บทความวิจัย

การหาตัวแบบ EOQ ที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ โดยวิธีพีชคณิต

คณินทร์ ธีรภาพโอฬาร* และ เนริสา ทอนศรี

บทคัดย่อ

Tersine [2] ได้แนะนำระบบสินค้าคงคลังที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ โดยสมมุติให้ระดับสินค้าคงคลังเมื่อมีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับศูนย์และใช้วิธีแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์หาตัวแบบ EOQ ของระบบสินค้าคงคลังนี้ การศึกษาครั้งนี้เป็นการปรับปรุงระบบสินค้าคงคลังนี้ โดยสมมุติให้ระดับสินค้าคงคลังเมื่อมีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ q ($q \geq 0$) และได้ใช้วิธีพีชคณิตที่นำเสนอโดย Grubbström [3] หาตัวแบบ EOQ ที่ต้องการ สุดท้ายได้ยกตัวอย่างเพื่อแสดงการประยุกต์ใช้ตัวแบบ EOQ ที่ได้

คำสำคัญ: ตัวแบบ EOQ การลดราคาสินค้าแบบพิเศษ วิธีพีชคณิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

*ผู้นิพนธ์ประสานงาน, email: kanint@buu.ac.th

Determination of the EOQ Model with Special Sales Price by Algebraic Method

Kanint Teerapabolarn* **and Nerisa Thornsri**

ABSTRACT

Tersine [2] introduced the inventory system with special sales price by assuming the level of inventory, when a special order is placed, to be zero, and used the differential calculus method to obtain the EOQ model of this inventory system. This study is to improve this inventory system by assuming the level of inventory, when a special order is placed, to be, q $(q \geq 0)$ and uses the algebraic method proposed by Grubbström [3] to determine the desired EOQ model. Finally, some examples have been given to illustrate the EOQ model obtained.

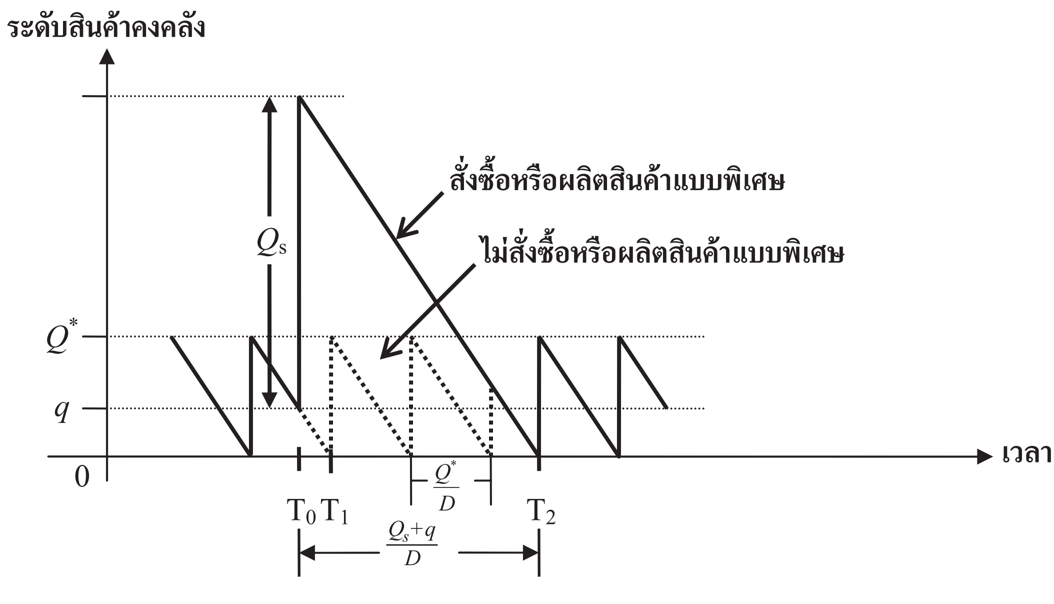
Keywords: EOQ model, special sales price, algebraic method

Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University

*Corresponding author, email: kanint@buu.ac.th

บทนำ

การศึกษาและการพัฒนาระบบสินค้าคงคลังทั้งในเชิงทฤษฎีและการประยุกต์เท่าที่ปรากฏเป็นหลักฐานการตีพิมพ์ที่รวบรวมได้ตั้งแต่อดีตจนกระทั่งถึงปัจจุบันมีระยะเวลานานครบ 100 ปีหรือครบหนึ่งศตวรรษพอดีในปีนี้ (ค.ศ. 1913 ถึง ค.ศ. 2013) หลักฐานการตีพิมพ์ชิ้นแรกที่ทราบกันโดยทั่วไปในปัจจุบัน คือ ผลงานการตีพิมพ์ของ Harris [1] ที่ได้นำเสนอระบบสินค้าคงคลังพื้นฐานที่นำไปสู่การสร้างตัวแบบแรกของระบบสินค้าคงคลัง หรือที่เรียกกันว่าตัวแบบ EOQ (Economic Order Quantity) ตัวแบบนี้เป็นตัวแบบพื้นฐานที่นำไปสู่การพัฒนาเป็นตัวแบบ EOQ อื่นๆ อีกมากมายที่สอดคล้องกับสมมุติฐานต่างๆ ของระบบสินค้าคงคลังนั้นๆ เช่น ตัวแบบ EOQ ที่มีการขาดแคลนสินค้า ตัวแบบ EOQ ที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่อง และตัวแบบ EOQ ที่มีการลดหรือเพิ่มราคาสินค้า เป็นต้น และสมมุติฐานที่มีการปรับเปลี่ยนกันมากของตัวแบบพื้นฐาน EOQ คือ สมมุติฐานที่ว่าราคาสินค้าที่สั่งซื้อหรือผลิตต้องมีค่าคงตัวเสมอ แต่ในความเป็นจริงกลับพบว่าในหลายๆ กรณี ราคาของสินค้าที่สั่งซื้อหรือผลิตอาจไม่ได้คงตัวเสมอไป แต่อาจมีการลดราคาสินค้าในบางช่วงเวลา ซึ่งทำให้ตัวแบบ EOQ ภายใต้สมมุติฐานเดิมๆ จึงถูกปรับเปลี่ยนเพื่อให้สอดคล้องกับสถานการณ์ในลักษณะเช่นนี้ และในกรณีนี้ Tersine [2] ได้เสนอ ตัวแบบ EOQ ที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ โดยสมมุติให้ระดับสินค้าคงคลังเมื่อมีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับศูนย์เท่านั้น แต่ถ้ามองในโลกของความเป็นจริง ระดับสินค้าคงคลังเมื่อมีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษนั้นอาจไม่จำเป็นต้องเท่ากับศูนย์ ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงสนใจปรับปรุงระบบสินค้าคงคลังตัวแบบที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษใน Tersine [2] โดยสมมุติให้ระดับสินค้าคงคลังเมื่อมีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ q ($q \geq 0$) ซึ่งสามารถแสดงระบบของสินค้าคงคลังนี้ได้ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 ระบบสินค้าคงคลังเมื่อมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ

จากรูปที่ 1 คือ Q_s ปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเมื่อมีการลดราคาสินค้าชั่วคราว Q^* คือ ปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าเหมาะที่สุดก่อนและหลังที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ D คือ อัตราความต้องการสินค้าต่อหน่วยเวลา q คือ ระดับสินค้าคงคลังเมื่อมีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษ T_0 คือ จุดเวลาสุดท้ายของช่วงเวลาที่มีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษ T_1 คือ จุดเวลาที่มีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบปรกติหลังจากที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ และ T_2 คือ จุดเวลาที่ระดับสินค้าคงคลังที่เกิดจากการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเท่ากับศูนย์ ในตัวแบบนี้มีข้อสมมุติเบื้องต้นเกี่ยวกับราคาของสินค้าและปริมาณที่สั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแตกต่างจากตัวแบบ EOQ พื้นฐาน กล่าวคือ ราคาของสินค้าจะไม่คงตัวหรือเท่ากันตลอดเวลา แต่จะมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ ณ ช่วงเวลาหนึ่งที่ได้กำหนดไว้ เช่น สมมุติว่าในขณะนี้ราคาของสินค้าเท่ากับ c บาทต่อหน่วย ต่อมาผู้จำหน่ายสินค้าได้ประกาศว่าจะมีการลดราคาสินค้าชั่วคราวในอีกหนึ่งหน่วยเวลาข้างหน้า โดยราคาสินค้าจะลดลง k บาทต่อหน่วย ทำให้ราคาชั่วคราวของสินค้าลดลงเป็น c-k บาทต่อหน่วย และเมื่อเลยช่วงเวลาที่ได้ประกาศลดราคาสินค้าไปแล้วผู้จำหน่ายสินค้าก็จะกลับมาจำหน่ายสินค้าในราคา c บาทต่อหน่วยเท่าเดิม จะเห็นได้ว่าราคาของสินค้าที่กล่าวมานั้นมีราคาคงตัวในช่วงระยะเวลาหนึ่ง และอาจมีราคาลดลงชั่วคราวอีกครั้งเมื่อถึงจุดเวลาที่ผู้จำหน่ายสินค้าได้กำหนด เนื่องจากราคาสินค้าที่มีการลดลงชั่วคราวนั้น อาจทำให้มีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าในปริมาณที่มากกว่าเดิม ดังนั้นปริมาณสินค้าที่สั่งซื้อหรือผลิตจึงไม่คงตัวเท่ากันตลอดทุกช่วงเวลาเหมือนในตัวแบบ EOQ พื้นฐาน และในการหาปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดเมื่อมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ (Q_s^*) Tersine [2] ได้หาตัวแบบดังกล่าวโดยใช้วิธีแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ (differential calculus) ภายใต้เงื่อนไขที่จำเป็นและพอเพียง (พิจารณาจากอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและอันดับที่สอง) เช่นเดียวกับการหาตัวแบบ EOQ อื่นๆ ที่กล่าวมาข้างต้น วิธีนี้เป็นวิธีที่เหมาะสำหรับผู้มีความรู้ทางด้านแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์เป็นอย่างดี แต่ไม่เหมาะสมสำหรับผู้ที่ขาดความรู้ทางด้านแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ และเพื่อหลีกเลี่ยงการใช้วิธีแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ Grubbström [3] ได้นำเสนอวิธีหาตัวแบบพื้นฐาน EOQ แบบใหม่ที่เข้าใจง่ายและเหมาะสมสำหรับผู้ที่ขาดความรู้ทางด้านแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ วิธีนี้เรียกว่า วิธีพีชคณิต (algebraic method) และภายหลังวิธีนี้ถูกนำไปใช้หาตัวแบบ EOQ อื่นๆ อีกหลายตัวแบบ ดังเช่น [4-8] จากที่ได้กล่าวมาทั้งหมดข้างต้น ดังนั้นการศึกษาครั้งนี้ราจะใช้วิธีพีชคณิตหาปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดของระบบสินค้าคงคลังที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ โดยสมมุติให้ระดับสินค้าคงคลังเมื่อมีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ q ($q \geq 0$)

วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

เพื่อหาปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดของระบบสินค้าคงคลังที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษโดยใช้วิธีพีชคณิต

สมมุติฐานของตัวแบบ (model assumption)

ในการศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีสินค้าคงคลัง โดยทั่วไปจะเริ่มต้นด้วยการกำหนดสมมุติฐานของตัวแบบ EOQ เพื่อปรับเปลี่ยนไปสู่สมมุติฐานของตัวแบบ EOQ ที่สอดคล้องกับระบบสินค้าคงคลังอื่นๆ มากขึ้น และในงานวิจัยนี้ ตัวแบบ EOQ ที่สนใจ คือ ตัวแบบ EOQ ที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ ซึ่งมีสมมุติฐานดังนี้

1. ความต้องการสินค้าต่อหน่วยเวลามีอัตราส่วนที่คงตัว และทราบค่าแน่นอน
2. ระยะเวลาระหว่างการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าจนได้รับสินค้า หรือช่วงเวลานำมีค่าเท่ากับศูนย์
3. การได้รับสินค้าที่สั่งซื้อหรือผลิต จะได้รับทีเดียวทั้งหมดทันทีที่สั่งซื้อหรือผลิตสินค้า
4. จะทำการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าเมื่อระดับสินค้าคงคลังลดลงมาเท่ากับจุดสั่งซื้อ
5. ราคาสินค้าต่อหน่วยไม่คงตัวตลอดเวลา
6. ระบบสินค้าคงคลังจะดำเนินไปเรื่อยๆ อย่างต่อเนื่องไม่สิ้นสุด
7. ไม่ยอมให้มีการขาดแคลนสินค้า

สัญกรณ์ของตัวแบบ (model notation)

สัญกรณ์ที่ใช้ในการศึกษาตัวแบบ EOQ ที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ มีดังนี้

D แทนอัตราความต้องการสินค้าต่อหน่วยเวลา

A แทนค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อหรือค่าใช้จ่ายในการเตรียมการผลิตสินค้า

c แทนราคาสินค้าที่สั่งซื้อหรือผลิตต่อหน่วยเวลา

i แทนค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าที่แปรไปตามราคาสินค้า

k แทนผลต่างของราคาสินค้าปรกติและราคาสินค้าใหม่

Q^* แทนปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าเหมาะที่สุดก่อนและหลังช่วงเวลาที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ

Q_s แทนปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเมื่อมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ

Q_s^* แทนปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดเมื่อมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ

q แทนระดับสินค้าคงคลังเมื่อมีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษ

C_s แทนค่าใช้จ่ายรวมเมื่อมีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษ

C_n แทนค่าใช้จ่ายรวมเมื่อไม่มีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษ

G^* แทนค่าใช้จ่ายรวมที่สามารถประหยัดได้สูงสุด

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการศึกษาตัวแบบ EOQ ที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ สามารถแบ่งการดำเนินงานวิจัยออกเป็น 4 ขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษารายละเอียดของระบบสินค้าคงคลังใน Tersine [2] และศึกษาการหาตัวแบบ EOQ โดยวิธีพีชคณิตที่นำเสนอโดย Grubbström [3]

2. หาค่าใช้จ่ายรวมที่สามารถประหยัดได้

3. หาปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุด หรือหาตัวแบบ EOQ ที่สอดคล้องกับของระบบสินค้าคงคลังที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษโดยใช้วิธีพีชคณิต

