บทความวิจัย

ความสวยงามวางนัยทั่วไป : พหุคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นเลขโดด 1

สุภารัตน์ ใบยา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์*

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้ประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือและหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการศึกษาและหารูปทั่วไปของพหุคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นเลขโดด 1 ผลการศึกษาพบว่ารูปทั่วไปของพหุคูณนี้เป็นดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m และ n และสำหรับทุกจำนวนเศษเหลือ ${}_q r$ จะได้ว่า $1\underbrace{{}_q r\,{}_q r\ldots{}_q r}_{\#({}_q r)=m}1\times n = n\underbrace{({}_q r\cdot n)({}_q r\cdot n)\ldots({}_q r\cdot n)}_{\#({}_q r\cdot n)=m}n$

คำสำคัญ: จำนวนเศษเหลือ หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ พหุคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นเลขโดด 1

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา

*ผู้นิพนธ์ประสานงาน, e-mail: aiyared.ia@up.ac.th

Generalized Beauty : Multiple of the Number that Every Digit is the Same Except the First and Last Digits as 1

Suparat Baiya and Aiyared Iampan*

ABSTRACT

This paper applies the remainder number and the Principle of Mathematical Induction to study and find a general form of the multiple of the number that every digit is the same but except the first and last digits as 1. The results show that the general form of the multiple is $1\underbrace{{}_q r\,{}_q r \ldots {}_q r}_{\#({}_q r)=m}1 \times n = n\underbrace{({}_q r \cdot n)({}_q r \cdot n)\ldots({}_q r \cdot n)}_{\#({}_q r \cdot n)=m}n$ for all positive integers m and n, and for all remainder number ${}_q r$.

Keywords: remainder number, Principle of Mathematical Induction, multiple of the number that every digit is the same except the first and last digits as 1

Department of Mathematics, School of Science, University of Phayao, Mueang, Phayao 56000

*Corresponding author. E-mail: aiyared.ia@up.ac.th

บทนำ

การศึกษาหารูปแบบทั่วไปที่สวยงามทางพีชคณิตของจำนวนหลายหลักนั้น นับว่ามีประโยชน์อย่างมากในชีวิตประจำวันของเรา สำหรับช่วยเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้นในการคำนวณหาผลลัพธ์ในกรณีฉุกเฉิน เมื่อเราไม่มีเครื่องมือช่วยคำนวณ อาทิ เครื่องคิดเลข เครื่องคอมพิวเตอร์ หรือแม้กระทั่งโทรศัพท์มือถือ บางครั้งแม้ว่าจะมีเครื่องช่วยคำนวณเหล่านี้ก็อาจจะคำนวณหาค่าของจำนวนที่มีจำนวนหลักมากๆ ไม่ได้ ฉะนั้นสูตรลัดบางอย่างจึงมีความจำเป็นอย่างมากในการหาคำตอบ สำหรับการศึกษาและหารูปทั่วไปที่แน่นอนบางอย่างทางพีชคณิตของจำนวนที่มีจำนวนหลักมากๆ นั้นได้ประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือในการศึกษา ซึ่งนิยามใน (I) สำหรับจำนวนเต็ม a ใดๆ ด้วยสัญลักษณ์ $a = {}_q r$ เมื่อ r และ q เป็นจำนวนเต็มและ $0 \le r < 10$ และได้มีการศึกษาในหลายรูปแบบ ดังนี้ อัยเรศ [1] ได้ศึกษาและหารูปแบบทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปที่แน่นอนได้ ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n = {}_q r$ เมื่อ r และ q เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \le r < 10$ จะได้ว่า

$$(\underbrace{111...1}_{\#(1)=n})^2 = 123...9_1 0_1 1..._q (r-1)_q r_q (r-1)..._1 1_1 09...321$$

