บทความวิชาการ

วิธีสร้างจัตุรัสกล

วงศกร เจริญพานิชเสรี*

บทคัดย่อ

จัตุรัสกล คือ ตารางขนาด $n \times n$ ที่ในแต่ละช่องของตารางมีตัวเลขใส่อยู่ โดยที่ผลรวมทั้งแนวนอน แนวตั้ง และแนวทแยงมีค่าเท่ากัน ในจัตุรัสกลปกติ จะบรรจุจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง n^2 หากไม่ได้กล่าวเป็นอย่างอื่น ให้หมายถึงถึงจัตุรัสกลปกติ และเรียกจัตุรัสกลปกติขนาด $n \times n$ ว่าจัตุรัสกลอันดับ n

ใน ค.ศ. 1942, Kraitchik ได้เสนอวิธีการสร้างจัตุรัสกลอันดับ n โดยใช้ 3 วิธีได้แก่ วิธีของชาวสยาม วิธีสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน และวิธี LUX ซึ่งสามารถใช้สร้างจัตุรัสกลอันดับ n เมื่อ $n = 2k + 1$, $4k$ และ $4k + 2$ สำหรับจำนวนนับ k ใดๆ ตามลำดับ

คำสำคัญ: จัตุรัสกล วิธี

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะเทคโนโลยีสารสนเทศ มหาวิทยาลัยรังสิต

*ผู้นิพนธ์ประสานงาน, e-mail: wongsakorn.c@su.ac.th

How to Build a Magic Square

Wongsakorn Charoenpanitseri*

ABSTRACT

Magic Square is a table of size $n \times n$ such that each box has a positive integer and the summation of each row, each column and each diagonal is the same. In normal magic square, the boxes contain all numbers from 1 to n^2. Unless we say otherwise, suppose that the magic squares are normal. A normal magic square of size $n \times n$ is called a magic square of order n.

In 1942, Kraitchik showed how to build a magic square of order n by 3 methods; siamese method, lozenge method and LUX method which can be applied to construct a magic square of order n when $n = 2k + 1$, $2k$ and $4k + 2$ for any positive integer k, respectively.

Keywords: magic square, method

Department of Mathematics, Faculty of Information Technology, Rangsit University

*Corresponding author, email: wongsakorn.c@rsu.ac.th

บทนำ

จัตุรัสกล (Magic Square) คือ ตารางขนาด $n \times n$ ที่แต่ละช่องของตารางมีตัวเลขใส่อยู่ โดยที่ผลรวมทั้งแนวนอน แนวตั้ง และแนวทแยงมีค่าเท่ากัน ผลรวมซึ่งมีค่าเท่ากันนี้เรียกว่า ค่าคงตัวกล (magic constant) ใช้สัญลักษณ์ $M(n)$ แทนค่าคงตัวกลของจัตุรัสกลปกติขนาด $n \times n$ ซึ่ง $M(n) = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$ [1-6]

ตัวอย่าง 1 จัตุรัสกลอันดับ 3, 4 และ 5

8	1	6
3	5	7
4	9	2

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

มีข้อสังเกตว่าจะสามารถสร้างจัตุรัสกลใหม่จากจัตุรัสกลเดิมได้อีก 7 รูป ด้วยการหมุนและการพลิกดังแสดงในตัวอย่างที่ 2

ตัวอย่าง 2 แสดงการสร้างจัตุรัสกลใหม่ 7 รูปจากรูปต้นแบบ

8	1	6
3	5	7
4	9	2

รูปต้นแบบ

4	3	8
9	5	1
2	7	6

หมุน 90° ตามเข็มนาฬิกา

2	9	4
7	5	3
6	1	8

หมุน 180° ตามเข็มนาฬิกา

6	7	2
1	5	9
8	3	4

หมุน 270° ตามเข็มนาฬิกา

6	1	8
7	5	3
2	9	4

สะท้อนตามขอบด้านขวาของตาราง

8	3	4
1	5	9
6	7	2

หมุน 90° ตามเข็มนาฬิกาและสะท้อนตามขอบด้านขวาของตาราง

4	9	2
3	5	7
8	1	6

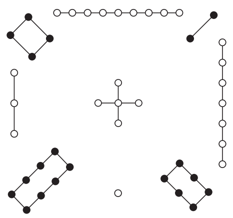
หมุน 180° ตามเข็มนาฬิกาและสะท้อนตามขอบด้านขวาของตาราง

