บทความวิจัย

ตัวแบบ EOQ ที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่องและสินค้ามีราคาสูงขึ้นที่ได้มาโดยพีชคณิต

คณินทร์ ธีรภาพโอฬาร* และ วิรณชัย พุ่มสุข

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ เราใช้วิธีพีชคณิตที่นำเสนอโดย Grubbström และ Erdem [2] และ Cárdenas-Barrón [3] หาตัวแบบ EOQ เหมาะที่สุดที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่องและสินค้ามีราคาสูงขึ้นด้วยการเปลี่ยนแปลงอัตราการเพิ่มสินค้าแบบอนันต์ของสมมุติฐานของตัวแบบใน Naddor [4] เป็นแบบต่อเนื่อง สุดท้ายเราได้ยกตัวอย่างเชิงตัวเลขเพื่อแสดงการประยุกต์ของตัวแบบ EOQ ที่ได้

คำสำคัญ: ตัวแบบ EOQ อัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่อง สินค้ามีราคาสูงขึ้น วิธีพีชคณิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

*ผู้นิพนธ์ประสานงาน, email: kanint@buu.ac.th

The EOQ Model with Continuous Replenishment Rate and Price Increases Derived Algebraically

Kanint Teerapabolarn* and Wironchai Pomsuk

ABSTRACT

In this article, we use algebraic method proposed by Grubbström and Erdem [2] and Cárdenas-Barrón [3] to determine the optimal EOQ model with continuous replenishment rate and price increases, by changing infinite replenishment rate of the model assumption in Naddor [4] to be continuous replenishment rate. Finally, we give numerical examples to illustrate applications of the model obtained.

Keywords: EOQ model, continuous replenishment rate, price increases, algebraic method

Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University

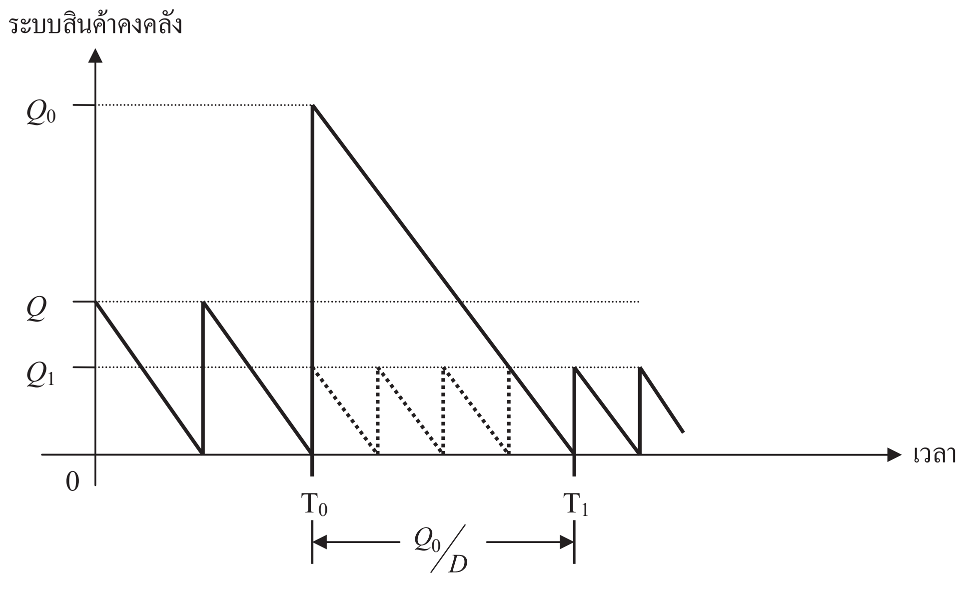
*Corresponding author, email: kanint@buu.ac.th

บทนำ

ตัวแบบแรกของปัญหาระบบสินค้าคงคลังที่รู้จักกัน คือ ตัวแบบ EOQ (Economic Order Quantity) ของ Harris [1] ซึ่งเป็นตัวแบบพื้นฐานที่นำไปสู่การพัฒนาและปรับปรุงตัวแบบอื่นๆ ให้มีความเหมาะสมและสอดคล้องกับความเป็นจริงของระบบสินค้าคงคลังมากขึ้น เช่น ตัวแบบ EOQ ที่มีการขาดแคลนสินค้า ตัวแบบ EOQ ที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่อง ตัวแบบ EOQ ที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่องและมีการขาดแคลนสินค้า เป็นต้น ตัวแบบทั้งหมดที่กล่าวมานี้สามารถหาได้ด้วยวิธีแบบฉบับ (classical method) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ (differential calculus) ภายใต้เงื่อนไขที่จำเป็นและพอเพียง (พิจารณาจากอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและอันดับที่สอง) นอกจากการใช้วิธีแบบฉบับ (แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์) ในการหาตัวแบบที่ต้องการแล้ว เรายังพบว่าตัวแบบเหล่านี้สามารถหามาได้โดยวิธีอื่นๆ ที่ไม่ต้องใช้แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ และวิธีหนึ่งที่ง่ายและใช้กันมาก คือ วิธีพีชคณิตที่นำเสนอโดย Grubbström and Erdem [2] และ Cárdenas-Barrón [3]