ณัฐพงษ์ และ อัยเรศ [2] ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 3 (เลขโดด 6) ยกเว้นหลักหน่วยเป็นเลขโดด 4 (เลขโดด 7) โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปที่แน่นอนได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$(\underbrace{333...34}_{\#(3)=n})^2 = \underbrace{111...1}_{\#(1)=n+1}\underbrace{555...5}_{\#(5)=n}6 \text{ และ } (\underbrace{666...67}_{\#(3)=n})^2 = \underbrace{444...4}_{\#(1)=n+1}\underbrace{888...8}_{\#(5)=n}9$$

แสงประทีป และ อัยเรศ [3] ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลบวกของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 6 (เลขโดด 3, 9) กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 6 (เลขโดด 3, 9) โดยได้พบว่าผลบวกของผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปที่แน่นอนได้ ดังนี้สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$\left(\underbrace{666...6}_{\#(6)=n}\right)^2 + \underbrace{666...6}_{\#(6)=n} = \underbrace{444...4}_{\#(4)=n}\underbrace{222...2}_{\#(2)=n}, \left(\underbrace{333...3}_{\#(3)=n}\right)^2 + \underbrace{333...3}_{\#(3)=n} = \underbrace{111...1}_{\#(1)=n}\underbrace{222...2}_{\#(2)=n}$$

$$\text{และ} \left(\underbrace{999...9}_{\#(9)=n}\right)^2 + \underbrace{999...9}_{\#(9)=n} = \underbrace{999...9}_{\#(9)=n}\underbrace{000...0}_{\#(0)=n}$$

มากกว่านั้น อภิสิทธิ์ และ อัยเรศ [4] ได้นิยามและศึกษาลักษณะของจำนวนหลายหลัก ซึ่งแต่ละหลักเป็นจำนวนเต็ม เช่น 88888 (จำนวนห้าหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 8) หรือ (27)(27)(27)(27)(27)(27)(27) (จำนวนเจ็ดหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 27) พร้อมทั้งหาตัวผกผันภายใต้การดำเนินการทวิภาคที่ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ [5] ได้นิยามไว้

บทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและหารูปทั่วไปที่แน่นอนของพหุคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นเลขโดด 1 โดยเครื่องมือหลักที่เราใช้ในการสร้างจำนวนเศษเหลือ และพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก คือขั้นตอนวิธีการหาร และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 [6] ขั้นตอนวิธีการหาร (The Division Algorithm) ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ b   0 แล้วมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง $a = b \cdot q + r$ และ $0 \le r < |b|$

ทฤษฎีบท 2 [6] หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction) กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n และกำหนดให้ n_0 เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

(1) $P(n_0)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \ge n_0$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \ge n_0$

จากขั้นตอนวิธีการหาร อัยเรศ [1] และ ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ [5] ได้นิยามจำนวนเศษเหลือ (remainder number) ไว้ดังนี้ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ $b = 10$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม q (ผลหาร) และ r (เศษเหลือ) ซึ่ง $a = 10 \cdot q + r$ และ $0 \le r < 10$ ฉะนั้น r เป็นจำนวนหนึ่งหลักหรือเลขโดดนั่นเอง สัญลักษณ์ของจำนวนเศษเหลือสำหรับ a นิยามโดย

$$a := {}_q r \tag{I}$$

เช่น

$-220 = {}_{-22}0$	$-20 = {}_{-2}0$	$0 = {}_{0}0$	$0 = {}_{0}0$	$20 = {}_{2}0$	$220 = {}_{22}0$
$-221 = {}_{-23}9$	$-21 = {}_{-3}9$	$-1 = {}_{-1}9$	$1 = {}_{0}1$	$21 = {}_{2}1$	$221 = {}_{22}1$
$-222 = {}_{-23}8$	$-22 = {}_{-3}8$	$-2 = {}_{-1}8$	$2 = {}_{0}2$	$22 = {}_{2}2$	$222 = {}_{22}2$
$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$
$-229 = {}_{-23}1$	$-29 = {}_{-3}1$	$-9 = {}_{-1}1$	$9 = {}_{0}9$	$29 = {}_{2}9$	$229 = {}_{22}9$

ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ [5] ได้นิยามเซตของจำนวนใน (II) ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1 [5] กำหนดให้ ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ แทนเซตของจำนวนใน (I) ทั้งหมด นั่นคือ

$${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R} = \{ {}_q r \mid r, q \in \mathbb{Z} \text{ และ } 0 \le r < 10 \} \tag{II}$$

และเราจะเรียกสมาชิกของ ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ ว่า จำนวนเศษเหลือ (remainder number)

ข้อสังเกต ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R} = \mathbb{Z}$

เพื่อความสะดวก ยังคงจะเขียน ${}_0r$ ด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม $0 \le r < 10$ และเพื่อให้เข้าใจในผลลัพธ์ของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจากบทความนี้ จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือที่ได้จาก (I) กลับเป็นเลขฐานสิบปกติ ซึ่งทำได้โดยการบวกทแยงจากเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้าย และสำหรับจำนวนในหลักหน่วยให้ดึงเศษลงมาได้เลย เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายจะขอยกตัวอย่างการแปลงจำนวน $1_{12}3_{110}85_{-2}9_{-5}2_{4}6_{81}6$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
1_{12}3_{110}85_{-2}9_{-5}2_{4}6_{81}6 &= (1+12)(3+110)8(5-2)(9-5)(2+4)(6+81)6 \\
&= (13)(113)8(3)(4)(6)(87)6 \\
&= {}_{1}3_{11}38346_{8}76 \\
&= 1(3+11)3834(6+8)76 \\
&= 1(14)3834(14)76 \\
&= 1_{1}43834_{1}476 \\
&= (1+1)4383(4+1)476 \\
&= 243835476
\end{aligned}$$

หัวข้อต่อไปนี้จะแสดงถึงผลการศึกษาหลักของบทความนี้ ซึ่งประกอบด้วยข้อสังเกตที่เราพบความสัมพันธ์ของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 8 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นเลขโดด 1 กับจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับเก้า จนนำไปสู่การศึกษาและการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก อีกทั้งยังให้ตัวอย่างที่ได้ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทหลักด้วย โดยที่เราจะใช้สัญลักษณ์ $\#(n)$ แทนจำนวนของ n ที่เรียงติดกัน สำหรับทุกจำนวนเต็ม n เช่น $1\underbrace{88\ldots8}_{\#(8)=12}1$

การแปลงจำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นจะสังเกตเห็นว่าทำได้ง่าย แต่หากจะแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นทำได้ไม่ง่ายนัก ดังนั้นบทตั้ง 1 [5] มีประโยชน์อย่างมากสำหรับการแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือ โดยได้แสดงให้เห็นถึงลักษณะของจำนวนเศษเหลือของจำนวนเต็มลบด้วย และได้นิยามการดำเนินการทวิภาค (binary operation) $\boxplus$ บน ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ โดย

$${}_{q}r \boxplus {}_{t}s = \begin{cases} {}_{q+t}(r+s); & 0 \le r+s \le 9 \\ {}_{(q+t)+b}a \;\;; & r+s \ge 10, r+s = {}_{b}a \end{cases} \quad \text{สำหรับทุก } {}_{q}r, {}_{t}s \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$$

เช่น

$$125 \boxplus 214 = {}_{12}5 \boxplus {}_{21}4 = {}_{12+21}(5+4) = {}_{33}9 = 339 \text{ และ}$$
$$-301 \boxplus 29 = {}_{-31}9 \boxplus {}_{2}9 = {}_{-31+2+1}8 = {}_{-28}8 = -272$$