4. ยกตัวอย่างเพื่อแสดงการประยุกต์ของตัวแบบ EOQ ที่ได้ในขั้นตอนที่ 3

วิธีที่จะใช้หาตัวแบบ EOQ ในการศึกษาครั้งนี้ คือ วิธีพีชคณิตที่นำเสนอโดย Grubbström [3] หลักการของวิธีนี้ คือ การจัดรูปแบบของค่าใช้จ่ายในระบบสินค้าคงคลังที่สนใจให้อยู่ในรูปแบบกำลังสอง (quadratic form) ของปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าเพื่อทำให้สามารถประหยัดค่าใช้จ่ายได้สูงสุด

ผลการวิจัย

ผลลัพธ์ที่เราต้องการ คือ ปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดของระบบสินค้าคงคลังเมื่อมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษโดยใช้วิธีพีชคณิต ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1. ปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดเมื่อมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ คือ

$$Q_S^* = \frac{D}{i(c-k)}\left(\frac{2A}{Q^*}+k\right)-q \tag{1}$$

และค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุด คือ

$$G^* = A\left(\frac{(c-k)}{c}\left(\frac{Q_S^*}{Q^*}\right)^2-1\right) \tag{2}$$

โดยที่ $Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{ic}}$

พิสูจน์ พิจารณาระบบสินค้าคงคลังที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษดังรูปที่ 1 เมื่อราคาสินค้ามีการปรับลดลงชั่วคราวจาก c บาทต่อหน่วย เป็น c-k บาทต่อหน่วย การปรับราคาสินค้าลดลงชั่วคราวนี้จะเกิดขึ้น ณ จุด T_0 ซึ่งอาจมีหรือไม่มีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษ และเมื่อเลยช่วงเวลานี้ไปแล้ว สินค้าก็จะมีราคา c บาทต่อหน่วยเท่าเดิม ต่อไปพิจารณาค่าใช้จ่ายต่างๆ ของระบบสินค้าคงคลัง จะเห็นได้ว่าก่อนถึงช่วงเวลาของการลดสินค้าแบบพิเศษและหลังการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ ณ จุด T_0 เราสามารถดำเนินการจัดหาสินค้าเหมาะที่สุดด้วยราคา c บาทต่อหน่วยในปริมาณ $Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{ic}}$ หน่วย (เป็นปริมานการสั่งซื้อหรือ

ผลิตสินค้าเหมาะที่สุดแบบปรกติ) ถ้ามีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษ ณ จุด T_0 ในปริมาณ Q_s หน่วย ดังรูปที่ 1 ค่าใช้จ่ายรวมในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 สามารถหาได้ดังนี้

ค่าใช้จ่ายที่เกิดจากการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าในปริมาณ Q_s หน่วยมีค่าเท่ากับ

$$A+(c-k)Q_s$$

ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาที่แปรไปตามราคาสินค้าในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 สามารถแบ่งการพิจารณาออกเป็นสองช่วงดังนี้

ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} ic\int_0^{\frac{q}{D}}(q-Dx)\,dx+i(c-k)\int_0^{\frac{q}{D}}Q_s\,dx &= ic\left[qx-\frac{Dx^2}{2}\right]_0^{\frac{q}{D}}+i(c-k)\left[Q_s x\right]_0^{\frac{q}{D}} \\ &= ic\frac{q^2}{2D}+i(c-k)\frac{qQ_s}{D} \end{aligned} \tag{3}$$

และค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาในช่วงเวลา T_1 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} i(c-k)\int_0^{\frac{Q_s}{D}}(Q_s-Dx)\,dx &= i(c-k)\left[Q_s x-\frac{Dx^2}{2}\right]_0^{\frac{Q_s}{D}} \\ &= i(c-k)\frac{Q_s^{\,2}}{2D} \end{aligned} \tag{4}$$

ดังนั้นค่าใช้จ่ายรวมทั้งหมดที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 จะมีค่าเท่ากับ

$$A+(c-k)Q_s+i(c-k)\frac{Q_s^{\,2}}{2D}+ic\frac{q^2}{2D}+i(c-k)\frac{qQ_s}{D}$$

นั่นคือ จะได้ว่าค่าใช้จ่ายรวมเมื่อมีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษ ณ จุด T_0 มีค่าเท่ากับ

$$C_s=A+(c-k)Q_s+i(c-k)\frac{Q_s^{\,2}}{2D}+ic\frac{q^2}{2D}+i(c-k)\frac{qQ_s}{D} \tag{5}$$

ถ้าไม่มีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษ แต่สั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบปรกติเหมือนเดิม ณ จุด T_1 เท่ากับ Q^* หน่วย (พิจารณาเส้นปะในรูปที่ 1) เราสามารถหาค่าใช้จ่ายรวมในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 ได้ดังนี้

เนื่องจากปริมาณสินค้าในช่วงเวลา T_1 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ Q_s หน่วย และจำนวนครั้งในการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้ามีค่าเท่ากับ $\frac{Q_s}{Q^*}$ ครั้ง ดังนั้นจะสามารถหาค่าใช้จ่ายต่างๆ ในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 ได้ดังนี้