2	7	6
9	5	1
4	3	8

หมุน 270° ตามเข็มนาฬิกาและสะท้อนตามขอบด้านขวาของตาราง

เรื่องเกี่ยวกับจัตุรัสกลนับได้ว่าเป็นเรื่องที่มีมาช้านาน มีเรื่องเล่าและตำนานในหลายประเทศที่เกี่ยวข้องกับจัตุรัสกล เริ่มตั้งแต่ 650 ปีก่อนคริสต์ศักราช เกิดน้ำท่วมใหญ่ในประเทศจีน ผู้คนจะนำข้าวของมาเซ่นไหว้บูชาเพื่อหวังที่จะให้เทพเจ้าลดความโกรธเกรี้ยว ด้วยชาวจีนในสมัยในนั้นเชื่อว่า ทุกสิ่งทุกอย่างมีเทพเจ้าเป็นผู้ดูแล และภัยพิบัติต่างๆ ที่เกิดขึ้นมีสาเหตุมากจากการบันดาลโทสะของเทพเจ้าเหล่านั้น โดยแม่น้ำสายใหญ่ที่เป็นสาเหตุของน้ำท่วมนั้น คือ แม่น้ำโล (Lo river) สิ่งที่ชาวจีนได้เลือกนำมาเซ่นไหว้ก็คือเต่า ซึ่งบนกระดองมีตารางขนาด ในแต่ละช่องของตารางมีจุดอยู่ โดยมีตั้งแต่ช่องที่มี 1 จุดจนถึง 9 จุด และเมื่อนับผลรวมจุดในแนวตั้งแนวนอน รวมทั้งเส้นทแยงมุมจะนับได้ 15 จุดเสมอ นี่จึงเป็นที่มาของตำนานที่เก่าแก่ที่สุดของจัตุรัสกล จัตุรัสกลนี้มีชื่อเรียกว่า Lo Shu Square

ตัวอย่าง 3 จัตุรัสกลอันดับ 3 ที่มีชื่อเรียกว่า Lo Shu Square



ชาวอาหรับรู้จักจัตุรัสกลเป็นอย่างดี เพราะเมื่อราวศตวรรษที่ 7 ชาวอาหรับได้มีการติดต่อค้าขายกับประเทศอินเดียและประเทศอื่นๆ แถวเอเชียใต้ จึงทำให้ชาวอาหรับได้ศึกษาคณิตศาสตร์และดาราศาสตร์ของชาวอินเดีย รวมไปถึงได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ในด้านคอมบินาทอริก ซึ่งชาวอินเดียได้เรียนรู้มาจากชาวจีน จนกระทั่งในปี ค.ศ. 983 สารานุกรมของเมืองแบกแดด ประเทศอิรัก ได้มีจัตุรัสกลอันดับ 5 และอันดับ 6 เกิดขึ้น และในราวปี ค.ศ. 1200 นักคณิตศาสตร์ชาวอาหรับชื่อ Ahmad al-Buni ได้มีการศึกษาเกี่ยวกับจัตุรัสกลอย่างจริงจัง แม้จะไม่ได้ผลลัพธ์ที่ดีพอจนน่ากล่าวถึง แต่ในช่วงนั้นก็เป็นครั้งแรกที่มีการประยุกต์ใช้จัตุรัสกลไปใช้ในการคำนวณทางดาราศาสตร์ จนกล่าวได้ว่าชาวอาหรับเป็นผู้ริเริ่มศึกษาจัตุรัสกลอย่างจริงจังนั่นเอง

ตัวอย่าง 4 จัตุรัสกลอันดับ 4 ซึ่งเชื่อว่ามีการค้นพบครั้งแรกในศิลปะของชาวยุโรป [7]