บทตั้ง 1 [5] กำหนดให้ $n \in \mathcal{R}$ ซึ่ง $n = {}_q r$ จะได้ว่า

$$-n = \begin{cases} {}_{-q}0 & ; \ r = 0 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) & ; \ r \neq 0 \end{cases} \tag{III}$$

บทตั้ง 2 [4] สำหรับทุก $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ จะได้ว่าตัวผกผันภายใต้ $\boxplus$ ของ $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ คือ $(-x_1)(-x_2)(-x_3)\ldots(-x_n)$ นั่นคือ $-(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = (-x_1),(-x_2)(-x_3)\ldots(-x_n)$

ทฤษฎีบท 3 [4] กำหนดให้ $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n,\ m \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $0 \le s_i \le 9$ จะได้ว่า

$${}_m s_1 s_2 s_3 \ldots s_n = m \cdot 1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n} + s_1 s_2 s_3 \ldots s_n \tag{IV}$$

ข้อสังเกตและรูปแบบทั่วไปที่แน่นอน

จากการสังเกตผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 8 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นเลขโดด 1 กับจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับเก้า ทำให้เราพบความสัมพันธ์บางอย่างที่น่าสนใจของผลคูณ $1\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n}1 \times n$ เมื่อ $1 \le n \le 9$ และเขียนแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{array}{lllllll}
\#(8)=1: & 181 & \times 1 = & 181 & = & 1_0 81 & :\#({}_0 8)=1 \\
\#(8)=2: & 1881 & \times 2 = & 3762 & = & 2_1 6_1 62 & :\#({}_1 6)=2 \\
\#(8)=3: & 18881 & \times 3 = & 56643 & = & 3_2 4_2 4_2 43 & :\#({}_2 4)=3 \\
\#(8)=4: & 188881 & \times 4 = & 755524 & = & 4_3 2_3 2_3 2_3 24 & :\#({}_3 2)=4 \\
\#(8)=5: & 1888881 & \times 5 = & 9444405 & = & 5_4 0_4 0_4 0_4 0_4 05 & :\#({}_4 0)=5 \\
\#(8)=6: & 18888881 & \times 6 = & 113333286 & = & 6_4 8_4 8_4 8_4 8_4 8_4 86 & :\#({}_4 8)=6 \\
\#(8)=7: & 188888881 & \times 7 = & 1322222167 & = & 7_5 6_5 6_5 6_5 6_5 6_5 6_5 67 & :\#({}_5 6)=7 \\
\#(8)=8: & 1888888881 & \times 8 = & 15111111048 & = & 8_6 4_6 4_6 4_6 4_6 4_6 4_6 4_6 48 & :\#({}_6 4)=8 \\
\#(8)=9: & 18888888881 & \times 9 = & 169999999929 & = & 9_7 2_7 2_7 2_7 2_7 2_7 2_7 2_7 2_7 29 & :\#({}_7 2)=9
\end{array} \tag{V}$$

จากผลคูณของจำนวน $1\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n}1 \times n$ กับจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $1 \le n \le 9$ ใน (V) เราสังเกตเห็นว่าผลคูณนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปของจำนวนเศษเหลือได้ ดังนี้

$$1\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n}1 \times n = n\underbrace{({}_q r \cdot n)({}_q r \cdot n)\ldots({}_q r \cdot n)}_{\#({}_q r \cdot n)=n}n$$

ฉะนั้น จาก (V) เราจึงสรุปเป็นข้อสงสัยได้ดังต่อไปนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของพหุคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นเลขโดด 1 ได้หรือไม่

(2) หากเราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของพหุคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นเลขโดด 1 ได้ แล้วรูปทั่วไปของพหุคูณที่ได้จะมีลักษณะเหมือนกับ (V) ที่เราพบหรือไม่

