บทความวิชาการ

การทดลองเชิงเปรียบเทียบและแผนแบบบล็อก

มงคล ตุ้นทัพไทย[*] อุทมพร จงถาวรวุฒิ และ จริยา อุ่ยยะเสถียร

บทคัดย่อ

ในการทดลองเปรียบเทียบอิทธิพลของทรีตเมนต์ซึ่งแตกต่างกันจำเป็นต้องมีการวางแผนการทดลองที่เหมาะสมสำหรับควบคุมสิ่งรบกวนที่มาจากปัจจัยอื่นๆ เพื่อที่จะบันทึกข้อมูลได้อย่างน่าเชื่อถือ แผนแบบบล็อกไม่สมบูรณ์ที่สมดุลนับว่าเป็นเครื่องมือสำคัญในการสร้างการทดลองที่เหมาะสมดังกล่าว ในบทความนี้ได้แนะนำให้รู้จักแผนแบบบล็อกไม่สมบูรณ์ที่สมดุล และอธิบายขั้นตอนการสร้างแผนแบบบล็อกไม่สมบูรณ์ที่สมดุลอย่างง่าย นอกจากนั้น เราได้เสนอกระบวนการสร้างแผนแบบบล็อกไม่สมบูรณ์ที่สมดุลใหม่จากแผนแบบบล็อกไม่สมบูรณ์ที่สมดุลเดิมเมื่อเพิ่มหนึ่งทรีตเมนต์

คำสำคัญ: แผนแบบบล็อก แผนแบบบล็อกไม่สมบูรณ์ที่สมดุล

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[*]ผู้นิพนธ์ประสานงาน, email: m_tuntapthai@hotmail.com

Comparative Experiments and Block Designs

Mongkhon Tuntapthai* Uthoomporn Jongthawonwuth and Chariya Uiyyasathian

ABSTRACT

A comparative experiment for the effect of different treatments need a proper design of experiment to control confounding effects of other factors. In order to record reliable data, Balanced Incomplete Block Design (BIBD) is a crucial tool to construct such a proper experiment. This article introduces BIBD and provides some common BIBD construction. Moreover, we propose a method to construct a new BIBD from the old BIBD when one treatment is appended.

Keywords: block designs, balanced incomplete block designs.

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, Chulalongkorn University

*Corresponding author, email: m_tuntapthai@hotmail.com

บทนำ

ในการทดลองทางเกษตรนักวิจัยต้องการเพิ่มผลผลิตโดยการใส่ปุ๋ยให้พืชที่ปลูกไว้ในที่ดินแห่งหนึ่ง เนื่องจากปุ๋ยที่จะนำมาใช้มีหลายชนิด นักวิจัยจึงต้องทดสอบว่าปุ๋ยชนิดใดสามารถเพิ่มผลผลิตได้ดีที่สุด โดยการเปรียบเทียบปริมาณผลผลิตที่ได้จากพืชที่ปลูกไว้ ดังนั้น ที่ดินจึงถูกแบ่งออกเป็นแปลงทดลอง (Experimental plot) ย่อยๆ เพื่อทำการทดลองปุ๋ยแต่ละชนิด ซึ่งในแต่ละแปลงทดลองนั้นจะต้องมีการควบคุมปัจจัย (Factor) อื่นๆ ที่อาจส่งผลกระทบต่อการเจริญเติบโตของพืช

โดยสภาพทั่วไปแล้วพื้นดินมักจะมีความอุดมสมบูรณ์ใกล้เคียงกันเฉพาะบริเวณที่ไม่กว้างใหญ่มากนัก ถ้าหากทำการทดลองใส่ปุ๋ยลงในแปลงทดลองโดยไม่คำนึงถึงปัญหานี้ย่อมไม่สามารถสรุปได้ว่า ความแตกต่างระหว่างผลผลิตที่ได้ในแปลงทดลองเป็นผลเนื่องมาจากการที่ปุ๋ยแต่ละชนิดมีอิทธิพลต่อการเจริญเติบโตของพืชไม่เท่ากัน หรือเป็นผลเนื่องมาจากความอุดมสมบูรณ์ของดินไม่เท่ากัน วิธีการในการแก้ไขปัญหานี้ คือ การจัดแปลงทดลองที่มีลักษณะใกล้เคียงกันให้อยู่รวมกันเป็นกลุ่ม ซึ่งเราเรียกว่า การบล็อก (Blocking) หลังจากทำการบล็อกแล้ว เราจะได้บล็อกทดลองที่ประกอบด้วยแปลงทดลองย่อยๆ ซึ่งอยู่ภายใต้ปัจจัยควบคุมเดียวกัน ดังนั้น เราจึงเปรียบเทียบปุ๋ยแต่ละชนิดที่มาจากบล็อกเดียวกันเท่านั้น ขั้นตอนสำคัญในการทดลองอีกประการ คือ การวางแผนใส่ปุ๋ยลงในแปลงทดลอง โดยในแต่ละแปลงทดลองจะใส่ปุ๋ยได้เพียง 1 ชนิดเท่านั้น และแต่ละบล็อกทดลองจะใส่ปุ๋ยแต่ละชนิดลงในแปลงทดลองได้ไม่เกิน 1 แปลง สำหรับการวางแผนการทดลองที่มีการบล็อกจะถูกเรียกว่า แผนแบบบล็อก (Block design)