ปัจจุบันนี้ยังไม่มีใครสามารถตอบได้ว่าจัตุรัสกลอันดับ n จะมีจำนวนเท่าไร (จัตุรัสกลที่เกิดจากการหมุน การพลิก นับเป็นแบบเดียวกัน) มีเพียงคำตอบเมื่อ n มีค่าน้อย [7-8] ได้แก่ จัตุรัสกลอันดับ 1, 2, 3, 4 และ 5 มี 1, 0, 1, 880 และ 275,305,224 แบบ ตามลำดับ ส่วนจัตุรัสกลอันดับ 6 ยังคงเป็นปัญหาเปิด รู้เพียงว่าจัตุรัสกลอันดับ 6 มีประมาณ $1.7745 \pm 0.0016 \times 10^{19}$

นอกจากจัตุรัสกลปกติที่ได้กล่าวไปแล้ว ยังมีจัตุรัสกลอีกหลายประเภทคือ

1. Semimagic Square คือ จัตุรัสกลที่มีผลบวกในแนวตั้งและแนวนอนมีค่าเท่ากัน แต่มีผลบวกของแนวทแยง อาจมีค่าเท่าหรือไม่เท่ากับค่าคงตัวกลก็ได้

3	5	2
8	1	6
4	9	2

Semimagic Square อันดับ 3

2. Panmagic Square คือ จัตุรัสกลที่มีผลบวกในแนวตั้งและแนวนอน รวมทั้งแนวทแยงทั้งหมดมีค่าเท่ากัน โดยแนวทแยงนี้รวมถึงแนวทแยงที่เกิดจากการบิดแล้วนำมาต่อ ดังนั้น ตารางขนาด $n \times n$ จะมีแนวทแยงทั้งหมด $2n$ เส้น รูปด้านล่างแสดงตัวอย่าง Panmagic Square อันดับ 5 ซึ่งเป็นขนาดที่เล็กที่สุดที่เป็นไปได้ของจัตุรัสกลชนิดนี้

25	11	2	18	9
3	19	10	21	12
6	22	13	4	20
14	5	16	7	23
17	8	24	15	1

Panmagic Square อันดับ 5

3. Bimagic Square คือ จัตุรัสกลที่แทนที่ตัวเลขเดิมในแต่ละช่องของตารางด้วยกำลังสองของจำนวนเก่า แล้วตารางใหม่ที่ได้ยังคงเป็นจัตุรัสกลด้วย

16	41	36	5	27	62	55	18
26	63	54	19	13	44	33	8
1	40	45	12	22	51	58	31
23	50	59	30	4	37	48	9
38	3	10	47	49	24	29	60
52	21	32	57	39	2	11	46
43	14	7	34	64	25	20	53
61	28	17	56	42	15	6	35

Bimagic Square อันดับ 8 [9]

4. Trimagic Square คือ จัตุรัสกลที่แทนที่ตัวเลขเดิมในแต่ละช่องของตารางด้วยกำลังสองของจำนวนเก่า แล้วตารางใหม่ที่ได้ยังคงเป็นจัตุรัสกล และเมื่อแทนที่ตัวเลขเดิมในแต่ละช่องของตารางด้วยกำลังสามของจำนวนเก่า แล้วตารางใหม่ที่ได้ยังคงเป็นจัตุรัสกลเช่นกัน

1	22	33	41	62	66	79	83	104	112	123	144
9	119	45	115	107	93	52	38	30	100	26	136
75	141	35	48	57	14	131	88	97	110	4	70
74	8	106	49	12	43	102	133	96	39	137	71
140	101	124	42	60	37	108	85	103	21	44	5
122	76	142	86	67	126	19	78	59	3	69	23
55	27	95	135	130	89	56	15	10	50	118	90
132	117	68	91	11	99	46	134	54	77	28	13
73	64	2	121	109	32	113	36	24	143	81	72
58	98	84	116	138	16	129	7	29	61	47	87
80	34	105	6	92	127	18	53	139	40	111	65
51	63	31	20	25	128	17	120	125	114	82	94

Trimagic Square อันดับ 12 [9]

5. Associative Magic Square คือ จัตุรัสกลอันดับ n ที่ผลรวมของตัวเลขตรงกันข้ามเทียบกับจุดศูนย์กลางตารางมีค่าเท่ากับ n^2+1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Associative Magic Square อันดับ 4

6. Multiplication Magic Square คือ จัตุรัสกลอันดับ n ที่ผลคูณ ทั้งแนวนอน แนวตั้ง และแนวทแยงมีค่าเท่ากัน (ผลบวกไม่จำเป็นต้องเท่ากัน)