ทฤษฎีบท 4 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m และ n และสำหรับทุกจำนวนเศษเหลือ ${}_q r$ จะได้ว่า

$$1\underbrace{{}_q r\,{}_q r\ldots{}_q r}_{\#({}_q r)=m}1\times n = n\underbrace{({}_q r\cdot n)({}_q r\cdot n)\ldots({}_q r\cdot n)}_{\#({}_q r\cdot n)=m}n \qquad \text{(VI)}$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$1\underbrace{{}_q r\,{}_q r\ldots{}_q r}_{\#({}_q r)=m}1\times n = n\underbrace{({}_q r\cdot n)({}_q r\cdot n)\ldots({}_q r\cdot n)}_{\#({}_q r\cdot n)=m}n$$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

เนื่องจาก $1\underbrace{{}_q r\,{}_q r\ldots{}_q r}_{\#({}_q r)=m}1\times 1 = 1\underbrace{({}_q r\cdot 1)({}_q r\cdot 1)\ldots({}_q r\cdot 1)}_{\#({}_q r\cdot 1)=m}1$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(n)$ เป็นจริง จะได้ว่า $1\underbrace{{}_q r\,{}_q r\ldots{}_q r}_{\#({}_q r)=m}1\times n = n\underbrace{({}_q r\cdot n)({}_q r\cdot n)\ldots({}_q r\cdot n)}_{\#({}_q r\cdot n)=m}n$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
1\underbrace{{}_q r\,{}_q r\ldots{}_q r}_{\#({}_q r)=m}1\times(n+1) &= \left[1\underbrace{{}_q r\,{}_q r\ldots{}_q r}_{\#({}_q r)=m}1\times n\right]+1\underbrace{{}_q r\,{}_q r\ldots{}_q r}_{\#({}_q r)=m}1\\
&= \left[n\underbrace{({}_q r\cdot n)({}_q r\cdot n)\ldots({}_q r\cdot n)}_{\#({}_q r\cdot n)=m}n\right]+1\underbrace{{}_q r\,{}_q r\ldots{}_q r}_{\#({}_q r)=m}1\\
&= (n+1)\underbrace{({}_q r\cdot n+{}_q r)({}_q r\cdot n+{}_q r)\ldots({}_q r\cdot n+{}_q r)}_{\#({}_q r\cdot n+{}_q r)=m}(n+1)\\
&= (n+1)\underbrace{({}_q r\cdot(n+1))({}_q r\cdot(n+1))\ldots({}_q r\cdot(n+1))}_{\#({}_q r\cdot n+{}_q r)=m}(n+1)
\end{aligned}$$

ฉะนั้น $P(n+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$1\underbrace{{}_qr\,{}_qr\ldots{}_qr}_{\#({}_qr)=m}1\times n = n\underbrace{({}_qr\cdot n)({}_qr\cdot n)\ldots({}_qr\cdot n)}_{\#({}_qr\cdot n)=m}n \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n \qquad \square$$

บทแทรก 1 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m และ n และสำหรับทุกจำนวนเศษเหลือ ${}_qr$ จะได้ว่า

$$1\underbrace{{}_qr\,{}_qr\ldots{}_qr}_{\#({}_qr)=m}1\times(-n) = (-n)\underbrace{({}_qr\cdot(-n))({}_qr\cdot(-n))\ldots({}_qr\cdot(-n))}_{\#({}_qr\cdot(-n))=m}(-n) \qquad \text{(VII)}$$

การพิสูจน์ โดยบทตั้ง 2 และทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
1\underbrace{{}_qr\,{}_qr\ldots{}_qr}_{\#({}_qr)=m}1\times(-n) &= -\left(1\underbrace{{}_qr\,{}_qr\ldots{}_qr}_{\#({}_qr)=m}1\times n\right)\\
&= -\left(n\underbrace{({}_qr\cdot n)({}_qr\cdot n)\ldots({}_qr\cdot n)}_{\#({}_qr\cdot n)=m}n\right)\\
&= (-n)\underbrace{(-({}_qr\cdot n))(-({}_qr\cdot n))\ldots(-({}_qr\cdot n))}_{\#(-({}_qr\cdot n))=m}(-n)\\
&= (-n)\underbrace{({}_qr\cdot(-n))({}_qr\cdot(-n))\ldots({}_qr\cdot(-n))}_{\#({}_qr\cdot(-n))=m}(-n) \qquad \square
\end{aligned}$$

