

จุด Q $\left(\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}\,,\ \frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

จุด P $\left(\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}\,,\ \frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

จุด R $\left(\frac{m}{2a}\,,\,-c\right)$

ดังนั้น ค่า x ที่ จุด M คือ $x = \dfrac{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}+\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}+\frac{m}{2a}}{3}$

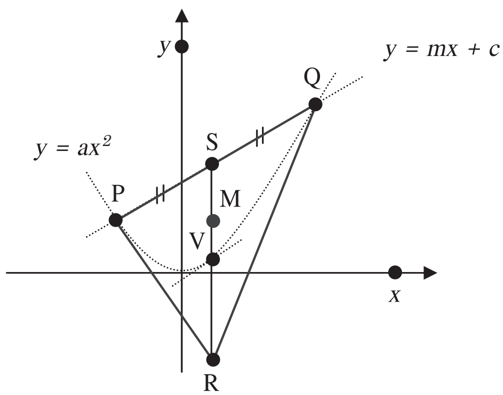
$$= \frac{m}{2a}$$

ค่า y ที่ จุด M คือ $y = \dfrac{\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}+\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}+(-c)}{3}$

$$= \frac{m^2+ac}{3a}$$

นั่นคือ จุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส PQR คือ จุด M $\left(\frac{m}{2a}, \frac{m^2+ac}{3a}\right)$

ตำแหน่งของจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส PQR แสดงได้ ดังรูปที่ 6



รูปที่ 6 ตำแหน่งจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

จุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสบนแกนของเซกเมนต์พาราโบลา

เนื่องจากจุดกึ่งกลางฐาน PQ จุดเซนทรอยด์ของสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส PQR และ จุดยอดของเซกเมนต์พาราโบลา PVQ อยู่ที่ จุด S $(\frac{m}{2a}, \frac{m^2}{2a} + c)$ จุด M $(\frac{m}{2a}, \frac{m^2+ac}{3a})$ และ จุด V $(\frac{m}{2a}, \frac{m^2}{4a})$ ตามลำดับ (รูปที่ 6)

พิจารณาพิกัดของ จุด S จุด M และ จุด V จะเห็นว่าทุกจุด มีค่า x = $\frac{m}{2a}$ เท่ากัน นั่นแสดงว่า จุดเซนทรอยด์ M อยู่บนแกนของเซกเมนต์พาราโบลา PVQ

สามารถหา ความยาวของ MS และ ความยาวของแกน VS ได้ ดังนี้

$$\mathrm{MS} = \sqrt{[\frac{m}{2a}-\frac{m}{2a}]^2 + [(\frac{m^2}{2a}+c)-(\frac{m^2+ac}{3a})]^2}$$

$$= \sqrt{[\frac{(3)(m^2)+(c)(6a)-(2)(m^2+ac)}{6a}]^2}$$

$$= \frac{m^2+4ac}{6a} \quad \text{หน่วย} \qquad \text{..............................(8)}$$

$$\mathrm{VS} = \frac{m^2+4ac}{4a} \quad \text{หน่วย} \qquad \text{..............................(9)}$$

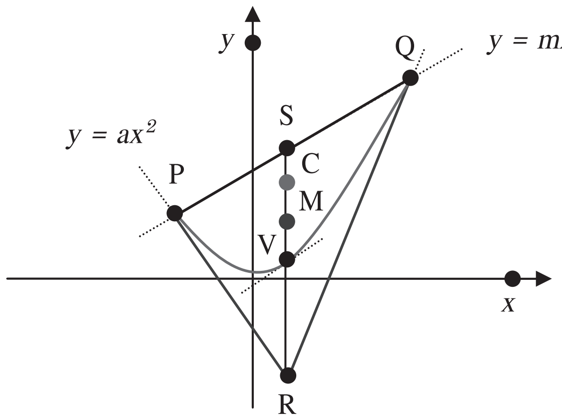
จาก (8) และ (9) จะได้ว่า อัตราส่วน $\mathrm{MS} : \mathrm{VS} = \frac{m^2+4ac}{6a} : \frac{m^2+4ac}{4a}$

$$\mathrm{MS} = (\frac{2}{3})\mathrm{VS}$$

นั่นคือ จุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสอยู่บนแกนของเซกเมนต์พาราโบลา โดยมีระยะห่างจากจุดกึ่งกลางฐานเท่ากับ $\frac{2}{3}$ ของความยาวแกน