18	1	12
4	6	9
3	36	2

Multiplication Magic Square อันดับ 3

7. Addition-Multiplication Magic Square คือ ตารางขนาด $n \times n$ ที่ผลรวมทั้งแนวนอน แนวตั้ง และแนวทแยง มีค่าเท่ากัน และผลคูณทั้งแนวนอน แนวตั้ง และแนวทแยงมีค่าเท่ากันด้วย (แต่ไม่จำเป็นต้องเท่ากับผลรวม)

39	34	138	243	100	29	105	152
116	25	133	120	51	26	162	207
119	104	108	23	174	225	57	30
150	261	45	38	91	136	92	27
135	114	50	87	184	189	13	68
216	161	17	52	171	90	58	75
19	60	232	175	54	69	153	78
46	81	117	102	15	76	200	203

Addition-Multiplication Magic Square อันดับ 8 [10]

ในปี ค.ศ. 1942 Kraitchik [6] ได้นำเสนอวิธีการสร้างจัตุรัสกลอันดับใดๆ ขึ้นมา โดยใช้วิธีสร้าง 3 วิธี ได้แก่

1. วิธีของชาวสยาม (Siamese method) สำหรับจัตุกลอันดับ n เมื่อ $n = 2k + 1$
2. วิธีสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน (Lozenge method) สำหรับจัตุกลอันดับ n เมื่อ $n = 4k$
3. วิธี LUX (LUX method) สำหรับจัตุรัสกลอันดับ n เมื่อ $n = 4k + 2$

วิธีของชาวสยาม (Siamese method)

ใช้สำหรับสร้างจัตุรัสกลอันดับคี่ (odd order) วิธีทำ คือ จะใส่ตัวเลข 1, 2, 3,..., n^2 ลงในตารางเรียงตามลำดับ เริ่มต้นที่ใส่หมายตัวเลข 1 ลงในช่องใดก็ได้ และใส่หมายตัวเลขถัดไปตามเงื่อนไขดังนี้

1. ถ้าช่องขวาบนที่ติดกันว่าง ให้ใส่ตัวเลขถัดไปที่ช่องนั้น
2. ถ้าช่องขวาบนที่ติดกันไม่ว่าง หรือช่องเดิมเป็นช่องมุมขวาสุด บนสุด ให้ใส่ตัวเลขลงในคอลัมน์เดิม แต่แถวถัดลงมา 1 แถว
3. ถ้าช่องขวาบนอยู่นอกตารางด้านบนให้ใส่ตัวเลขลงในแถวล่างสุดของคอลัมน์นั้น
4. ถ้าช่องขวาบนอยู่นอกตารางด้านขวาให้ใส่ตัวเลขลงในคอลัมน์ซ้ายสุดของแถวนั้น

มีข้อสังเกตว่าการเริ่มต้นใส่ตัวเลข 1 ในบางช่องของตารางอาจจะไม่สามารถสร้างจัตุรัสกลได้ เพราะเมื่อใส่ถึงตัวเลขหนึ่งจะไม่สามารถใส่ช่องถัดไปตามเงื่อนไขได้

ตัวอย่าง 5 การสร้างจัตุรัสกลอันดับ 3 ด้วยวิธีของชาวสยาม

	1	
	d	
4	9	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

ตัวอย่าง 6 วิธีสร้างจัตุรัสกลอันดับ 5 ด้วยวิธีของชาวสยาม

		1		
	5			
4				
				3
			2	

		1	8	
	5	7		
4	6			
10				3
			2	9

		1	8	15
	5	7	14	
4	6	13		
10	12			3
11			2	9

17		1	8	15
	5	7	14	16
4	6	13	20	
10	12	19		3
11	18		2	9

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

ตัวอย่าง 7 วิธีสร้างจัตุรัสกลอันดับ 9 ด้วยวิธีของชาวสยาม

47	58	69	80	1	12	23	34	45
57	68	79	9	11	22	33	44	46
67	78	8	10	21	32	43	54	56
77	7	18	20	31	42	53	55	66
6	17	19	30	41	52	63	65	76
16	27	29	40	51	62	64	75	5
26	28	39	50	61	72	74	4	15
36	38	49	60	71	73	3	14	25
37	48	59	70	81	2	13	24	35