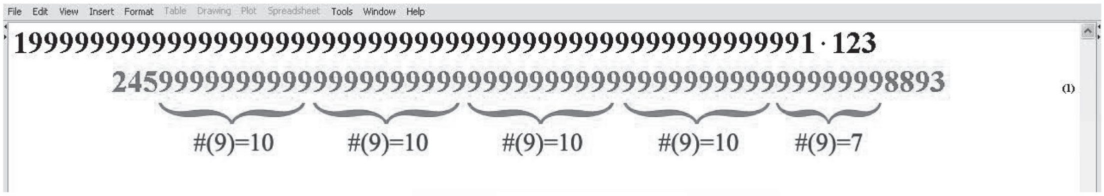
ตัวอย่าง 1 จงหาผลลัพธ์ของ $1\underbrace{99\ldots9}_{\#(9)=50}1\times 123$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
1\underbrace{99\ldots9}_{\#(9)=50}1\times 123 &= (123)\underbrace{(9\cdot 123)(9\cdot 123)(9\cdot 123)\ldots(9\cdot 123)}_{\#(9\cdot 123)=50}(123)\\
&= (123)\underbrace{(1107)(1107)(1107)\ldots(1107)}_{\#(1107)=50}(123)\\
&= {}_{12}3\,\underbrace{{}_{110}7\,{}_{110}7\,{}_{110}7\ldots{}_{110}7}_{\#({}_{110}7)=50}\,{}_{12}3\\
&= (12)(3+110)\underbrace{(7+110)(7+110)(7+110)\ldots(7+110)}_{\#(7+110)=49}(7+12)3\\
&= (12)(113)\underbrace{(117)(117)(117)\ldots(117)}_{\#(117)=49}(19)3\\
&= {}_{1}2\,{}_{11}3\,\underbrace{{}_{11}7\,{}_{11}7\,{}_{11}7\ldots{}_{11}7}_{\#({}_{11}7)=49}\,{}_{1}93\\
&= 1(2+11)(3+11)\underbrace{(7+11)(7+11)(7+11)\ldots(7+11)}_{\#(7+11)=48}(7+1)93\\
&= 1(13)(14)\underbrace{(18)(18)(18)\ldots(18)}_{\#(18)=48}893\\
&= 1\,{}_{1}3\,{}_{1}4\,\underbrace{{}_{1}8\,{}_{1}8\,{}_{1}8...{}_{1}8}_{\#({}_{1}8)=48}893\\
&= (1+1)(3+1)(4+1)\underbrace{(8+1)(8+1)(8+1)...(8+1)}_{\#(8+1)=47}8893\\
&= 245\underbrace{999...9}_{\#(9)=47}8893
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $1\underbrace{99\ldots9}_{\#(9)=50}1\times 123 = 245\underbrace{999...9}_{\#(9)=47}8893$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์