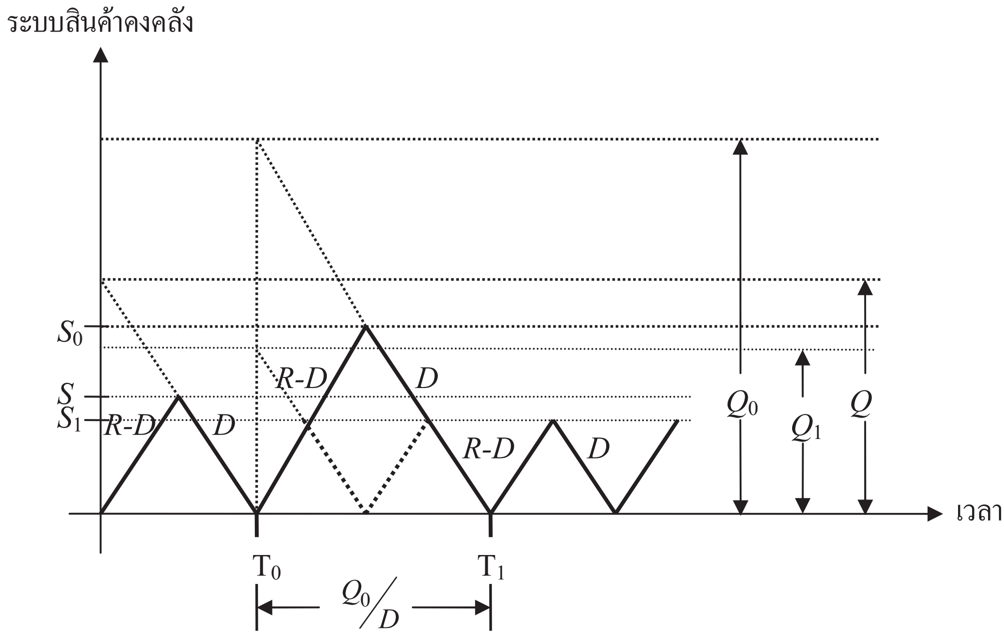
สำหรับตัวแบบ EOQ ที่มีการศึกษากันมากอีกตัวแบบหนึ่ง คือ ตัวแบบ EOQ พื้นฐานที่ยอมให้ราคาสินค้ามีการเปลี่ยนแปลง นั่นคือ ยอมให้สินค้ามีราคาสูงขึ้น ซึ่งพัฒนาขึ้นมาโดย Naddor [4] และมักเรียกตัวแบบนี้ว่าตัวแบบของ Naddor (Taylor and Bradley [5]) ต่อจากนั้นเป็นต้นมา มีนักวิจัยจำนวนมากได้พัฒนาและปรับเปลี่ยนตัวแบบของ Naddor [4] ให้สอดคล้องกับความเป็นจริงของระบบสินค้าคงคลังมากขึ้น [5-15] และในงานวิจัยปัจจุบัน Teerapabolarn and Khamrod [16] ได้ใช้วิธีพีชคณิตหาตัวแบบ EOQ ที่มีการขาดแคลนสินค้าและสินค้ามีราคาสูงขึ้น

พิจารณาระบบสินค้าคงคลังใน Naddor [4] ซึ่งสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 แสดงการเปลี่ยนแปลงของระบบสินค้าคงคลังเมื่อสินค้ามีราคาสูงขึ้น

เมื่อ Q_0 คือ ปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น Q คือ ปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบปกติก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น Q_1 คือ ปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบปกติหลังสินค้ามีราคาสูงขึ้น D คือ อัตราความต้องการสินค้าต่อหน่วยเวลา T_0 คือ จุดเวลาก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น และ T_1 คือ จุดเวลาสุดท้ายของช่วงเวลาที่มีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษ รายละเอียดของตัวแบบนี้สามารถหาอ่านได้ใน Teerapabolarn and Khamrod [16] เพื่อให้ตัวแบบนี้สามารถใช้ได้กับกรณีที่ระบบสินค้าคงคลังมีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่อง เราจะต้องปรับตัวแบบนี้โดยเปลี่ยนแปลงสมมุติฐานของตัวแบบจากอัตราการเพิ่มสินค้าเป็นอนันต์เป็นแบบต่อเนื่อง ซึ่งทำให้ตัวแบบมีความสอดคล้องกับระบบจริงมากขึ้น ระบบสินค้าคงคลังในการศึกษาครั้งนี้สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 แสดงการเปลี่ยนแปลงของระบบสินค้าคงคลังที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่องและสินค้ามีราคาสูงขึ้น

เมื่อ Q_0, Q, Q_1, D, T_0 และ T_1 มีความหมายเช่นเดียวกับในรูปที่ 1 R คือ อัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่อง S_0 คือ ระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น S คือ ระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบปกติก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น S_1 คือ ระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบปกติหลังสินค้ามีราคาสูงขึ้น Q_0 คือ ปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น ในการหาตัวแบบ EOQ สำหรับกรณีนี้ (Q_0^*) เราจะใช้วิธีพีชคณิตที่นำเสนอโดย Grubbstrom and Erdem [2] และ Cardenas-Barron [3] ภายใต้เงื่อนไขที่ทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นได้สูงสุด

วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

เพื่อหาตัวแบบ EOQ ที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่องและสินค้ามีราคาสูงขึ้นโดยใช้วิธีพีชคณิต

สมมุติฐานของตัวแบบ (model assumptions)

ตัวแบบ EOQ ที่สนใจศึกษาในครั้งนี้ คือ ตัวแบบ EOQ ที่มีการขาดแคลนสินค้าและสินค้ามีราคาสูงขึ้น ซึ่งมีสมมุติฐานดังนี้

1. ความต้องการสินค้าต่อหน่วยเวลามีค่าคงตัว และทราบค่าแน่นอน
2. ระยะเวลาระหว่างการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าจนได้รับสินค้า หรือช่วงเวลานำ (lead time) มีค่าเท่ากับศูนย์
3. การได้รับสินค้าที่สั่งซื้อหรือผลิตจะไม่ได้รับทีเดียวทั้งหมดทันทีที่สั่งซื้อหรือผลิตสินค้า แต่จะได้รับสินค้าในอัตราคงตัวต่อเนื่องจบครบตามปริมาณที่สั่งซื้อหรือผลิตสินค้า
4. จะทำการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าเมื่อระดับสินค้าคงคลังลดลงมาเท่ากับจุดสั่งซื้อหรือเท่ากับจุดที่กำหนด
5. ปริมาณสินค้าที่สั่งซื้อหรือผลิตแต่ละครั้งมีค่าคงตัว
6. ราคาสินค้าต่อหน่วยไม่คงตัวตลอดเวลา
7. ระบบสินค้าคงคลังจะดำเนินไปเรื่อยๆ อย่างต่อเนื่องไม่สิ้นสุด
8. ไม่ยอมให้มีการขาดแคลนสินค้า หรือระดับสินค้าคงคลังต่ำกว่าศูนย์

สัญกรณ์ของตัวแบบ (model notation)

สัญกรณ์ที่ใช้ในการศึกษาตัวแบบ EOQ ที่มีการขาดแคลนสินค้าและสินค้ามีราคาสูงขึ้นมีดังนี้

D แทนอัตราความต้องการสินค้าต่อหน่วยเวลา

R แทนอัตราการเพิ่มของสินค้าต่อหน่วยเวลา

A แทนค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อหรือค่าใช้จ่ายในการเตรียมการผลิตสินค้า

c แทนราคาสินค้าที่สั่งซื้อหรือผลิตต่อหน่วยเวลา

i แทนค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าที่แปรไปตามราคาสินค้า

k แทนผลต่างของราคาสินค้าที่สูงขึ้นและราคาสินค้าเดิม

Q แทนปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบปกติก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น

Q^* แทนปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบปกติเหมาะที่สุดก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น

Q_1 แทนปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบปกติหลังสินค้ามีราคาสูงขึ้น

Q_1^* แทนปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบปกติเหมาะที่สุดหลังสินค้ามีราคาสูงขึ้น

S แทนระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบปกติก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น

S^* แทนระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบปกติเหมาะที่สุดก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น

S_1 แทนระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบปกติหลังสินค้ามีราคาสูงขึ้น

S_1^* แทนระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบปกติเหมาะที่สุดหลังสินค้ามีราคาสูงขึ้น

S_0 แทนระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น

S_0^* แทนระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น

Q_0 แทนปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น

Q_0^* แทนปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น

C_0 แทนค่าใช้จ่ายรวมเมื่อมีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษ

C_1 แทนค่าใช้จ่ายรวมเมื่อไม่มีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษ

G^* แทนค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุด

วิธีดำเนินการวิจัย

การศึกษาตัวแบบ EOQ ที่มีการขาดแคลนสินค้าและสินค้ามีราคาสูงขึ้นสามารถแบ่งการศึกษาออกเป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

1. ศึกษารายละเอียดของระบบสินค้าคงคลังใน Naddor [4] และศึกษาการหาตัวแบบในงานวิจัยของ Grubbström and Erdem [2] และ Cárdenas-Barrón [3]

2. หาปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าเหมาะที่สุด หรือหาตัวแบบ EOQ ของระบบสินค้าคงคลังที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่องและสินค้ามีราคาสูงขึ้น โดยใช้วิธีพีชคณิต

3. ยกตัวอย่างเชิงตัวเลขเพื่อแสดงการประยุกต์ของตัวแบบ EOQ ที่ได้ในขั้นตอนที่ 2

และวิธีที่จะใช้หาตัวแบบ EOQ ในการศึกษาครั้งนี้ คือ วิธีพีชคณิตในงานวิจัยของ Grubbström and Erdem [2] และ Cárdenas-Barrón [3] หลักการของวิธีนี้ คือ ใช้พีชคณิตจัดรูปแบบของค่าใช้จ่ายในระบบสินค้าคงคลังที่สนใจให้อยู่ในรูปแบบกำลังสอง (quadratic form) ของปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าเพื่อทำให้ค่าใช้จ่ายมีค่าต่ำสุด หรือทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายได้สูงสุด