9	20	31	42					7
19	30	41					6	8
29	40					5	16	18
39					4	15	17	28
				3	14	25	27	38
			2	13	24	26	37	
		1	12	23	34	36		
		11	22	33	35			
	10	21	32	43				

จากตัวอย่างที่ 6 รูปด้านซ้ายจะสามารถใส่ตัวเลขได้จนครบ และได้ผลลัพธ์เป็นจัตุรัสกลอันดับ 9 โดยมีค่าคงที่กลเท่ากับ 378 ส่วนตารางด้านขวาสามารถใส่ตัวเลขได้จนถึง 43 เท่านั้น

ตัวอย่าง 8 วิธีการสร้างจัตุรัสกลอันดับ 15 ด้วยวิธีของชาวสยาม

122	139	156	173	190	207	224	1	18	35	52	69	86	103	120
138	155	172	189	206	223	15	17	34	51	68	85	102	119	121
154	171	188	205	222	14	16	33	50	67	84	101	118	135	137
170	187	204	221	13	30	32	49	66	83	100	117	134	136	153
186	203	220	12	29	31	48	65	82	99	116	133	150	152	169
202	219	11	28	45	47	64	81	98	115	132	149	151	168	185
218	10	27	44	46	63	80	97	114	131	148	165	167	184	201
9	26	43	60	62	79	96	113	130	147	164	166	183	200	217
25	42	59	61	78	95	112	129	146	163	180	182	199	216	8
41	58	75	77	94	111	128	145	162	179	181	198	215	7	24
57	74	76	93	110	127	144	161	178	195	197	214	6	23	40
73	90	92	109	126	143	160	177	194	196	213	5	22	39	56
89	91	108	125	142	159	176	193	210	212	4	21	38	55	72
105	107	124	141	158	175	192	209	211	3	20	37	54	71	88
106	123	140	157	174	191	208	225	2	19	36	53	70	87	104

วิธีสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน (Lozenge method)

ใช้สำหรับสร้างจัตุรัสกลอันดับ n เมื่อ $n = 4k$ คือ วิธีนี้ใช้ในการสร้างจัตุรัสกลอันดับ 4, 8, 12,... หรือแม้กระทั่งจัตุรัสกลอันดับ 100 ก็สามารถสร้างได้ โดยต้องมีความพยายามในการเขียนตัวเลขถึง 10,000 ตัว วิธีสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีขั้นตอนการสร้าง ดังนี้

ขั้นที่ 1 สร้างตารางขนาด $n \times n$ โดยที่ 4 หาร n ลงตัว พร้อมทั้งใส่ตัวเลขตั้งแต่ 1 ถึง n^2 ลงในตารางอย่างมีลำดับ ดังนี้

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

ขั้นที่ 2 ลากเส้นทแยงมุม (โดยไม่ได้หมายถึงการลากเส้นทแยงมุมตามปกติ)

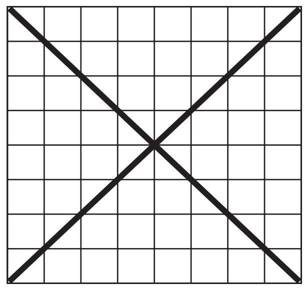
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

ขั้นที่ 3 สำหรับช่องที่มีเส้นลากทับให้นำตัวเลขใหม่มาใส่ โดยตัวเลขที่นำมาใส่จะเท่ากับ n^2+1 หักออกด้วยค่าเดิมในช่องนั้น

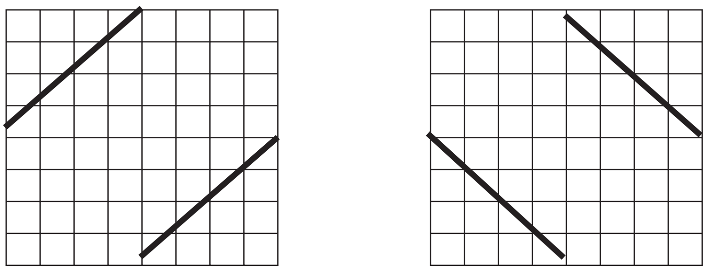
16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