แผนแบบบล็อกนี้ได้ถูกพัฒนาขึ้นเป็นครั้งแรก[1] ในปี ค.ศ. 1920 โดยนักสถิติชาวอังกฤษ 2 ท่าน คือ ฟิชเชอร์ (Fisher) และเยตส์ (Yates) ซึ่งเป็นผู้ริเริ่มนำหลักการทางด้านสถิติมาใช้ในการวางแผนการทดลองทางเกษตร ต่อมาในปี ค.ศ. 1932 ฟิชเชอร์ (Fisher) และเยตส์ (Yates) ได้ร่วมงานวิจัยกับนักวิชาการจากหลากหลายสาขาวิชา ทำให้เกิดองค์ความรู้ในเรื่องการใช้สถิติอย่างเป็นระบบสำหรับการวางแผนการทดลอง ซึ่งก่อให้เกิดประโยชน์ในด้านการเกษตรและวิชาการอื่นๆ เป็นอย่างมาก นอกจากนี้ยังมีการวางแผนการทดลองประเภทอื่นๆ ซึ่งถูกนำมาใช้กันอย่างแพร่หลาย เช่น แผนแบบสุ่มสมบูรณ์ (Completely randomize design) แผนแบบจัตุรัสละติน (Latin square design) และแผนแบบแฟกทอเรียล (Factorial design) เป็นต้น[2]

ในบทความนี้ ผู้เขียนจะศึกษาแผนแบบบล็อกประเภทหนึ่งซึ่งเรียกว่า แผนแบบบล็อกไม่สมบูรณ์ที่สมดุล (Balanced incomplete block design) โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่ออธิบายขั้นตอนการสร้างแผนแบบบล็อกดังกล่าว และจะให้วิธีการสร้างแผนแบบบล็อกใหม่ซึ่งได้จากแผนแบบบล็อกที่มีอยู่เดิมในกรณีที่มีทรีตเมนต์ (หรือปุ๋ย) เพิ่มขึ้น 1 ทรีตเมนต์ โดยการเปลี่ยนแปลงแผนแบบการทดลองเดิมเพียงบางส่วนเท่านั้น พิจารณาได้จากสถานการณ์สมมติต่อไปนี้

---

[1] กล่าวถึงโดยเอกสารอ้างอิง [1]

[2] ศึกษาแผนแบบเหล่านี้เพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิง [2]

ณ สถานีทดลองแห่งหนึ่งมีพื้นที่สำหรับปลูกพืชทั้งหมด 10 บล็อก ซึ่งแต่ละบล็อกถูกแบ่งเป็นแปลงทดลองย่อย 3 แปลง และมีปุ๋ยที่ต้องการเปรียบเทียบ 5 ชนิด สมมติให้เป็นปุ๋ย A B C D และ E นักวิจัยได้วางแผนการทดลองโดยการจัดปุ๋ยแต่ละชนิดลงในแปลงทดลองดังกล่าวโดยใช้แผนแบบบล็อก ดังนี้

แผนแบบการทดลองที่ 1

บล็อกที่ 1 ใช้ปุ๋ย	A	B	C	บล็อกที่ 2 ใช้ปุ๋ย	A	B	D
บล็อกที่ 3 ใช้ปุ๋ย	A	B	E	บล็อกที่ 4 ใช้ปุ๋ย	A	C	E
บล็อกที่ 5 ใช้ปุ๋ย	A	C	D	บล็อกที่ 6 ใช้ปุ๋ย	A	D	E
บล็อกที่ 7 ใช้ปุ๋ย	B	D	E	บล็อกที่ 8 ใช้ปุ๋ย	B	C	D
บล็อกที่ 9 ใช้ปุ๋ย	C	D	E	บล็อกที่ 10 ใช้ปุ๋ย	B	C	E

ในเวลาต่อมา นักวิจัยได้พัฒนาคิดค้นปุ๋ยเพิ่มขึ้นมา 1 ชนิด สมมติให้เป็นปุ๋ย F และได้วางแผนการทดลองใหม่เพื่อเปรียบเทียบปุ๋ยทั้ง 6 ชนิด โดยใช้แผนแบบบล็อกดังนี้

แผนแบบการทดลองที่ 2

บล็อกที่ 1 ใช้ปุ๋ย	A	B	C	บล็อกที่ 2 ใช้ปุ๋ย	C	E	F
บล็อกที่ 3 ใช้ปุ๋ย	A	B	E	บล็อกที่ 4 ใช้ปุ๋ย	B	D	F
บล็อกที่ 5 ใช้ปุ๋ย	A	C	D	บล็อกที่ 6 ใช้ปุ๋ย	B	C	F
บล็อกที่ 7 ใช้ปุ๋ย	B	D	E	บล็อกที่ 8 ใช้ปุ๋ย	A	E	F
บล็อกที่ 9 ใช้ปุ๋ย	C	D	E	บล็อกที่ 10 ใช้ปุ๋ย	A	D	F

เพื่อให้เกิดความแม่นยำในการวัดปริมาณผลผลิตของพืชที่ได้จากการใช้ปุ๋ยชนิดต่างๆ นักวิจัยได้ใส่ปุ๋ยแต่ละชนิดลงในแปลงทดลองหลายๆ แปลงซึ่งอยู่ในคนละบล็อก ลักษณะเช่นนี้เรียกว่า การซ้ำ (Replication) และเพื่อให้ข้อมูลที่ได้มีความน่าเชื่อถือ นักวิจัยต้องวางแผนการทดลองให้จำนวนการซ้ำสำหรับปุ๋ยแต่ละชนิดมีค่าเท่ากัน นอกจากนี้เพื่อให้ปุ๋ยแต่ละคู่ได้รับการเปรียบเทียบภายใต้ปัจจัยควบคุมเดียวกัน นักวิจัยจึงใส่ปุ๋ยสองชนิดใดๆ ที่แตกต่างกันลงในแปลงทดลองที่อยู่ในบล็อกเดียวกันและจำนวนบล็อกซึ่งได้รับปุ๋ยสองชนิดนั้นมีค่าเท่ากันด้วย

ในแผนแบบการทดลองที่ 1 มีปุ๋ย 5 ชนิด โดยที่ปุ๋ยแต่ละชนิดได้รับการทดลองซ้ำเป็นจำนวน 6 ครั้ง และมีบล็อกที่เปรียบเทียบคู่ของปุ๋ยสองชนิดใดๆ เป็นจำนวน 3 บล็อกเท่าๆ กัน