ค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าในปริมาณ Q_s หน่วย มีค่าเท่ากับ

$$\frac{Q_S}{Q^*}A+cQ_S$$

ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาที่แปรไปตามราคาสินค้าในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 ได้แบ่งการพิจารณาออกเป็นสองช่วงดังนี้

ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} ic\int_0^{\frac{q}{D}}\left(q-Dx\right)dx &= ic\left[qx-\frac{Dx^2}{2}\right]_0^{\frac{q}{D}} \\ &= ic\frac{q^2}{2D} \end{aligned} \tag{6}$$

และค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาในช่วงเวลา T_1 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q_S}{Q^*}\right)ic\int_0^{\frac{Q^*}{D}}\left(Q^*-Dx\right)dx &= \left(\frac{Q_S}{Q^*}\right)ic\left[Q^*x-\frac{Dx^2}{2}\right]_0^{\frac{Q^*}{D}} \\ &= \left(\frac{Q_S}{Q^*}\right)ic\left(\frac{Q^{*2}}{2D}\right) \\ &= ic\frac{Q_SQ^*}{2D} \end{aligned} \tag{7}$$

ดังนั้นจะได้ว่าค่าใช้จ่ายรวมทั้งหมดที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา T_0 ถึง T_2 มีค่าเท่ากับ

$$C_n=\frac{Q_S}{Q^*}A+cQ_S+ic\frac{q^2}{2D}+ic\frac{Q_SQ^*}{2D} \tag{8}$$

และค่าใช้จ่ายรวมที่สามารถประหยัดได้ (G) มีค่าเท่ากับ

$$
\begin{aligned}
G &= C_n - C_s \\
&= \frac{Q_s}{Q^*}A + cQ_s + ic\frac{q^2}{2D} + ic\frac{Q_sQ^*}{2D} - \left\{A + (c-k)Q_s + ic\frac{q^2}{2D} + i(c-k)\frac{qQ_s}{D} + i(c-k)\frac{{Q_s}^2}{2D}\right\} \\
&= \frac{Q_s}{D}\left(\frac{AD}{Q^*} + ic\frac{Q^*}{2}\right) + kQ_s - i(c-k)\left(\frac{{Q_s}^2}{2D}\right) - i(c-k)\frac{qQ_s}{D} - A \\
&= \frac{Q_s}{D}\left(\frac{2AD + ic(Q^*)^2}{2Q^*}\right) + kQ_s - i(c-k)\left(\frac{{Q_s}^2}{2D}\right) - i(c-k)\frac{qQ_s}{D} - A \\
&= Q_s\left(\frac{2A}{Q^*}\right) + kQ_s - i(c-k)\left(\frac{{Q_s}^2}{2D}\right) - i(c-k)\frac{qQ_s}{D} - A \qquad (\text{โดย } Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{ic}}\ ) \\
&= -i(c-k)\left(\frac{{Q_s}^2}{2D}\right) + \left(\frac{2A}{Q^*} - i(c-k)\frac{q}{D} + k\right)Q_s - A \\
&= -\frac{i(c-k)}{2D}\left\{{Q_s}^2 + \left(\frac{-2D}{i(c-k)}\left[\frac{2A}{Q^*} + k\right] - 2q\right)Q_s\right\} - A \\
&= -\frac{i(c-k)}{2D}\left\{{Q_s}^2 - 2\left(\frac{D}{i(c-k)}\left[\frac{2A}{Q^*} + k\right] - q\right)Q_s\right\} - A \\
&= -\frac{i(c-k)}{2D}\left\{{Q_s}^2 - 2\left(\frac{D}{i(c-k)}\left[\frac{2A}{Q^*} + k\right] - q\right)Q_s + \left(\frac{D}{i(c-k)}\left[\frac{2A}{Q^*} + k\right] - q\right)^2\right\} \\
&\quad + \frac{i(c-k)}{2D}\left(\frac{D}{i(c-k)}\left[\frac{2A}{Q^*} + k\right] - q\right)^2 - A \\
&= -\frac{i(c-k)}{2D}\left\{Q_s - \left(\frac{D}{i(c-k)}\left[\frac{2A}{Q^*} + k\right] - q\right)\right\}^2 + \frac{i(c-k)}{2D}\left(\frac{D}{i(c-k)}\left[\frac{2A}{Q^*} + k\right] - q\right)^2 - A
\end{aligned}
\tag{9}
$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่าใช้จ่าย G ในสมการ (9) จะมีค่าสูงสุดก็ต่อเมื่อ $Q_s - \left(\frac{D}{i(c-k)}\left[\frac{2A}{Q^*} + k\right] - q\right) = 0$ หรือเมื่อ $Q_s = \frac{D}{i(c-k)}\left(\frac{2A}{Q^*} + k\right) - q$ ดังนั้นปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดเมื่อมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ คือ

$$
Q_s^* = \frac{D}{i(c-k)}\left(\frac{2A}{Q^*} + k\right) - q
$$

และค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุดเมื่อมีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}
G^* &= \frac{i(c-k)}{2D}\left[\frac{D}{i(c-k)}\left(\frac{2A}{Q^*}+k\right)-q\right]^2 - A \\
&= \frac{i(c-k)}{2D}(Q_s^*)^2 - A \\
&= A\left[\frac{i(c-k)}{2AD}(Q_s^*)^2 - 1\right] \\
&= A\left[\frac{i(c-k)ic}{2ADic}(Q_s^*)^2 - 1\right] \\
&= A\left[\frac{(c-k)}{c}\left(\frac{Q_s^*}{Q^*}\right)^2 - 1\right]
\end{aligned}$$