ผลการวิจัย

ผลลัพธ์ที่เราต้องการหา คือ ปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าเหมาะที่สุดของระบบสินค้าคงคลังที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่องและสินค้ามีราคาสูงขึ้น หรือหาตัวแบบ EOQ ที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่องและสินค้ามีราคาสูงขึ้นโดยใช้วิธีพีชคณิต ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1. สำหรับ $Q_1^* = \sqrt{\dfrac{2ARD}{i(c+k)(R-D)}}$ แล้วจะได้ว่าปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น คือ

$$Q_0^* = \frac{RD}{ic(R-D)}\left(k+\frac{2A}{Q_1^*}\right) \tag{1}$$

ระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น คือ

$$S_0^* = \frac{D}{ic}\left(k+\frac{2A}{Q_1^*}\right) \tag{2}$$

และค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุด คือ

$$G^* = \frac{RD}{2ic(R-D)}\left(k+\frac{2A}{Q_1^*}\right)^2 - A \tag{3}$$

พิสูจน์ พิจารณาระบบสินค้าคงคลังในรูปที่ 2 เมื่อราคาสินค้ามีการปรับราคาจาก c บาทต่อหน่วย เป็น $c + k$ บาทต่อหน่วย ซึ่งการปรับราคาสินค้าให้มีราคาสูงขึ้นจะเกิดขึ้น ณ เวลา T_0 ซึ่งถ้าไม่มีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษก่อนเวลา T_0 เมื่อทำการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าในภายหลัง ราคาสินค้าต่อหน่วยจะสูงขึ้นและปริมาณสินค้าที่ได้จะมีค่าลดลงกว่าเดิม ซึ่งจะเห็นได้ว่าก่อนเวลา T_0 เราสามารถจัดหาสินค้าเหมาะที่สุดด้วยราคา c บาทต่อหน่วยในปริมาณ Q^* หน่วย ได้เป็น

$$Q^* = \sqrt{\frac{2ARD}{ic(R-D)}} \tag{4}$$

แต่เมื่อจัดหาสินค้าเหมาะที่สุดหลังเวลา T_0 ในปริมาณ Q_1^* หน่วย จะได้

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2ARD}{i(c+k)(R-D)}} \tag{5}$$

จะเห็นว่าค่าของ Q^* มากกว่าค่าของ Q_1^* แสดงว่าเมื่อสินค้ามีราคาสูงขึ้นปริมาณการสั่งซื้อหรือปริมาณการผลิตสินค้าเหมาะที่สุดจะมีค่าลดลง ถ้ามีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษก่อนถึงเวลา T_0 ในปริมาณ Q_0 หน่วย ($Q_0 > 0$) ดังรูปที่ 2 ค่าใช้จ่ายรวมในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 สามารถพิจารณาได้ดังนี้

ค่าใช้จ่ายที่เกิดจากการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าในปริมาณ Q_0 หน่วยมีค่าเท่ากับ

$$A + cQ_0$$

ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาที่แปรไปตามราคาสินค้ามีค่าเท่ากับ

$$ic\int_0^{\frac{S_0}{R-D}}(R-D)xdx+ic\int_0^{\frac{S_0}{D}}(S_0-Dx)dx = ic\left[\frac{(R-D)x^2}{2}\right]_0^{\frac{S_0}{R-D}}+ic\left[S_0x-\frac{Dx^2}{2}\right]_0^{\frac{S_0}{D}}$$

$$= ic\left[\frac{S_0^2}{2(R-D)}\right]+ic\left[\frac{S_0^2}{D}-\frac{S_0^2}{2D}\right]$$

$$= ic\left[\frac{S_0^2}{2(R-D)}\right]+ic\left[\frac{S_0^2}{2D}\right]$$

$$= ic\left[\frac{S_0^2}{2(R-D)}+\frac{S_0^2}{2D}\right]$$

$$= ic\left[\frac{RS_0^2}{2(R-D)D}\right] \qquad (6)$$

จาก $Q_0 = D\left(\frac{S_0}{R-D}+\frac{S_0}{D}\right)=\frac{RS_0}{R-D}$ ดังนั้น

$$S_0 = \frac{Q_0(R-D)}{R} \qquad (7)$$

แทน S_0 ใน (6) จะได้ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาที่แปรไปตามราคาสินค้ามีค่าเท่ากับ

$$ic\left[\frac{Q_0^2(R-D)}{2RD}\right]$$

ดังนั้นค่าใช้จ่ายรวมเมื่อมีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษก่อนเวลา T_0 คือ

$$C_0 = A + cQ_0 + ic\left[\frac{Q_0^2(R-D)}{2RD}\right] \qquad (8)$$

ในการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้า ณ เวลา T_0 เป็นต้นไป (พิจารณาเส้นปะในรูปที่ 2) เราจะหาค่าใช้จ่ายรวมในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 ได้ดังนี้

เนื่องจากปริมาณสินค้าในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 มีค่าเท่ากับ Q_0 หน่วย ราคาสินค้าในช่วงนี้มีค่าเป็น $c + k$ บาทต่อหน่วย และจำนวนครั้งในการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้ามีค่าเท่ากับ $\frac{Q_0}{Q_1}$ ครั้ง ดังนั้นค่าใช้จ่ายต่างๆ ในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 มีดังนี้