สำหรับแผนแบบการทดลองที่ 2 มีปุ๋ย 6 ชนิด โดยที่ปุ๋ยแต่ละชนิดได้รับการทดลองซ้ำเป็นจำนวน 5 ครั้ง และมีบล็อกที่เปรียบเทียบคู่ของปุ๋ยสองชนิดใดๆ เป็นจำนวน 2 บล็อกเท่าๆ กัน ในการทดลองครั้งใหม่นี้มีปุ๋ยเพิ่มขึ้น 1 ชนิด ทว่านักวิจัยไม่จำเป็นต้องทำการทดลองตามแผนแบบใหม่ที่กำหนดไว้ทั้งหมด เนื่องจากนักวิจัยสามารถนำข้อมูลจากแผนแบบการทดลองที่ 1 (ซึ่งมีอยู่เดิมในบล็อกที่ 1 3 5 7 และ 9) มาใช้ร่วมกับข้อมูลครั้งใหม่ได้ โดยนักวิจัยต้องทำการทดลองใหม่เฉพาะในบล็อกที่ 2 4 6 8 และ 10 เท่านั้น ซึ่งจะช่วยให้นักวิจัยสามารถประหยัดเวลาและค่าใช้จ่ายในการทดลองครั้งใหม่นี้

แผนแบบบล็อก

จากสถานการณ์ที่เกริ่นนำในตอนต้นทำให้เรารู้จักแผนแบบบล็อกสำหรับการทดลองทั่วไปแล้ว ในทางคณิตศาสตร์เราจะให้นิยามแผนแบบบล็อก ดังนี้

บทนิยามที่ 1

แผนแบบบล็อก (Block design) $(S, \mathcal{B})$ ประกอบด้วย

S เป็นเซตจำกัดซึ่งมีสมาชิกเรียกว่า ทรีตเมนต์ (Treatment) และ

$\mathcal{B}$ เป็นเซตของเซตย่อยที่ไม่ว่างของ S ซึ่งมีสมาชิกเรียกว่า บล็อก (Block) ในที่นี้ยอมให้มีบล็อกซ้ำกันได้

โดยอาศัยหลักเกณฑ์เกี่ยวกับจำนวนทรีตเมนต์และจำนวนสมาชิกของบล็อกเราสามารถแบ่งแผนแบบบล็อกได้เป็น 2 ประเภท ดังนี้ แผนแบบบล็อกสมบูรณ์ (Complete block design) คือ แผนแบบบล็อกซึ่งแต่ละบล็อกมีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนของทรีตเมนต์ทั้งหมด และแผนแบบบล็อกไม่สมบูรณ์ (Incomplete block design) คือ แผนแบบบล็อกที่มีจำนวนทรีตเมนต์มากกว่าจำนวนสมาชิกของทุกบล็อก

การนำแผนแบบบล็อกสมบูรณ์ไปใช้งานนั้นสามารถทำได้สะดวก โดยจัดทรีตเมนต์ลงในบล็อกให้ครบทุกทรีตเมนต์ สำหรับแผนแบบบล็อกไม่สมบูรณ์ในกรณีทั่วไปอาจจะมีสองทรีตเมนต์ที่ไม่ได้รับการเปรียบเทียบภายในบล็อกเดียวกัน เนื่องจากมีจำนวนทรีตเมนต์มากกว่าขนาดของบล็อก ถ้าหากนำแผนแบบนี้ไปใช้อาจก่อให้เกิดค่าความคลาดเคลื่อนในการทดลองได้ในระดับสูง ในปี ค.ศ. 1935 เยตส์ (Yates) [3] ได้ค้นพบวิธีการแก้ไขปัญหาดังกล่าวโดยใช้แผนแบบบล็อกชนิดพิเศษที่เรียกว่า แผนแบบบล็อกไม่สมบูรณ์ที่สมดุล (Balanced incomplete block design) โดยให้นิยามไว้ดังนี้

บทนิยามที่ 2

แผนแบบบล็อกไม่สมบูรณ์ที่สมดุล (Balanced incomplete block design) โดยใช้ตัวย่อ BIBD คือ แผนแบบบล็อก $(S, \mathcal{B})$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(B1) แต่ละทรีตเมนต์ มีจำนวนบล็อกซึ่งบรรจุทรีตเมนต์นั้นเป็น r บล็อกเท่ากัน

(B2) แต่ละบล็อก มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ k (แต่ละบล็อกบรรจุทรีตเมนต์เป็นจำนวนเท่ากัน)

(B3) สำหรับสองทรีตเมนต์ใดๆ มีจำนวนบล็อกที่บรรจุคู่ของทรีตเมนต์นั้นเป็น λ บล็อกเท่ากัน

กำหนดให้ v แทนจำนวนทรีตเมนต์ และ b แทนจำนวนบล็อกทั้งหมด (นั่นคือ $v = |S|$ และ $b = |\mathcal{B}|$) เราจะเรียกห้าสิ่งอันดับของตัวแปร (v,b,r,k,λ) ว่า พารามิเตอร์ (Parameters) สำหรับ BIBD และจะเรียกเงื่อนไข (B3) ว่า เงื่อนไขสมดุล (Balanced condition) สำหรับ BIBD

ต่อไปจะพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ (v,b,r,k,λ) สำหรับ BIBD ใดๆ โดยการนำเอาแผนแบบบล็อกนี้ไปประยุกต์ใช้ในการทดลองเปรียบเทียบปุ๋ยชนิดต่างๆ ในที่นี้ ทรีตเมนต์ คือ ชนิดของปุ๋ย และบล็อก คือ บล็อกทดลอง ซึ่งแต่ละบล็อกจะถูกแบ่งเป็นแปลงทดลองย่อยๆ k แปลง และจำนวนบล็อกทดลองทั้งหมด คือ b ดังนั้น จำนวนแปลงทดลองทั้งหมด เขียนแทนโดย N จะมีค่าเท่ากับ bk อย่างไรก็ตาม เราสามารถมองได้อีกนัยหนึ่งดังนี้ เพราะว่าปุ๋ยแต่ละชนิดได้รับการทดลองซ้ำในแปลงทดลอง r แปลง และจำนวนชนิดของปุ๋ยทั้งหมด คือ v เพราะฉะนั้น จำนวนแปลงทดลองทั้งหมด (N) จะเท่ากับ vr ทำให้เราได้สมการดังนี้