ซึ่งทำให้เราได้ผลลัพธ์ดังสมการ (1) และ (2) ตามต้องการ

หมายเหตุ ถ้า $\frac{(c-k)}{c}\left(\frac{Q_s^*}{Q^*}\right)^2 > 1$ และจะทำให้ $G^* > 0$ ดังนั้นควรสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษในปริมาณ Q_s^* หน่วย เมื่อ $\frac{(c-k)}{c}\left(\frac{Q_s^*}{Q^*}\right)^2 > 1$ เท่านั้น และในกรณีที่ $q = 0$ ตัวแบบ EOQ ที่ได้จะเหมือนกับตัวแบบของ Tersine [2] ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 1. ถ้า $q = 0$ แล้วจะได้ว่าปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดเมื่อมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ

$$Q_s^* = \frac{D}{i(c-k)}\left[\frac{2A}{Q^*}+k\right]$$

และค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุดมีค่าเท่ากับ

$$G^* = \frac{A(c-k)}{c}\left(\frac{Q_s^*}{Q^*}-1\right)^2$$

โดยที่ $Q^* = \sqrt{\dfrac{2AD}{ic}}$

พิสูจน์ ในกรณีนี้จะแสดงการพิสูจน์ว่า $G^* = \dfrac{A(c-k)}{c}\left(\dfrac{Q_S^*}{Q^*}-1\right)^2$ เท่านั้น ซึ่งในกรณีที่ $q = 0$ จะได้

$$
\begin{aligned}
G^* &= -\frac{i(c-k)}{2D}\left\{Q_S^* - \left(\frac{D}{i(c-k)}\left[\frac{2A}{Q^*}+k\right]\right)\right\}^2 + \frac{D}{2i(c-k)}\left(\frac{2A}{Q^*}+k\right)^2 - kQ^* - \frac{kA}{c} - A \\
&= \frac{D}{2i(c-k)}\left(\frac{2A}{Q^*}+k\right)^2 - kQ^* - \frac{kA}{c} - A \\
&= \frac{i(c-k)(Q_S^*)^2}{2D} + \frac{A(c-k)}{c} - kQ^* - 2A \\
&= \frac{A(c-k)}{c}\left(\frac{i(c-k)(Q_S^*)^2}{2AD}+1\right) - Q^*\left(\frac{2A}{Q^*}+k\right) \\
&= \frac{A(c-k)}{c}\left(\frac{(Q_S^*)^2}{(Q^*)^2}+1\right) - \frac{i(c-k)}{D}Q^*Q_S^* \qquad \left(\text{โดย } Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{ic}}\right) \\
&= \frac{A(c-k)}{c}\left(\left(\frac{Q_S^*}{Q^*}\right)^2 - \frac{ic}{AD}Q^*Q_S^* + 1\right) \\
&= \frac{A(c-k)}{c}\left(\left(\frac{Q_S^*}{Q^*}\right)^2 - 2\frac{Q_S^*}{Q^*} + 1\right) \\
&= \frac{A(c-k)}{c}\left(\frac{Q_S^*}{Q^*}-1\right)^2
\end{aligned}
$$

ซึ่งทำให้เราได้ค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุดตามต้องการ □