ค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าจำนวน Q_0 หน่วยมีค่าเท่ากับ

$$\frac{Q_0 A}{Q_1} + (c+k)Q_0$$

ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าในช่วงเวลา $\frac{Q_1}{D}$ มีค่าเท่ากับ

$$i(c+k)\int_0^{\frac{S_1}{R-D}} (R-D)x\,dx + i(c+k)\int_0^{\frac{S_1}{D}} (S_1 - Dx)\,dx = i(c+k)\left[\frac{RS_1^2}{2(R-D)D}\right] \qquad (9)$$

จาก $S_1 = \dfrac{Q_1(R-D)}{R}$ แทนลงใน (9) จะได้ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าเท่ากับ

$$i(c+k)\left[\frac{Q_1^{*2}(R-D)}{2RD}\right]$$

ดังนั้นค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าในช่วงเวลา $\frac{Q_0}{D}$ คือ

$$\frac{Q_0}{Q_1}\left[\frac{i(c+k)Q_1(R-D)}{2RD}\right] = i(c+k)Q_0\left[\frac{Q_1(R-D)}{2RD}\right] \qquad (10)$$

ค่าใช้จ่ายรวมที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา T_0 ถึง T_1 โดยปรับให้เป็นค่าเหมาะที่สุดจะมีค่าเท่ากับ

$$C_1 = \frac{Q_0 A}{Q_1^*} + (c+k)Q_0 + i(c+k)Q_0\left(\frac{Q_1^*(R-D)}{2RD}\right) \qquad (11)$$

ดังนั้นค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้เมื่อมีการสั่งซื้อแบบพิเศษมีค่าเท่ากับ

$$
\begin{aligned}
G &= C_1 - C_0 \\
&= \left[\frac{Q_0 A}{Q_1^*} + (c+k)Q_0 + i(c+k)Q_0\left(\frac{Q_1^*(R-D)}{2RD}\right)\right] - \left[A + cQ_0 + ic\left(\frac{Q_0^2(R-D)}{2RD}\right)\right] \\
&= \frac{Q_0 A}{Q_1^*} + kQ_0 + i(c+k)Q_0\left(\frac{Q_1^*(R-D)}{2RD}\right) - A - ic\left(\frac{Q_0^2(R-D)}{2RD}\right) \\
&= \left[k + \frac{A}{Q_1^*} + i(c+k)\left(\frac{Q_1^*(R-D)}{2RD}\right)\right]Q_0 - ic\left[\frac{Q_0^2(R-D)}{2RD}\right] - A \\
&= \left[k + \left(\frac{AD}{DQ_1^*}\right) + i(c+k)\left(\frac{Q_1^{*2}(R-D)}{2Q_1^* DR}\right)\right]Q_0 - ic\left[\frac{Q_0^2(R-D)}{2RD}\right] - A \\
&= \left[k + \frac{1}{D}\left(\frac{AD}{Q_1^*} + i(c+k)\frac{Q_1^{*2}(R-D)}{2Q_1^* R}\right)\right]Q_0 - ic\left[\frac{Q_0^2(R-D)}{2RD}\right] - A \\
&= \left[k + \frac{1}{D}\left(\frac{AD}{Q_1^*} + i(c+k)\frac{\left(\frac{2ADR}{i(c+K)(R-D)}\right)(R-D)}{2Q_1^* R}\right)\right]Q_0 - ic\left[\frac{Q_0^2(R-D)}{2RD}\right] - A \\
&= \left(k + \frac{2A}{Q_1^*}\right)Q_0 - ic\left[\frac{Q_0^2(R-D)}{2RD}\right] - A \\
&= -\frac{ic(R-D)}{2RD}\left[Q_0^2 - \frac{2RD}{ic(R-D)}\left(k + \frac{2A}{Q_1^*}\right)Q_0\right] - A \\
&= -\frac{ic(R-D)}{2RD}\left[Q_0^2 - \frac{2RD}{ic(R-D)}\left(k + \frac{2A}{Q_1^*}\right)Q_0 + \left(\frac{RD}{ic(R-D)}\left(k + \frac{2A}{Q_1^*}\right)\right)^2\right] \\
&\quad + \frac{ic(R-D)}{2RD}\left[\frac{RD}{ic(R-D)}\left(k + \frac{2A}{Q_1^*}\right)\right]^2 - A \\
&= -\frac{ic(R-D)}{2RD}\left[Q_0 - \left(\frac{RD}{ic(R-D)}\left(k + \frac{2A}{Q_1^*}\right)\right)\right]^2 + \frac{RD}{2ic(R-D)}\left(k + \frac{2A}{Q_1^*}\right)^2 - A \qquad (12)
\end{aligned}
$$

ซึ่ง G จะมีค่าสูงสุดเมื่อ $\left[Q_0 - \left(\frac{RD}{ic(R-D)}\left(k+\frac{2A}{Q_1^*}\right)\right)\right]^2 = 0$ หรือ เมื่อ $Q_0 = \frac{RD}{ic(R-D)}\left(k+\frac{2A}{Q_1^*}\right)$