$$N = bk = vr \tag{1}$$

ให้ A เป็นชนิดของปุ๋ยที่เลือกมาหนึ่งชนิด สำหรับในแต่ละบล็อกทดลองที่ได้รับปุ๋ย A จะมีจำนวนครั้งในการเปรียบเทียบระหว่างปุ๋ย A กับปุ๋ยชนิดอื่นเท่ากับ $k-1$ ครั้ง และจำนวนบล็อกทดลองที่ได้รับปุ๋ย A เท่ากับ r บล็อก จะได้ว่าจำนวนครั้งในการเปรียบเทียบระหว่างปุ๋ย A กับปุ๋ยชนิดอื่นเท่ากับ $r(k-1)$ ครั้ง ซึ่งสามารถกล่าวได้อีกนัยหนึ่งดังนี้ เนื่องจากจำนวนครั้งในการเปรียบเทียบระหว่างปุ๋ย A กับปุ๋ยชนิดอื่นๆ เท่ากับ l ครั้ง และมีปุ๋ยชนิดอื่นนอกจากปุ๋ย A เท่ากับ $v-1$ ชนิด ดังนั้น จำนวนครั้งในการเปรียบเทียบระหว่างปุ๋ย A กับปุ๋ยชนิดอื่นจะมีค่าเท่ากับ $\lambda(v-1)$ ครั้งนั่นเอง ซึ่งทำให้เราได้สมการดังนี้

$$r(k-1) = \lambda(v-1) \tag{2}$$

เราจะเรียกสมการ (1) และ (2) ว่า เงื่อนไขจำเป็น (Necessary condition) สำหรับ BIBD

นอกจากนี้ ในปี ค.ศ. 1935 ฮอลล์ (Hall) [4] ได้พิสูจน์ว่า สำหรับ BIBD ใดๆ จะมีจำนวนบล็อกมากกว่าหรือเท่ากับจำนวนทรีตเมนต์เสมอ นั่นคือ

$$b \geq v \tag{3}$$

ต่อมาในปี ค.ศ. 1940 ฟิชเชอร์ (Fisher) [5] ได้พิสูจน์ว่า อสมการ (3) เป็นจริงสำหรับ BIBD ใดๆ เช่นกัน โดยใช้ความรู้ทางด้านสถิติในการพิสูจน์ ซึ่งเราจะเรียกอสมการ (3) นี้ว่า อสมการของฟิชเชอร์ (Fisher's inequality)

บทนิยามที่ 3

สำหรับ BIBD ใดๆ ซึ่งมีจำนวนทรีตเมนต์เท่ากับจำนวนบล็อกทั้งหมด (หรือ $v = b$) จะถูกเรียกว่า แผนแบบบล็อกไม่สมบูรณ์ที่สมดุลและสมมาตร (Symmetric balanced incomplete block design) โดยใช้ตัวย่อ SBIBD

ข้อสังเกต

จากสมการ (1) และ (2) จะเห็นได้ว่าพารามิเตอร์ (v,b,r,k,λ) เหล่านี้ไม่เป็นอิสระต่อกัน ทำให้เราได้ว่า ถ้าหากทราบค่าของสามพารามิเตอร์ใดๆ แล้วจะสามารถหาค่าของสองพารามิเตอร์ที่เหลือได้เสมอ

พิจารณาแผนแบบบล็อกที่มีพารามิเตอร์ $v = 8$ $b = 12$ และ $k = 4$ จะได้ว่าพารามิเตอร์ที่ได้จากสมการ (1) และ (2) คือ $r = 6$ และ $\lambda = 18/7$ ตามลำดับ เนื่องจากมีพารามิเตอร์บางค่าที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม ดังนั้น เราจึงไม่สามารถสร้างแผนแบบบล็อกซึ่งสอดคล้องกับสามพารามิเตอร์ข้างต้นให้เป็น BIBD ได้

อย่างไรก็ตาม ในปี ค.ศ. 2001 โฮเท็น (Houghten) และคณะ [6] ได้พิสูจน์ว่าไม่สามารถสร้าง BIBD ที่มีพารามิเตอร์ (46,69,9,6,1) ถึงแม้ว่าค่าพารามิเตอร์เหล่านี้จะสอดคล้องกับสมการ (1) และ (2) ก็ตาม นอกจากนี้ ในปี ค.ศ. 2007 บิลลัส (Bilous) และคณะ [7] ได้แสดงว่าไม่มี BIBD ที่สอดคล้องกับพารามิเตอร์ดังนี้ (22,33,12,8,4) ด้วยเหตุนี้ สมการ (1) และ (2) จึงไม่ใช่เงื่อนไขเพียงพอ (Sufficient condition) สำหรับ BIBD

ต่อไปเราจะอธิบายวิธีการสร้าง BIBD และ SBIBD ที่มีขั้นตอนไม่ซับซ้อนจนเกินไป ซึ่งจะทำให้เกิดความสะดวกในการวางแผนการทดลองก่อนที่จะลงมือปฏิบัติจริง

ทฤษฎีบทที่ 1 (แผนแบบไม่ลดรูป หรือ Unreduced design)

สำหรับจำนวนเต็ม v และ k ใดๆ โดยที่ $v > k \geq 2$ จะมี BIBD ซึ่งสอดคล้องกับพารามิเตอร์ดังต่อไปนี้ $\left(v,\binom{v}{k},\binom{v-1}{k-1},k,\binom{v-2}{k-2}\right)$

บทพิสูจน์ ให้ $(S,\mathcal{B})$ เป็นแผนแบบบล็อก โดยที่ $|S| = v$ และ $\mathcal{B} = \{B|B \subseteq S, |B| = k\}$