เมื่อทำครบทั้ง 3 ขั้นตอนจะได้จัตุรัสกลปกติชนิด Associative Magic Square คือ ผลรวมของตัวเลขที่อยู่ตรงข้ามกันจะมีค่าเท่ากับ n^2+1

หากต้องการสร้างจัตุรัสกลอันดับ n ต้องลากเส้นทแยง $\frac{n}{2}$ เส้น นั่นคือถ้าต้องการสร้างจัตุรัสกลอันดับ 8 จะต้องลากเส้นทแยงมุม 4 เส้น โดย 2 เส้นจะเป็นเส้นทแยงมุมหลัก



ส่วนอีก 2 เส้นที่ต้องลากในการสร้างจัตุรัสกลขนาด 8×8 คือ



เส้นทแยงมุมในตารางข้างต้นจัดว่าเป็นทแยงมุมเส้นเดียวกัน ถึงแม้จะไม่ได้ต่อกัน เพราะเราคิดความยาวเส้นทแยงมุมของตารางนี้ต้องเป็นผลรวมของความยาวเส้นทแยงมุม 8 ช่อง เราจึงคิดในลักษณะม้วนตารางมาต่อ (นำด้านบนมาต่อด้านล่าง หรือนำด้านซ้ายไปต่อด้านขวา) แล้วจึงลากเส้นทแยงมุมต่อกัน ข้อสังเกตที่ทำให้รู้ว่าลากเส้นทแยงมุมถูกต้องแล้ว คือ ให้สังเกตว่าหลังจากลากเส้นทแยงมุมครบหมดแล้ว ในแต่ละแถว แต่ละหลัก จะมีจำนวนช่องครึ่งหนึ่งของจำนวนช่องทั้งหมดที่มีเส้นทแยงมุมลากทับ และอีกครึ่งหนึ่งไม่มีเส้นทแยงมุมลากทับ

ตัวอย่าง 9 วิธีสร้างจัตุรัสกลอันดับ 8 ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

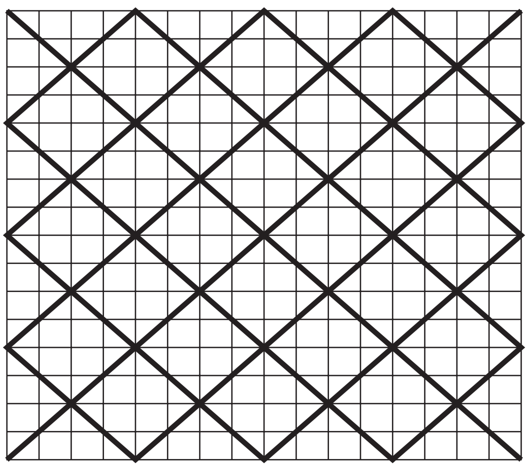
64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	63	63	1

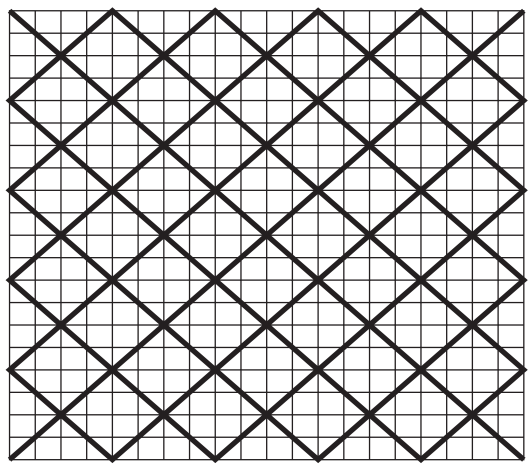
ตัวอย่าง 10 วิธีสร้างจัตุรัสกลอันดับ 12 ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

144	2	3	141	140	6	7	137	136	10	11	133
13	133	130	16	17	127	126	20	21	123	122	24
25	119	118	28	29	115	114	32	33	111	110	36
108	38	39	105	104	42	43	101	100	46	47	97
96	50	51	93	92	54	55	89	88	58	59	85
61	83	82	64	65	79	78	68	69	75	74	72
73	71	70	76	77	67	66	80	81	63	62	84
60	86	87	57	56	90	91	53	52	94	95	49
48	98	99	45	44	102	103	41	40	106	107	37
109	35	34	112	113	31	30	116	117	27	26	120
121	23	22	124	125	19	18	128	129	15	14	132
12	134	135	9	8	138	139	5	4	142	143	1