ความสัมพันธ์ระหว่างจุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสและจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

ให้ เซกเมนต์พาราโบลา PVQ เกิดจาก เส้นตรง $y = mx + c$ ตัด พาราโบลา $y = ax^2$ ที่ จุด P และ จุด Q มีจุด V เป็นจุดยอด และ เส้นตรง PQ เป็นฐาน รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส PQR มี จุด R เป็นจุดยอด เส้นตรง PQ เป็นฐาน ให้ เส้นตรง RS เป็นเส้นมัธยฐานซึ่งลากจาก จุด R ผ่าน จุด V แบ่งครึ่งฐาน PQ ที่จุด S ให้ จุด C และ จุด M เป็น จุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลา PVQ และ รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส PQR ตามลำดับ (รูปที่ 7)



รูปที่ 7 จุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสและรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

เนื่องจาก จุด C และ จุด M อยู่บนแกน VS โดยมี CS เป็นความยาวจากจุดกึ่งกลางฐานถึงจุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส และ MS เป็นความยาวจากจุดกึ่งกลางฐานถึงจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ดังนั้นจึงสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่าง เส้นตรง CS และเส้นตรง MS ได้ดังนี้

จากการพิสูจน์ในหัวข้อที่ผ่านมา พบว่า ความยาวของเส้นตรง $\mathrm{CS} = \dfrac{m^2+4ac}{10a}$ หน่วย และความยาวของเส้นตรง $\mathrm{MS} = \dfrac{m^2+4ac}{6a}$ หน่วย

ดังนั้น อัตราส่วน $\mathrm{CS}:\mathrm{MS} = \dfrac{m^2+4ac}{10a} : \dfrac{m^2+4ac}{6a}$

$$\mathrm{CS} = \left(\frac{3}{5}\right)\mathrm{MS}$$

นั่นคือ ระยะห่างจากจุดกึ่งกลางฐานถึงจุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสเท่ากับ $\frac{3}{5}$ ของระยะห่างจากจุดกึ่งกลางฐานถึงจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

บทสรุป

ผลจากการศึกษาครั้งนี้พบว่า

1. จุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสอยู่บนแกนโดยมีระยะห่างจากจุดกึ่งกลางฐานเท่ากับ $\frac{2}{5}$ ของความยาวแกน

2. จุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสอยู่บนแกนของเซกเมนต์พาราโบลาโดยมีระยะห่างจากจุดกึ่งกลางฐานเท่ากับ $\frac{2}{3}$ ของความยาวแกน

3. ระยะห่างจากจุดกึ่งกลางฐานถึงจุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดิสเท่ากับ $\frac{3}{5}$ ของระยะห่างจากจุดกึ่งกลางฐานถึงจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดิส

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ยุพร ริมชลการ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม ที่ได้เสนอข้อคิดและคำแนะนำในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ และขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเลยที่ได้จัดสรรเงินทุนสนับสนุนการศึกษาวิจัยจนทุกอย่างบรรลุความสำเร็จด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

1. Bradley, G.L. and Smith, K.J. 1995. Calculus. New Jersey. Prentice Hall International, Inc. p. 441.
2. Erbas, K.A. 2000. An Explanatory Approach to Archimedes's Quadrature of the Parabola. Available from URL: http://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMAT6680.F99/Erbas/emat6690/essay1/essay1.html. 3 February 2014.
3. Heath, T.L. 1897. The Works of Archimedes. New York. Dover Publications, Inc. p. 215-216.
4. Stein. S. 1999. Archimedes What Did He do Besides Cry Eureka?. New York. Mathematical Association of America. p. 61-62.
5. Swain, G.A. 2013. Archimedes Curves. *The College Mathematics Journal,* 44(3), 185-189.
6. Woltermann, M. 2014. Archimedes' Squaring of Parabola. Available from URL: www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/56.pdf. 31 January 2014.

ได้รับบทความวันที่ 15 กันยายน 2557
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 27 ตุลาคม 2557