รูปที่ 1 $1\underbrace{99\ldots9}_{\#(9)=50}1\times 123$

ตัวอย่าง 2 จงหาผลลัพธ์ของ $1\underbrace{(789)(789)...(789)}_{\#(789)=9}1\times 9$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
1\underbrace{(789)(789)\ldots(789)}_{\#(789)=9}1\times 9 &= 9\underbrace{(789\cdot 9)(789\cdot 9)\ldots(789\cdot 9)}_{\#(789\cdot 9)=9}9 \\
&= 9\underbrace{(7101)(7101)\ldots(7101)}_{\#(7101)=9}9 \\
&= 9\underbrace{{}_{710}1\,{}_{710}1\ldots{}_{710}1}_{\#({}_{710}1)=9}9 \\
&= (719)\underbrace{(711)(711)\ldots(711)}_{\#(711)=8}19 \\
&= {}_{71}9\underbrace{{}_{71}1\,{}_{71}1\ldots{}_{71}1}_{\#({}_{71}1)=8}19 \\
&= (71)(80)\underbrace{(72)(72)\ldots(72)}_{\#(72)=7}119 \\
&= {}_{7}1_{8}0\underbrace{{}_{7}2\,{}_{7}2\ldots{}_{7}2}_{\#({}_{7}2)=7}119 \\
&= 7979999992119
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $1\underbrace{(789)(789)\ldots(789)}_{\#(789)=9}1\times 9 = 7979999992119$

ตัวอย่าง 3 จงหาผลลัพธ์ของ $1\underbrace{(-32)(-32)\ldots(-32)}_{\#(-32)=7}1\times 15$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
1\underbrace{(-32)(-32)\ldots(-32)}_{\#(-32)=7}1\times 15 &= (15)\underbrace{((-32)\cdot 15)((-32)\cdot 15)\ldots((-32)\cdot 15)}_{\#((-32)\cdot 15)=7}(15) \\
&= (15)\underbrace{(-480)(-480)\ldots(-480)}_{\#(-480)=7}(15) \\
&= {}_{1}5\underbrace{{}_{-48}0\,{}_{-48}0\ldots{}_{-48}0}_{\#({}_{-48}0)=7}{}_{1}5 \\
&= 1(-43)\underbrace{(-48)(-48)\ldots(-48)}_{\#(-48)=6}15 \\
&= 1{}_{-5}7\underbrace{{}_{-5}2\,{}_{-5}2\ldots{}_{-5}2}_{\#({}_{-5}2)=6}215 \\
&= (-4)2\underbrace{(-3)(-3)\ldots(-3)}_{\#(-3)=5}215 \\
&= {}_{-1}62\underbrace{{}_{-1}7\,{}_{-1}7\ldots{}_{-1}7}_{\#({}_{-1}7)=5}215 \\
&= {}_{-1}61\underbrace{66\ldots6}_{\#(6)=4}7215 \\
&= (-1\times 1\underbrace{00\ldots0}_{\#(0)=10}) + 61\underbrace{66\ldots6}_{\#(6)=4}7215 \quad \text{(โดยทฤษฎีบท 3)} \\
&= -3833332785
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $1\underbrace{(-32)(-32)\ldots(-32)}_{\#(-32)=7}1\times 15=-3833332785$

ตัวอย่าง 4 จงหาผลลัพธ์ของ $1\underbrace{(-32)(-32)\ldots(-32)}_{\#(-32)=7}1\times 15$

วิธีทำ โดยบทแทรก 1 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
1\underbrace{(-32)(-32)\ldots(-32)}_{\#(-32)=7}1\times(-15) &= (-15)\underbrace{((-32)\cdot(-15))((-32)\cdot(-15))...((-32)\cdot(-15))}_{\#((-32)\cdot(-15))=7}(-15) \\
&= (-15)\underbrace{(480)(480)(480)...(480)}_{\#(480)=7}(-15) \\
&= {}_{-2}5\underbrace{{}_{48}0\,{}_{48}0\,{}_{48}0\ldots{}_{48}0}_{\#({}_{48}0)=7}\,{}_{-2}5 \\
&= {}_{-2}(5+48)\underbrace{(0+48)(0+48)(0+48)\ldots(0+48)}_{\#(0+48)=6}(0+(-2))5 \\
&= {}_{-2}(53)\underbrace{(48)(48)(48)\ldots(48)}_{\#(48)=6}(-2)5 \\
&= {}_{-2+5}3\underbrace{{}_{4}8\,{}_{4}8\,{}_{4}8\ldots{}_{4}8}_{\#({}_{4}8)=6}\,{}_{-1}85 \\
&= {}_{3}3\underbrace{{}_{4}8\,{}_{4}8\,{}_{4}8\ldots{}_{4}8}_{\#({}_{4}8)=6}\,{}_{-1}85 \\
&= 3(3+4)\underbrace{(8+4)(8+4)(8+4)\ldots(8+4)}_{\#(8+4)=5}(8+(-1))85 \\
&= 37(12)(12)(12)(12)(12)785 \\
&= 37\,{}_{1}2\,{}_{1}2\,{}_{1}2\,{}_{1}2\,{}_{1}2785 \\
&= 3(7+1)(2+1)(2+1)(2+1)(2+1)2785 \\
&= 3833332785
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $1\underbrace{(-32)(-32)\ldots(-32)}_{\#(-32)=7}1\times(-15)=3833332785$