เห็นได้ชัดว่าจำนวนบล็อกทั้งหมด คือ $b = \binom{v}{k}$

กำหนดให้ x และ y เป็นสองทรีตเมนต์ใดๆ จะได้ว่าจำนวนบล็อกที่บรรจุ x คือ $r = \binom{v-1}{k-1}$ และ

จำนวนบล็อกที่บรรจุ x และ y คือ $\binom{v-2}{k-2}$ ■

จะเห็นได้ว่า แผนแบบการทดลองที่ 1 เป็นแผนแบบไม่ลดรูปในกรณีที่ $v = 5$ และ $k = 3$ โดยมีจำนวนแปลงทดลองทั้งหมด (N) 30 แปลง ส่วนในกรณีที่ $v = 7$ และ $k = 3$ จากทฤษฎีบทที่ 1 เราสามารถสร้าง BIBD ซึ่งมีพารามิเตอร์ (7,35,15,3,5) ได้ โดยมีจำนวนแปลงทดลอง คือ $N = 7 \times 15 = 35 \times 3 = 105$ อย่างไรก็ตาม เราสามารถลดจำนวนแปลงทดลองนี้ได้โดยการสร้าง SBIBD ที่สอดคล้องกับพารามิเตอร์ (7,7,3,3,1) และมีจำนวนแปลงทดลองลดลง คือ $N = 7 \times 3 = 21$ แปลง ซึ่งจะพบได้ในตัวอย่างที่ 2

ต่อไปเราจะให้นิยามสำคัญที่ใช้ในการสร้าง SBIBD พร้อมทั้งทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

บทนิยามที่ 4

ให้ $(G,+)$ เป็นกรุปสลับที่โดยมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ v และ

ให้ B เป็นเซตย่อยของ G โดยมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ k

เราจะเรียก B ว่า เซตเชิงผลต่าง (Difference set) ถ้าทุกสมาชิก g ที่ไม่เป็นเอกลักษณ์ของ G จะมี λ คู่อันดับ $(x_1,y_1),(x_2,y_2),....,(x_1,y_1)$ ของสมาชิกใน B โดยที่ผลต่างของคู่อันดับนั้นๆ คือ

$$g = y_1 - x_1 = y_2 - x_2 = ... = y_\lambda - x_\lambda$$

เราจะเรียกสามสิ่งอันดับของตัวแปร (v,k,λ) ว่า พารามิเตอร์สำหรับเซตเชิงผลต่าง

ตัวอย่างที่ 1 ในกรุปจำนวนเต็มมอดุโล 7 ผลต่างที่เป็นไปได้ทั้งหมดสำหรับคู่อันดับของสมาชิกในเซต $\{\bar{1},\bar{2},\bar{4}\}$ คือ $\pm\bar{1},\pm\bar{3},\pm\bar{2}$ ซึ่งเกิดจากคู่อันดับของสมาชิกในเซตข้างต้นนี้ได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น ดังนั้น $\{\bar{1},\bar{2},\bar{4}\}$ เป็นเซตเชิงผลต่างซึ่งมีพารามิเตอร์ $(v,k,\lambda) = (7,3,1)$ □

ทฤษฎีบทที่ 2 (เซตเชิงผลต่างของพาเลย์ หรือ Paley's difference set)

ถ้า $v = 4t-1$ สามารถเขียนได้ในรูปเลขยกกำลังของจำนวนเฉพาะที่มีค่ามากกว่า 3 แล้วจะมีเซตเชิงผลต่างซึ่งสอดคล้องกับพารามิเตอร์ $(4t-1,2t-1,t-1)$

บทพิสูจน์ ให้ $(\mathbb{F}_v,+,\cdot)$ เป็นฟิลด์ซึ่งมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ v และ $B = \{x \cdot x \mid x \in \mathbb{F}_v \backslash \{0\}\}$
จะได้ว่า B เป็นเซตเชิงผลต่างในกรุป $(\mathbb{F}_v,+)$ ซึ่งสอดคล้องกับพารามิเตอร์ที่ต้องการ
สำหรับรายละเอียดในการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ ท่านผู้อ่านสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิง [8] ■

ทฤษฎีบทที่ 3 (แผนแบบวัฏจักร หรือ Cyclic design)

ถ้ามีเซตเชิงผลต่างซึ่งมีพารามิเตอร์ (v,k,λ) แล้วจะมี SBIBD ที่สอดคล้องกับพารามิเตอร์ (v,v,k,k,λ)

บทพิสูจน์ กำหนดให้ G เป็นกรุปสลับที่โดยมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ v และ $B = \{b_1,b_2,...,b_k\}$ เป็นเซตเชิงผลต่างในกรุป G และกำหนดให้ $(G,\mathcal{B})$ เป็นแผนแบบบล็อกซึ่งประกอบด้วย $\mathcal{B} = \{B+g \mid g \in G\}$ เมื่อ $B+g = \{b_i + g \mid b_i \in G\}$ เห็นได้ชัดว่าจำนวนบล็อกทั้งหมดเท่ากับจำนวนสมาชิกของ G นั่นคือ $b = v$ ดังนั้น แผนแบบบล็อก $(G,\mathcal{B})$ ใหม่นี้เป็น SBIBD[3] ■

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $(\mathbb{Z},\mathcal{B})$ เป็นแผนแบบบล็อกในทฤษฎีบทที่ 3 โดยใช้ $B = \{\bar{1},\bar{2},\bar{4}\}$ ซึ่งเป็นเซตผลต่างในกรุปจำนวนเต็มมอดุโล 7 จะเห็นได้ว่า $\mathcal{B}$ ประกอบด้วยบล็อกทั้งหมด ดังนี้

$$\{\bar{1},\bar{2},\bar{4}\}, \{\bar{2},\bar{3},\bar{5}\}, \{\bar{3},\bar{4},\bar{6}\}, \{\bar{4},\bar{5},\bar{0}\}, \{\bar{5},\bar{6},\bar{1}\}, \{\bar{6},\bar{0},\bar{2}\}, \{\bar{0},\bar{1},\bar{3}\}$$