ตัวอย่าง 11 วิธีการลากเส้นทแยงมุมทั้งหมดเพื่อนำไปสร้างจัตุรัสกลอันดับ 16 และ 20 ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน





วิธี LUX (LUX method)

ใช้สำหรับสร้างจัตุรัสกลอันดับ n เมื่อ $n = 4k + 2$ เมื่อ $k \geq 1$ (ไม่มีจัตุรัสกลอันดับ 2) วิธีนี้คิดค้นโดย J. H. Conway มีขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 สร้างลำดับที่มีความยาว $2k + 1$ ทั้งหมด $2k + 1$ แถว ดังนี้

1) k แถวแรก คือ มีสมาชิกเป็น L ทั้งหมด
2) 1 แถวถัดมามีสมาชิกเป็น L ทั้งหมด ยกเว้นตัวตัวกลางเป็น U
3) 1 แถวถัดมามีสมาชิกเป็น U ทั้งหมด ยกเว้นตัวตัวกลางเป็น L
4) k-1 แถวสุดท้ายเป็น X ทั้งหมด

ตัวอย่าง 12 ขั้นตอนการใส่ตัวอักษร L U X ลงในตารางขนาด 5×5 เพื่อเตรียมสร้างจัตุรัสกลอันดับ 10

LLLLL
LLLLL
LLULL
UULUU
XXXXX

L	L	L	L	L
L	L	L	L	L
L	L	U	L	L
U	U	L	U	U
X	X	X	X	X

ขั้นที่ 2 สร้างจัตุรัสกลอันดับ $2k+1$ ด้วยวิธีของชาวสยาม

ตัวอย่าง 13 สร้างจัตุรัสกลอันดับ 5 ด้วยวิธีของชาวสยาม เพื่อใช้สำหรับสร้างจัตุรัสกลอันดับ 10

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

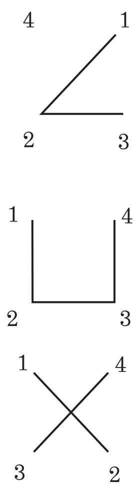
ขั้นที่ 3 แบ่งตารางแต่ละช่องออกเป็นตารางย่อยขนาด 2×2 สังเกตว่าจากข้อ 1 และข้อ 2 ที่มีตารางขนาด $(2k+1) \times (2k+1)$ จะกลายเป็นตารางขนาด $(4k+2) \times (4k+2)$

ขั้นที่ 4 จากช่องในตารางขนาด $(2k+1) \times (2k+1)$ ที่ใส่ตัวเลข A ซึ่งถูกแบ่งออกเป็น 4 ช่องย่อย ใน 4 ช่องย่อยนั้นใส่ตัวเลข $4A$-3, $4A$-2, $4A$-1 และ $4A$ โดยมีวิธีใส่ทั้ง 4 ช่องตามรูปร่างของ L หรือ U หรือ X ขึ้นอยู่กับว่าตรงกับตัวอักษรใดในขั้นตอนที่ 1

ตัวอย่าง 14 การสร้างจัตุรัสกลอันดับ 10 ด้วยวิธี LUX

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

L	L	L	L	L
L	L	L	L	L
L	L	U	L	L
U	U	L	U	U
X	X	X	X	X



68	65	96	93	4	1	32	29	60	57
66	67	94	95	2	3	30	31	58	59
92	89	20	17	28	25	56	53	64	61
90	91	18	19	26	27	54	55	62	63
16	13	24	21	49	52	80	77	88	85
14	15	22	23	50	51	78	79	86	87
37	40	45	48	76	73	81	84	9	12
38	39	46	47	74	75	82	83	10	11
41	44	69	72	97	100	5	8	33	36
43	42	71	70	99	98	7	6	35	34