ดังนั้นปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น คือ

$$Q_0^* = \frac{RD}{ic(R-D)}\left(k+\frac{2A}{Q_1^*}\right)$$

และเมื่อแทน Q_0^* ลงใน (7) จะได้ระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดจากการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น คือ

$$S_0^* = \frac{D}{ic}\left(k+\frac{2A}{Q_1^*}\right)$$

และค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุดเมื่อมีการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษ คือ

$$G^* = \frac{RD}{2ic(R-D)}\left(k+\frac{2A}{Q_1^*}\right)^2 - A$$

ซึ่งทำให้เราได้สมการ (1) ถึง (3) ตามที่ต้องการ

หมายเหตุ ในกรณีที่ $\frac{RD}{2ic(R-D)}\left(k+\frac{2A}{Q_1^*}\right)^2 < A$ จะทำให้ $G^* < 0$ แสดงว่าการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษในปริมาณ Q_0^* หน่วย ควรจะกระทำก็ต่อเมื่อค่าของ G^* มีค่ามากกว่าศูนย์เท่านั้น แต่ถ้าค่าของ G^* น้อยกว่าศูนย์ก็ไม่ควรสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษดังกล่าว

ในกรณีที่อัตราการเพิ่มสินค้ามีค่ามากเป็นอนันต์ ($R \to \infty$) จะได้ว่า Q_0^* และ G^* ที่ได้ในทฤษฎีบทจะเหมือนกับตัวแบบของ Naddor [4] ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 1. ถ้า $R \to \infty$ แล้ว $Q_1^* = \sqrt{\frac{2AD}{i(c+k)}}$ และจะได้ว่า

$$Q_0^* = \frac{D}{ic}\left(k+\frac{2A}{Q_1^*}\right) \tag{13}$$

และค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุด คือ

$$G^* = \frac{D}{2ic}\left(k+\frac{2A}{Q_1^*}\right)^2 - A \tag{14}$$

การเปรียบเทียบตัวแบบ EOQ

สำหรับหัวข้อนี้ เราต้องการเปรียบเทียบในเชิงทฤษฎีว่าตัวแบบ EOQ ที่หาได้ในงานวิจัยนี้และตัวแบบ EOQ ของ Naddor [4] ตัวแบบใดสามารถประหยัดค่าใช้จ่ายได้มากกว่าดังนี้

พิจารณาค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุดในสมการ (3) หรือ

$$\frac{RD}{2ic(R-D)}\left(k+\frac{2A}{\sqrt{\frac{2ADR}{i(c+k)(R-D)}}}\right)^2-A$$ และในสมการ (14) หรือ $$\frac{D}{2ic}\left(k+\frac{2A}{\sqrt{\frac{2AD}{i(c+k)}}}\right)^2-A$$

เราจะเห็นได้ว่าค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุดในสมการ (3) มากกว่าสมการ (14) ดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{RD}{2ic(R-D)}\left(k+\frac{2A}{\sqrt{\frac{2ADR}{i(c+k)(R-D)}}}\right)^2-A &= \frac{D}{2ic}\left(k\sqrt{\frac{R}{R-D}}+\frac{2A\sqrt{\frac{R}{R-D}}}{\sqrt{\frac{R}{R-D}}\sqrt{\frac{2AD}{i(c+k)}}}\right)^2-A \\
&= \frac{D}{2ic}\left(k\sqrt{\frac{R}{R-D}}+\frac{2A}{\sqrt{\frac{2AD}{i(c+k)}}}\right)^2-A \\
&> \frac{D}{2ic}\left(k+\frac{2A}{\sqrt{\frac{2AD}{i(c+k)}}}\right)^2-A \qquad (15)
\end{aligned}$$

ดังนั้นจากอสมการ (15) จะได้ว่าตัวแบบ EOQ ในงานวิจัยนี้สามารถประหยัดค่าใช้จ่ายได้มากกว่าตัวแบบ EOQ ของ Naddor [4]

ตัวอย่างเชิงตัวเลข

ในหัวข้อนี้ เรายกตัวอย่างเชิงตัวเลขเพื่อแสดงการประยุกต์ใช้ผลการศึกษาที่ได้ในทฤษฎีบท 1

ตัวอย่าง 1 ร้านจำหน่ายเครื่องไฟฟ้าแห่งหนึ่งสั่งซื้อพัดลมจากโรงงานผลิตพัดลมในราคาเครื่องละ 450 บาท แต่ละปีร้านไฟฟ้าแห่งนี้สามารถจำหน่ายพัดลมได้ 3000 เครื่อง ต่อมาโรงงานแห่งนี้ได้แจ้งให้ทราบว่าต้นเดือนหน้าจะปรับราคาพัดลมเพิ่มขึ้นอีกเครื่องละ 50 บาท ถ้าในการสั่งซื้อพัดลมของร้านไฟฟ้าแห่งนี้จะต้องเสียค่าใช้จ่ายในการดำเนินการ 5000 บาทต่อครั้ง ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาพัดลม 5% ของราคาพัดลมต่อเครื่องต่อปี และโรงงานแห่งนี้สามารถจัดส่งพัดลมได้ในอัตราปีละ 5000 เครื่อง อยากทราบว่าร้านไฟฟ้าแห่งนี้ควรจะสั่งซื้อพัดลมจำนวนเท่าใด ก่อนที่จะถึงต้นเดือนหน้าจึงจะทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายรวมได้สูงสุด และสามารถประหยัดได้เท่าใด และจำนวนพัดลมสูงสุดมีกี่เครื่อง