ดังนั้น แผนแบบบล็อก $(\mathbb{Z},\mathcal{B})$ เป็น SBIBD ที่มีพารามิเตอร์ $(7,7,3,3,1)$ □

---

[3] สำหรับพารามิเตอร์ที่เหลือสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิง [9]

การสร้างแผนแบบบล็อกใหม่จากแผนแบบบล็อกเดิม

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราได้กล่าวถึงขั้นตอนการสร้าง BIBD และ SBIBD ไว้แล้วในทฤษฎีบทที่ 1 และทฤษฎีบทที่ 3 ตามลำดับ ต่อไปเราจะอธิบายวิธีการนำเอา BIBD ที่มีอยู่เดิมมาสร้างเป็น BIBD ใหม่ซึ่งเรียกว่า แผนแบบเติมเต็ม (Complementary design) นอกจากนี้ เราสามารถนำเอา SBIBD ใดๆ มาพัฒนาให้เกิด BIBD ใหม่ได้สองแผนแบบ คือ แผนแบบส่วนตกค้าง (Residual design) และแผนแบบอนุพัทธ์ (Derived design) ซึ่งพบได้ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4 (แผนแบบเติมเต็ม หรือ Complementary design)

ถ้ามี BIBD ซึ่งสอดคล้องกับพารามิเตอร์ (v,b,r,k,λ) แล้วจะมี BIBD ซึ่งสอดคล้องกับพารามิเตอร์ ดังนี้ $(v,b,b-r,v-k,b-2r+\lambda)$ โดยที่ $b-2r+\lambda>0$

บทพิสูจน์ สมมติให้ $(S,\mathcal{B})$ เป็น BIBD ซึ่งมีพารามิเตอร์ (v,b,r,k,λ) โดยที่ $\mathcal{B}=\{B_1,B_2,\ldots,B_b\}$
กำหนดให้ $(S',\mathcal{B}')$ เป็นแผนแบบบล็อกใหม่ โดยที่ $S'=S$ และ $\mathcal{B}'=\{S\setminus B_1,S\setminus B_2,\ldots,S\setminus B_b\}$
เราได้ว่าในแผนแบบบล็อกทั้งสองนี้จะมีจำนวนทรีตเมนต์เท่ากับ v และจำนวนบล็อกทั้งหมดเท่ากับ b
นอกจากนี้ จะเห็นได้ชัดว่าแต่ละบล็อกใน $(S',\mathcal{B}')$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ $v-k$

พิจารณาแผนแบบเริ่มต้น $(S,\mathcal{B})$ แต่ละทรีตเมนต์อยู่ในบล็อก r บล็อก ทำให้ได้ว่าทรีตเมนต์นั้นๆ อยู่ในส่วนเติมเต็มของบล็อกที่เหลือ $b-r$ บล็อก นั่นคือในแผนแบบบล็อก $(S',\mathcal{B}')$ แต่ละทรีตเมนต์อยู่ในบล็อก $b-r$ บล็อก

ให้ x และ y เป็นทรีตเมนต์ใดๆ พิจารณา $(S,\mathcal{B})$ ซึ่งเป็น BIBD เริ่มต้น จะได้ว่าจำนวนบล็อกที่บรรจุ x และ y เท่ากับ λ เนื่องจากทรีตเมนต์ x อยู่ในบล็อก r บล็อก จะได้ว่าจำนวนบล็อกที่บรรจุ x แต่ไม่บรรจุ y เท่ากับ $r-\lambda$ ในทำนองเดียวกัน จำนวนบล็อกที่บรรจุ y แต่ไม่บรรจุ x เท่ากับ $r-\lambda$ เช่นกัน เพราะฉะนั้นจำนวนบล็อกที่ไม่บรรจุ x และ y มีค่าเท่ากับ

$$b-(r-\lambda)-(r-\lambda)-\lambda=b-2r+\lambda$$

ดังนั้น จำนวนบล็อกใน $(S',\mathcal{B}')$ ที่บรรจุ x และ y ซึ่งเท่ากับจำนวนบล็อกใน $(S,\mathcal{B})$ ที่ไม่บรรจุ x และ y จะมีค่าเท่ากับ $b-2r+\lambda$ บล็อก ■

ทฤษฎีบทที่ 5 (แผนแบบส่วนตกค้าง หรือ Residual design)

ถ้ามี SBIBD ซึ่งสอดคล้องกับพารามิเตอร์ (v,v,k,k,λ) แล้วจะมี BIBD ซึ่งสอดคล้องกับพารามิเตอร์ ดังนี้ $(v-k,v-1,k,k-\lambda,\lambda)$

บทพิสูจน์ ให้ $(S,\mathcal{B})$ เป็น SBIBD ซึ่งมีพารามิเตอร์ (v,v,k,k,λ) และ B_0 เป็นบล็อกใดๆ ใน $(S,\mathcal{B})$
กำหนดให้ $(R,\mathcal{R})$ เป็นแผนแบบบล็อกใหม่ โดยที่ $R=S\backslash B_0$ และ $\mathcal{R}=\{B\backslash B_0 \mid B\in\mathcal{B}\backslash\{B_0\}\}$
จะได้ว่าจำนวนทรีตเมนต์เท่ากับ $v-k$ และจำนวนบล็อกทั้งหมดเท่ากับ $v-1$
นอกจากนี้ จะเห็นได้ชัดว่าแต่ละทรีตเมนต์อยู่ในบล็อก k บล็อก

จากคุณสมบัติ[4] สำหรับ SBIBD ใดๆ ทำให้เราทราบว่าจำนวนทรีตเมนต์ที่อยู่ในส่วนร่วมระหว่างบล็อก B_0 กับบล็อก B อื่นๆ เท่ากับ λ เสมอ ดังนั้น แต่ละบล็อกใน $(R,\mathcal{R})$ จะมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ $k-\lambda$