การประยุกต์ใช้ผลการวิจัย

ในหัวข้อนี้เป็นการยกตัวอย่างเพื่อแสดงการประยุกต์ใช้ผลการวิจัยที่ได้ในทฤษฎีบท 1

ตัวอย่าง 1. ปัจจุบันราคาต้นทุนของเครื่องพิมพ์สีธรรมดาตราดาว ของร้านจำหน่ายอุปกรณ์ต่างๆ ที่เกี่ยวกับคอมพิวเตอร์แห่งหนึ่ง คือ 2,500 บาทต่อเครื่อง ต่อมาทราบว่าตัวแทนจำหน่ายของเครื่องพิมพ์นี้จะลดราคาต้นทุนของเครื่องพิมพ์นี้ให้เป็นพิเศษในอีกหนึ่งสัปดาห์ข้างหน้า โดยมีราคาใหม่เป็น 2,000 บาทต่อเครื่อง ปัจจุบันร้านจำหน่ายอุปกรณ์ต่างๆ ที่เกี่ยวกับคอมพิวเตอร์แห่งนี้จำหน่ายเครื่องพิมพ์สีธรรมดาตราดาวได้ปีละ 1,000 เครื่อง ค่าใช้จ่ายในการดำเนินการสั่งซื้อเครื่องพิมพ์นี้จากตัวแทนจำหน่ายครั้งละ 500 บาท ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาเครื่องพิมพ์นี้เท่ากับ 15% ของราคาต่อเครื่องต่อปี อยากทราบว่าก่อนสิ้นสุดการลดราคาเป็นพิเศษของตัวแทนจำหน่าย ร้านจำหน่ายอุปกรณ์ต่างๆ ที่เกี่ยวกับคอมพิวเตอร์แห่งนี้ควรจะสั่งซื้อเครื่องพิมพ์สีธรรมดาตราดาว ในจำนวนเท่าใด จึงจะทำให้สามารถประหยัดค่าใช้จ่ายได้สูงสุด และมีค่าเท่าใด ถ้าในขณะที่มีการสั่งซื้อเครื่องพิมพ์สีธรรมดาตราดาวแบบพิเศษนี้มีเครื่องพิมพ์สีธรรมดาตราดาวเหลืออยู่ในร้าน 25 เครื่อง

วิธีทำ จากโจทย์ $D = 1{,}000$ เครื่องต่อปี

$A = 500$ บาทต่อครั้ง

$i = 15\%$ ของราคาต่อเครื่องต่อปี

$c = 2{,}500$ บาทต่อเครื่อง

$k = 500$ บาทต่อเครื่อง

$q = 25$ เครื่อง

หา Q^* จากสมการ $Q^* = \sqrt{\dfrac{2AD}{ic}}$

จะได้ $Q^* = \sqrt{\dfrac{2(500)(1{,}000)}{(0.15)(2{,}500)}}$

$= 51.6398$ เครื่อง

หา Q_s^* จากสมการ $Q_s^* = \dfrac{D}{i(c-k)}\left(\dfrac{2A}{Q^*}+k\right)-q$

จะได้ $Q_s^* = \dfrac{(1{,}000)}{(0.15)(2{,}500-500)}\left(\dfrac{2(500)}{51.6398}+500\right)-25$

$= 1{,}706.2164$ เครื่อง

และหา G^* ได้จาก $G^* = A\left(\dfrac{(c-k)}{c}\left(\dfrac{Q_S^*}{Q^*}\right)^2 - 1\right)$

จะได้ G^* $= 500\left(\dfrac{(2,500-500)}{2,500}\left(\dfrac{1,706.2164}{51.6398}\right)^2 - 1\right)$

$= 436,175.7876$ บาท

ดังนั้นร้านจำหน่ายอุปกรณ์ต่างๆ ที่เกี่ยวกับคอมพิวเตอร์แห่งนี้ควรสั่งซื้อเครื่องพิมพ์สีธรรมดาตราดาว แบบพิเศษจำนวน 1,706.2164 เครื่อง ซึ่งจะทำให้สามารถประหยัดค่าใช้จ่ายได้สูงสุดเท่ากับ 436,175.7876 บาท

ตัวอย่าง 2. ปรกติร้านเสื้อผ้าสมทรงสั่งซื้อกางเกงยีนส์เป็นประจำจากโรงงานผลิตเสื้อผ้าดีเลิศ ในราคาตัวละ 400 บาท ต่อมาโรงงานผลิตเสื้อผ้าดีเลิศได้แจ้งให้ทราบว่าในอีกสามวันข้างหน้าจะลดราคาสินค้าเป็นพิเศษให้กับลูกค้าประจำของโรงงาน โดยเฉพาะกางเกงยีนส์จะลดราคาให้กับลูกค้าเหลือตัวละ 350 บาท สมมุติว่าปัจจุบันร้านเสื้อผ้าสมทรงจำหน่ายกางเกงยีนส์ได้ปีละ 2,000 ตัว แต่ละครั้งในการสั่งซื้อกางเกงยีนส์จากโรงงานผลิตเสื้อผ้าดีเลิศมาจำหน่ายต้องเสียค่าใช้จ่าย 1,000 บาท ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษากางเกงยีนส์เท่ากับ 5% ของราคากางเกงยีนส์ต่อตัวต่อปี และขณะที่ร้านเสื้อผ้าสมทรงสั่งซื้อกางเกงยีนส์แบบพิเศษจากโรงงานผลิตเสื้อผ้าดีเลิศมีกางเกงยีนส์เหลืออยู่ในร้านจำนวน 120 ตัว อยากทราบว่าก่อนที่จะหมดช่วงการลดราคาสินค้าแบบพิเศษของโรงงานผลิตเสื้อผ้าดีเลิศ ร้านเสื้อผ้าสมทรง ควรสั่งซื้อกางเกงยีนส์จากโรงงานผลิตเสื้อผ้าดีเลิศในจำนวนเท่าใด จึงจะประหยัดค่าใช้จ่ายได้สูงสุด