วิธีทำ จากโจทย์
$R = 5{,}000$ เครื่องต่อปี
$D = 3{,}000$ เครื่องต่อปี
$A = 5{,}000$ บาทต่อครั้ง
$c = 450$ บาทต่อเครื่อง
$k = 50$ บาทต่อเครื่อง
$i = 5\%$ ของราคาพัดลมต่อเครื่องต่อปี

หา Q_1^* ได้จากสมการ

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2ARD}{i(c+k)(R-D)}} = \sqrt{\frac{2(5,000)(5,000)(3,000)}{(0.05)(450+50)(5,000-3,000)}} = 1,732.0508$$

หา Q_0^* ได้จากสมการ

$$Q_0^* = \frac{RD}{ic(R-D)}\left(k+\frac{2A}{Q_1^*}\right) = \frac{(5,000)(3,000)}{(0.05)(450)(5,000-3,000)}\left(50+\frac{(2)(5,000)}{1,732.0508}\right) = 18,591.1676$$

หา S_0^* ได้จากสมการ

$$S_0^* = \frac{D}{ic}\left(k+\frac{2A}{Q_1^*}\right) = \frac{3,000}{(0.05)(450)}\left(50+\frac{(2)(5,000)}{1,732.0508}\right) = 7,436.4670$$

หา G^* ได้จากสมการ $$G^* = \frac{RD}{2ic(R-D)}\left(k+\frac{2A}{Q_1^*}\right)^2 - A$$
$$= \frac{(5,000)(3,000)}{(2)(0.05)(450)(5,000-3,000)}\left(50+\frac{(2)(5,000)}{1,732.0508}\right)^2 - 5,000$$
$$= 8,888.89$$

ดังนั้นร้านไฟฟ้าแห่งนี้ควรสั่งซื้อพัดลมมาจำหน่าย 18,591.1676 เครื่อง ซึ่งจะทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายได้สูงสุด 8,888.89 บาท และมีจำนวนพัดลมสูงสุดเท่ากับ 7,436.4670 เครื่อง

ตัวอย่าง 2 ปัจจุบันราคาต้นทุนแก๊ส LPG ในประเทศมีราคาอยู่ที่ 8.50 บาทต่อกิโลกรัม ต่อมาทราบว่าจะมีการปรับราคาต้นทุนราคาแก๊ส LPG เป็น 9.00 บาทต่อกิโลกรัม ในอีก 7 วันข้างหน้า ซึ่งในปัจจุบันปั๊มแก๊สแห่งนี้จำหน่ายแก๊ส LPG ได้ปีละ 150,000 กิโลกรัม ซึ่งมีค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาเท่ากับ 15% ของแก๊ส LPG ต่อกิโลกรัมต่อปี ค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อครั้งละ 1000 บาท ถ้าปั๊มแก๊สแห่งนี้ได้รับแก๊ส LPG มาจำหน่ายในอัตรา 200,000 กิโลกรัมต่อปี อยากทราบว่าปั๊มแก๊สแห่งนี้ควรจะสั่งซื้อแก๊สมาจำหน่ายในปริมาณเท่าใดก่อนที่จะมีการปรับราคา จึงจะทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายได้สูงสุด และสามารถประหยัดได้เท่าใด

วิธีทำ จากโจทย์ R = 200,000 กิโลกรัมต่อปี
D = 150,000 กิโลกรัมต่อปี
A = 1,000 บาทต่อครั้ง
c = 8.50 บาทต่อกิโลกรัม
k = 0.50 บาทต่อกิโลกรัม
i = 15% ของราคาแก๊สต่อกิโลกรัมต่อปี

หา Q_1^* ได้จากสมการ $$Q_1^* = \sqrt{\frac{2ARD}{i(c+k)(R-D)}}$$
$$= \sqrt{\frac{(2)(1,000)(200,000)(100,000)}{(0.15)(8.50+0.50)(200,000-100,000)}}$$
$$= 29,814.2397$$

หา Q_0^* ได้จากสมการ $$Q_0^* = \frac{RD}{ic(R-D)}\left(k+\frac{2A}{Q_1^*}\right)$$
$$= \frac{(200,000)(150,000)}{(0.15)(8.50)(200,000-150,000)}\left(50+\frac{(2)(1,000)}{29814.2397}\right)$$
$$= 266,862.1362$$

หา G^* ได้จากสมการ $G^* = \dfrac{RD}{2ic(R-D)}\left(k+\dfrac{2A}{Q_1^*}\right)^2 - A$

$$= \frac{(200,000)(100,000)}{(2)(0.15)(8.50)(200,000-150,000)}\left(50+\frac{(2)(1,000)}{29,814.2397}\right)^2 - 1,000$$

$$= 117,705.88$$

ดังนั้นปั๊มแก๊สแห่งนี้ควรสั่งซื้อแก๊ส LPG มาจำหน่ายในปริมาณ 266,862.1362 กิโลกรัม ก่อนที่จะมีการปรับราคา ซึ่งทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายได้สูงสุดเท่ากับ 117,705.88 บาท