ให้ x และ y เป็นสองทรีตเมนต์ใดๆ ใน $S\setminus B_0$ เห็นได้ชัดว่าจำนวนบล็อกใน $(R,\mathcal{R})$ ที่บรรจุ x และ y มีค่าเท่ากับ λ บล็อก ■

ทฤษฎีบทที่ 6 (แผนแบบอนุพัทธ์ หรือ Derived design)

ถ้ามี SBIBD ซึ่งสอดคล้องกับพารามิเตอร์ (v,v,k,k,λ) แล้วจะมี BIBD ซึ่งสอดคล้องกับพารามิเตอร์ดังนี้ $(k,v-1,k-1,\lambda,\lambda-1)$ โดยที่ $\lambda>1$

บทพิสูจน์ สมมติให้ $(S,\mathcal{B})$ เป็น SBIBD ที่มีพารามิเตอร์ (v,v,k,k,λ) และให้ B_0 เป็นบล็อกใดๆ
กำหนดให้ $(D,\mathcal{D})$ เป็นแผนแบบบล็อกใหม่ ซึ่งประกอบด้วย $\mathrm{D}=B_0$ และ $\mathcal{D}=\{B\cap B_0 \mid B\in \mathrm{B}\backslash\{B_0\}\}$
จะได้ว่าจำนวนทรีตเมนต์เท่ากับ k และจำนวนบล็อกทั้งหมดเท่ากับ $v-1$

จากคุณสมบัติ[4] สำหรับ SBIBD ใดๆ ทำให้เราทราบว่าจำนวนทรีตเมนต์ที่อยู่ในส่วนร่วมระหว่างบล็อก B_0 กับบล็อก B อื่นๆ เท่ากับ λ เสมอ ดังนั้น แต่ละบล็อกใน $(D,\mathcal{D})$ จะมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ λ

เนื่องจาก B_0 ไม่ใช่บล็อกสำหรับแผนแบบใหม่นี้ เพราะฉะนั้นแต่ละทรีตเมนต์ที่อยู่ใน D จะมีจำนวนบล็อกที่บรรจุทรีตเมนต์นั้นๆ ลดลง 1 บล็อก (จากแผนแบบเริ่มต้น) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $k-1$ บล็อก

นอกจากนั้น แต่ละสองทรีตเมนต์ที่อยู่ใน D จะมีจำนวนบล็อกที่บรรจุทรีตเมนต์คู่นั้นลดลง 1 บล็อก (จากแผนแบบเริ่มต้น) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\lambda-1$ บล็อก ■

---

[4] ศึกษาคุณสมบัติสำหรับ SBIBD ดังกล่าวนี้ได้จากเอกสารอ้างอิง [10]

บทแทรกที่ 7

ถ้า $v=4t-1$ สามารถเขียนได้ในรูปเลขยกกำลังของจำนวนเฉพาะที่มากกว่า 3 แล้วจะสามารถสร้าง BIBD ให้สอดคล้องกับพารามิเตอร์ต่างๆ ได้ดังต่อไปนี้

(1) $(4t-1, 4t-1, 2t-1, 2t-1, t-1)$

(2) $(4t-1, 4t-1, 2t, 2t, t)$

(3) $(2t, 4t-2, 2t-1, t, t-1)$

(4) $(2t-1, 4t-2, 2t-2, t-1, t-2)$ โดยที่ $t>2$

(5) $(2t-1, 4t-2, 2t, t, t)$ โดยที่ $t>2$

บทพิสูจน์ ข้อที่ (1) โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 2 และทฤษฎีบทที่ 3
ข้อที่ (2) โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 4 และ BIBD จากข้อที่ (1)
ข้อที่ (3) โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 5 และ SBIBD จากข้อที่ (1)
ข้อที่ (4) โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 6 และ SBIBD จากข้อที่ (1) และ
ข้อที่ (5) โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 4 และ BIBD จากข้อที่ (4) ■

ตัวอย่างที่ 3 โดยใช้เซตเชิงผลต่าง $\{\overline{1},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{9}\}$ ในกรุปจำนวนเต็มมอดุโล 11 จะได้ BIBD ต่างๆ ซึ่งสอดคล้องกับพารามิเตอร์ในบทแทรกที่ 7 ดังต่อไปนี้

กำหนดให้ $S=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $R=\{0,2,6,7,8,10\}$, $D=\{1,3,4,5,9\}$ และให้ $(S,\mathcal{B})$, $(R,\mathcal{R})$, $(D,\mathcal{D})$, $(S,\mathcal{B}')$, $(S\setminus R,\mathcal{R}')$,$(S\setminus D,\mathcal{D}')$ เป็นแผนแบบบล็อกซึ่งประกอบด้วย

$\mathcal{B}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{D}$
{1,3,4,5,9}		
{2,4,5,6,10}	{2,6,10}	{4,5}
{3,5,6,7,0}	{6,7,0}	{3,5}
{4,6,7,8,1}	{6,7,8}	{4,1}
{5,7,8,9,2}	{7,8,2}	{5,9}
{6,8,9,10,3}	{6,8,10}	{9,3}
{7,9,10,0,4}	{7,10,0}	{9,4}
{8,10,0,1,5}	{8,10,0}	{1,5}
{9,0,1,2,6}	{0,2,6}	{9,1}
{10,1,2,3,7}	{10,2,7}	{1,3}
{0,2,3,4,8}	{0,2,8}	{3,4}

$\mathcal{B}'$	$\mathcal{R}'$	$\mathcal{D}'$
{0,2,6,7,8,10}		
{1,3,7,8,9,0}	{1,3,9}	{7,8,0}
{2,4,8,9,10,1}	{4,9,1}	{2,8,10}
{3,5,9,10,0,2}	{3,5,9}	{10,0,2}
{4,6,10,0,1,3}	{4,1,3}	{6,10,0}
{5,7,0,1,2,4}	{5,1,4}	{7,0,2}
{6,8,1,2,3,5}	{1,3,5}	{6,8,2}
{7,9,2,3,4,6}	{9,3,4}	{7,2,6}
{8,10,3,4,5,7}	{3,4,5}	{8,10,7}
{9,0,4,5,6,8}	{9,4,5}	{0,6,8}
{10,1,5,6,7,9}	{1,5,9}	{10,6,7}