วิธีทำ จากโจทย์ $D = 2,000$ ตัวต่อปี

$A = 1,000$ บาทต่อครั้ง

$i = 5\%$ ของราคากางเกงยีนส์ต่อตัวต่อปี

$c = 400$ บาทต่อตัว

$k = 50$ บาทต่อตัว

$q = 120$ ตัว

หา Q^* จากสมการ $Q^* = \sqrt{\dfrac{2AD}{ic}}$

จะได้ $$Q^* = \sqrt{\frac{2(1,000)(2,000)}{(0.05)(400)}}$$
$$= 447.2136 \text{ ตัว}$$

หา Q_S^* จากสมการ $Q_S^* = \dfrac{D}{i(c-k)}\left(\dfrac{2A}{Q^*}+k\right)-q$

จะได้ $$Q_S^* = \frac{(2,000)}{(0.05)(400-50)}\left(\frac{2(1,000)}{447.2136}+50\right)-120$$
$$= 6,105.3870 \text{ ตัว}$$

และหา G^* จากสมการ $G^* = A\left(\dfrac{(c-k)}{c}\left(\dfrac{Q_S^*}{Q^*}\right)^2-1\right)$

จะได้ G^* $$= 1,000\left(\frac{(400-50)}{400}\left(\frac{6,105.3870}{447.2136}\right)^2-1\right)$$
$$=162,081.4048 \text{ บาท}$$

ดังนั้นร้านเสื้อผ้าสมทรงควรสั่งซื้อกางเกงยีนส์แบบพิเศษจากโรงงานผลิตเสื้อผ้าดีเลิศจำนวน 6,105.3870 ตัว จึงจะทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายได้สูงสุดเท่ากับ 162,081.4048 บาท

สรุปผลการวิจัย

การศึกษาครั้งนี้เป็นการปรับปรุงระบบสินค้าคงคลังที่มีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษใน Tersine [2] โดยสมมุติให้ระดับสินค้าคงคลังเมื่อมีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ q ($q \geq 0$) และได้ใช้วิธีพีชคณิตที่นำเสนอโดย Grubbström [3] หาตัวแบบ EOQ ของระบบสินค้าคงคลังที่ต้องการ ซึ่งในการหาตัวแบบ EOQ ดังกล่าวอยู่ภายใต้เงื่อนไขที่ทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นได้สูงสุด และจะเห็นได้ว่าในการหาตัวแบบ EOQ โดยใช้วิธีพีชคณิตนั้นไม่ต้องใช้ความรู้ทางด้านแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ แต่สามารถหาตัวแบบได้จากการจัดรูปของค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นให้อยู่ในรูปแบบกำลังสอง ดังนั้นวิธีนี้จึงเป็นอีกวิธีหนึ่งที่เหมาะสำหรับผู้ที่ขาดความรู้ทางด้านแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ และในการศึกษาครั้งนี้ ตัวแบบ EOQ ที่ใช้หาปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดเมื่อมีการลดราคาสินค้าแบบพิเศษ คือ

$Q_S^* = \frac{D}{i(c-k)}\left(\frac{2A}{Q^*}+k\right)-q$ หน่วย และค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุด (G^*) มีค่าเท่ากับ

$$A\left[\frac{(c-k)}{c}\left(\frac{Q_S^*}{Q^*}\right)^2-1\right]$$

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณกรรมการผู้อ่านผลงานวิจัยที่ได้กรุณาให้คำแนะนำและแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ จนทำให้ผลงานวิจัยนี้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

เอกสารอ้างอิง

1. Harris, F. W. 1913. How Many Parts to Make at Once, Factory. *The Magazine of Management* 10: 135-136.
2. Tersine, R. J. 1994. *Principles of Inventory and Materials Management.* 4th Edition. New Jersey. Prentice-Hall.
3. Grubbström, R. W. 1996. Material Requirements Planning and Manufacturing Resource Planning. *International Encyclopedia of Business and Management.* London. Routledge.
4. Grubbström, R. W., and Erdem, A. 1999. The EOQ with Backlogging Derived without Derivatives. *International Journal of Production Economics* 59: 529-530.
5. Cárdenas-Barrón, L. E. 2001. The Economic Production Quantity (EPQ) with Shortage Derived Algebraically. *International Journal of Production Economics* 70: 289-292.
6. Huang, Y. F. 2003. The EOQ and EPQ Model with Backlogging and Defective Items Using the Algebraic Approach. *Journal of Statistics and Management Systems* 6: 171-180.
7. Teerapabolarn, K., and Khamrod, S. 2013. The EOQ Model with Shortage and Price Increases Derived Algebraically. *Srinakharinwirot Science Journal* 29 (1): 37-55. (in Thai)
8. Teerapabolarn, K., and Pomsuk, W. 2013. The EOQ Model with Continuous Replenishment Rate and Price Increases Derived Algebraically. *Srinakharinwirot Science Journal* 29 (2): 43-58. [in Thai].

ได้รับบทความวันที่ 14 ธันวาคม 2556
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 4 กุมภาพันธ์ 2557