สรุปผลการวิจัย

ในการศึกษาครั้งนี้ เราใช้วิธีพีชคณิตที่ปรากฏในงานวิจัยของ Grubbström and Erdem [2] และ Cárdenas-Barrón [3] หาตัวแบบ EOQ ที่มีอัตราการเพิ่มสินค้าต่อเนื่องและสินค้ามีราคาสูงขึ้นภายใต้เงื่อนไขที่ทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นได้สูงสุด ซึ่งวิธีนี้ไม่ต้องใช้ความรู้ทางด้านแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ในการหาตัวแบบ EOQ แต่การหาตัวแบบ EOQ ในกรณีนี้สามารถหาได้จากการจัดค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นให้อยู่ในรูปแบบกำลังสอง ซึ่งต่างจากการหาโดยใช้อนุพันธ์ ดังนั้นวิธีนี้จึงเป็นอีกหนึ่งวิธีที่เหมาะสำหรับผู้ที่ไม่มีความรู้ทางด้านแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ และในงานวิจัยนี้ ตัวแบบ EOQ ที่ใช้หาปริมาณการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น คือ Q_0^* มีค่าเท่ากับ $\dfrac{RD}{ic(R-D)}\left(k+\dfrac{2A}{Q_1^*}\right)$ หน่วย โดยที่ระดับสินค้าคงคลังสูงสุดที่เกิดการสั่งซื้อหรือผลิตสินค้าแบบพิเศษเหมาะที่สุดก่อนสินค้ามีราคาสูงขึ้น (S_0^*) มีค่าเท่ากับ $\dfrac{D}{ic}\left(k+\dfrac{2A}{Q_1^*}\right)$ หน่วย และค่าใช้จ่ายที่สามารถประหยัดได้สูงสุด (G^*) มีค่าเท่ากับ $\dfrac{RD}{2ic(R-D)}\left(k+\dfrac{2A}{Q_1^*}\right)^2 - A$ หน่วย และเราสามารถพิสูจน์ได้ว่าตัวแบบ EOQ ในงานวิจัยนี้สามารถประหยัดค่าใช้จ่ายได้มากกว่าตัวแบบ EOQ ของ Naddor [4]

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณกรรมการผู้อ่านผลงานวิจัยที่ได้กรุณาให้คำแนะนำและแก้ไขข้อบกพร่องจนทำให้ผลงานวิจัยนี้มีความถูกต้องสมบูรณ์มากขึ้น

เอกสารอ้างอิง

1. Harris, F. W. 1915. What Quantity to Make at Once, in: Operation and Costs. The Factory Management Series. Chicago. A.W. Shaw Co. p. 47-52.
2. Grubbström, R. W., and Erdem, A. 1999. The EOQ with Backlogging Derived without Derivatives. *International Journal of Production Economics* 59: 529-530.
3. Cárdenas-Barón, L. E. 2001. The Economic Production Quantity (EPQ) with Shortage Derived Algebraically. *International Journal of Production Economics* 70: 289-292.
4. Naddor, E. 1966. Inventory Systems. New York. Wiley.
5. Taylor, S. G., and Bradley, C. E. 1985. Optimal Ordering Strategies for Announced Price Increases. *Operations Research* 33: 312-325.
6. Brown, R. G. 1967. *Decision Rules for Inventory Management.* New York. Holt, Rinehart & Winston.
7. Brown, R. G. 1982. Advanced Service Parts Inventory Control. 2^{nd} Edition. Norwich, Vermont. Materials Management Systems. Inc.,
8. Tersine, R. J., and Grasso, E. T. 1978. Forward Buying in Response to Announced Price Increase. *Journal of Purchasing & Materials Management* 14: 20-22.
9. Tersine, R. J., and Hylton, M. G. 1982. EOQ Modification for Inflation Prices. *Journal of Purchasing & Materials Management* 18: 23-28.
10. Markowski, E. 1986. EOQ Modification for Future Price Increases. *Journal of Purchasing & Materials Management* 22: 28-32.
11. Jordan, P. C. 1987. Purchasing Decisions Considering Future Price Increases: An empirical Approach. *Journal of Purchasing & Materials Management* 23: 25-30.
12. Goyal, S. K., and Bhatt, S. K. 1988. A Generalized Lot Size Ordering Policy for Price Increases. *Operations Research* 25: 272-278.
13. Goyal, S. K. 1992. A Note on Inventory Models with Cost Increases. *Operations Research* 20: 414-415.
14. Tersine, R. J. 1996. Economic Replenishment Strategies for Announced Price Increases. *European Journal of Operational Research* 92: 266-280.
15. Lin, T. Y. 2011. Inventory Model for Items with Imperfect Quality under Announced Price Increases. *African Journal of Business Management* 5: 4715-4730.
16. Teerapabolarn, K., and Khamrod, S. 2013. The EOQ Model with Shortage and Price Increases Derived Algebraically. *Srinakharinwirot Science Journal* 29: 37-55. (in Thai)

ได้รับบทความวันที่ 16 กรกฎาคม 2556

ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 19 สิงหาคม 2556