บทสรุป

จากการศึกษาพหุคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นเลขโดด 1 โดยอาศัยจำนวนเศษเหลือและหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่สำคัญในการศึกษา ทำให้สามารถตอบข้อสงสัยทั้งสองข้อได้ ดังนี้

(1) สามารถเขียนรูปทั่วไปของพหุคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นเลขโดด 1 ได้ดังกล่าวไว้ในทฤษฎีบท 4 ดังนี้

$$1\underbrace{{}_q r\, {}_q r \ldots {}_q r}_{\#({}_q r)=m}1 \times n = n\underbrace{({}_q r\cdot n)({}_q r\cdot n)\ldots({}_q r\cdot n)}_{\#({}_q r\cdot n)=m}n$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m และ n และสำหรับทุกจำนวนเศษเหลือ ${}_q r$

(2) รูปทั่วไปของพหุคูณที่ได้ตามทฤษฎีบท 4 นั้นสอดคล้องกับข้อสังเกตที่พบเมื่อแปลงเป็นจำนวนเศษเหลือ

จากบทความนี้และบทความอื่นๆ ที่ได้กล่าวถึงผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าผู้อ่านจะเห็นว่าจำนวนเศษเหลือมีประโยชน์อย่างมากสำหรับการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตต่างๆ ฉะนั้นหากผู้อ่านเริ่มทำการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตที่น่าสนใจของจำนวนเต็มเช่นเดียวกับบทความนี้ก็คาดว่าน่าจะได้สูตรสำหรับการคำนวณเช่นกันและสูตรที่ได้จากการศึกษาจะเป็นการช่วยเพิ่มความสะดวกในการคำนวณต่างๆ และนอกจากผลการศึกษาที่ได้รับแล้ว ผู้อ่านจะได้พบกับความสวยงามของรูปแบบทั่วไปและการพิสูจน์อีกด้วย

กิตติกรรมประกาศ

บทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย: Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA) ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่านสำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์

เอกสารอ้างอิง

1. อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2554. ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. *วารสารนเรศวรพะเยา* 4(2): 29-35.
2. ณัฐพงษ์ พรมวงษ์ และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2555. ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 (เลข 6) ยกเว้นหลักหน่วยเป็นเลข 4 (เลข 7). *วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏกาญจนบุรี* 1(1): 41-49.
3. แสงประทีป นนกระโทก และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2555. ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลบวกของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6. *วารสารวิทยาศาสตร์แห่งมหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบุรี* 9(1): 80-90.
4. อภิสิทธิ์ เมืองมา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2556. ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การนิยามจำนวนหลายหลักที่แต่ละหลักเป็นจำนวนเต็ม. *วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์* 8(2): 49-60.

5. ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2555. ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ. *วารสารนเรศวรพะเยา* 6(1): 25-30.
6. Clark, W. E. 2002. Elementary Number Theory. Department of Mathematics, University of South Florida. USA. Available from URL: http://shell.cas.usf.edu/~wclark/elem_num_th_book.pdf. 25 July 2012.

ได้รับบทความวันที่ 30 สิงหาคม 2556
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 11 ธันวาคม 2556