ตัวอย่าง 15 แสดงการสร้างจัตุรัสกลอันดับ 6 ด้วยวิธี LUX อย่างละเอียด

L	L	L
L	U	L
U	L	U

7	1	6
3	5	9
4	8	2

		4	1		
		2	3		

		4	1		
		2	3		
				5	8
				6	7

		4	1		
		2	3		
11	9				
10	12				
				5	8
				6	7

		4	1	24	21
		2	3	22	23
11	9	17	20		
10	11	18	19		
13	16			5	8
14	15			6	7

		4	1		
		2	3		
11	9	17	20		
10	11	18	19		
13	16			5	8
14	15			6	7

		4	1		
		2	3		
11	9				
10	11				
13	16			5	8
14	15			6	7

		4	1	24	21
		2	3	22	23
11	9	17	20	28	25
10	11	18	19	26	27
13	16			5	8
14	15			6	7

32	29	4	1	24	21
30	31	2	3	22	23
11	9	17	20	28	25
10	11	18	19	26	27
13	16			5	8
14	15			6	7

32	29	4	1	24	21
30	31	2	3	22	23
11	9	17	20	28	25
10	11	18	19	26	27
13	16	33	36	5	8
14	15	34	35	6	7

ตัวอย่าง 16 แสดงการสร้างจัตุรัสกลอันดับ 14 ด้วยวิธี LUX

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

L	L	L	L	L	L	L
L	L	L	L	L	L	L
L	L	L	L	L	L	L
L	L	L	U	L	L	L
U	U	U	L	U	U	U
X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X

120	117	156	153	192	189	4	1	40	37	76	73	112	109
118	119	154	155	190	191	2	3	38	39	74	75	110	111
152	149	188	185	28	25	36	33	72	69	108	105	116	113
150	151	186	187	26	27	34	35	70	71	106	107	114	115
184	181	24	21	32	29	68	65	104	101	140	137	148	145
182	183	22	23	30	31	66	67	102	103	138	139	146	147
20	17	56	53	64	61	97	100	136	133	144	141	180	177
18	19	54	55	62	63	98	99	134	135	142	143	178	179
49	52	57	60	93	96	132	129	165	168	173	176	13	16
50	51	58	59	94	95	130	131	166	167	174	175	14	15
81	84	89	92	125	128	161	164	169	172	9	12	45	48
83	82	91	90	127	126	163	162	171	170	11	10	47	46
85	88	121	124	157	160	193	196	5	8	41	44	77	80
87	86	123	122	159	158	195	194	7	6	43	42	79	78

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณผู้ประเมินบทความที่ได้ให้คำแนะนำอันมีค่า ทำให้สามารถปรับปรุงบทความวิชาการนี้ให้ดีขึ้น และขอขอบคุณมหาวิทยาลัยรังสิตที่ได้มีการสนับสนุนให้บุคลากรสร้างผลงานทางวิชาการอย่างต่อเนื่อง

เอกสารอ้างอิง

1. Andrews, W. S. 1960. Magic Squares and Cubes. 2nd Edition. New York. Dover.
2. Gardner, M. 1961. Magic Squares: The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions. New York. Simon and Schuster. p. 130-140.
3. Ball, W. W. R., and Coxeter, H. S. M. 1987. Magic Squares: Mathematical Recreations and Essays. 13th Edition New York. Dover.
4. Benson, W. H., and Jacoby, O. 1976. New recreations with Magic Squares. New York. Dover.
5. Kraitchik, M. 1942. Magic Squares. Mathematical Recreations. New York. Norton. p. 142-192.
6. Madachy, J. S. 1979. Magic and Antimagic Squares: Madachy's mathematical Recreations. New York. Dover. p. 85-113.
7. Wikipedia. 2013. Magic Square. Available from URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square. 9 September 2013.
8. Auzout, A., Frénicle, B., Huygens, C., Mariotte, E., Picard, J., Personne, G., Romer, O. C. and Torricelli, E. 1693. Divers ouvrages de mathematique et de physique. France. Imprimerie Royale.
9. Weisstein, E. W. 2013. Multimagic square. Available from URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Multimagic_square. 9 September 2013.
10. Horner, W. W. 1955. Addition-Multiplication Magic Square of Order 8. *Scripta Mathematica* 21: 23-27.

ได้รับบทความวันที่ 10 มิถุนายน 2556
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 19 กันยายน 2556