จะได้ว่า

$(S,\mathcal{B})$ เป็น SBIBD ซึ่งสอดคล้องกับพารามิเตอร์ (11,11,5,5,2) ในบทแทรกที่ 7 ข้อที่ (1)

$(R,\mathcal{R})$ เป็น BIBD ซึ่งสอดคล้องกับพารามิเตอร์ (6,10,5,3,2) ในบทแทรกที่ 7 ข้อที่ (3)

$(D,\mathcal{D})$ เป็น BIBD ซึ่งสอดคล้องกับพารามิเตอร์ (5,10,4,2,1) ในบทแทรกที่ 7 ข้อที่ (4)

$(S,\mathcal{B}')$ เป็น SBIBD ซึ่งสอดคล้องกับพารามิเตอร์ (11,11,6,6,3) ในบทแทรกที่ 7 ข้อที่ (2)

$(S\backslash R,\mathcal{R}')$ เป็น BIBD สอดคล้องกับพารามิเตอร์ (5,10,6,3,3) ในบทแทรกที่ 7 ข้อที่ (5)

$(S\backslash D,\mathcal{D}')$ เป็น BIBD สอดคล้องกับพารามิเตอร์ (6,10,5,3,2) ในบทแทรกที่ 7 ข้อที่ (3) □

จากทฤษฎีบทข้างต้น เป็นการสร้าง BIBD ใหม่จาก BIBD ที่มีอยู่เดิม โดยที่จำนวนทรีตเมนต์ลดลงหรือเท่าเดิม ในทฤษฎีบทสุดท้ายนี้เรากำลังจะอธิบายวิธีการสร้าง BIBD ใหม่จาก BIBD เดิม ซึ่งสอดคล้องกับพารามิเตอร์ในบทแทรกที่ 7 ข้อที่ (5) ในกรณีที่มีจำนวนทรีตเมนต์เพิ่มขึ้น 1 ทรีตเมนต์

ทฤษฎีบทที่ 8

กำหนดให้ $(S,\mathcal{B})$ เป็น BIBD ซึ่งสอดคล้องกับพารามิเตอร์ ($2t-1$, $4t-2$, $2t$, t, t)

ถ้ามีเซตของบล็อก $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขสองประการ ดังนี้

(i) $|\mathcal{B}_1| = 2t-1$ และ

(ii) สำหรับทุกทรีตเมนต์ x ใดๆ ใน S จะได้ว่า $\left|\{B \mid x \in B; B \in \mathcal{B}_1\}\right| = t$

แล้วจะมี BIBD ซึ่งสอดคล้องกับพารามิเตอร์ ($2t$, $4t-2$, $2t-1$, t, $t-1$)

บทพิสูจน์ กำหนดให้ $(S,\mathcal{B})$ เป็น BIBD ใดๆ ที่มีพารามิเตอร์ ($2t-1$, $4t-2$, $2t$, t, t)
และ $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$ เป็นเซตของบล็อกที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (i) และ (ii)
และให้ $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B} \backslash \mathcal{B}_1$ จะได้ว่า $\mathcal{B}_2$ สอดคล้องกับเงื่อนไข (i) และ (ii) ด้วยเช่นกัน

ให้ x_0 เป็นทรีตเมนต์ใดๆ ที่ไม่ใช่สมาชิกของ S และกำหนดให้ $(S',\mathcal{B}')$ เป็นแผนแบบบล็อกใหม่ โดยที่ $S' = S \cup \{x_0\}$ และ $\mathcal{B}' = \{B \mid B \in \mathcal{B}_1\} \cup \{S' \backslash B \mid B \in \mathcal{B}_2\}$
จะได้ว่าจำนวนทรีตเมนต์มีค่าเท่ากับ $(2t-1)+1=2t$ และจำนวนบล็อกทั้งหมดเท่ากับ $2(2t-1) = 4t-2$
สำหรับทุกบล็อก $B \in \mathcal{B}_2$ จะได้ว่า $\left|S' \backslash \mathcal{B}\right| = t$ ดังนั้น แต่ละบล็อกใน $(S',\mathcal{B}')$ จะมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ t นอกจากนี้ จะได้ว่าจำนวนบล็อกทั้งหมดที่บรรจุ x_0 มีค่าเท่ากับ $2t-1$ บล็อก

ให้ y เป็นทรีตเมนต์ใดๆ ใน S เพราะว่า $\mathcal{B}_1$ สอดคล้องกับเงื่อนไข (i) และ (ii) ดังนั้น จำนวนบล็อกใน $\mathcal{B}_1$ ซึ่งบรรจุ y มีทั้งสิ้น t บล็อก ในทำนองเดียวกัน เนื่องจาก $\mathcal{B}_2$ สอดคล้องกับเงื่อนไข (i) และ (ii) ทำให้ได้ว่าจำนวนบล็อกใน $\mathcal{B}_2$ ซึ่งบรรจุ y มีทั้งสิ้น t บล็อก ดังนั้น จำนวนบล็อกใน $\mathcal{B}_2$ ซึ่งไม่บรรจุ y มีทั้งสิ้น $t-1$ บล็อก เพราะฉะนั้นจำนวนบล็อกใน $(S',\mathcal{B}')$ ซึ่งบรรจุ y มีค่าเท่ากับ $t+(t-1) = 2t-1$ บล็อก

ต่อไปจะแสดงว่าสำหรับสองทรีตเมนต์ใดๆ ใน $(S',\mathcal{B}')$ จำนวนบล็อกที่บรรจุทรีตเมนต์คู่นั้นมีค่าเท่ากับ $t-1$ บล็อกเท่ากัน กำหนดให้ y และ z เป็นสองทรีตเมนต์ใดๆ ใน S (ซึ่งไม่ใช่ x_0)

ให้ λ_1 (และ λ_2) แทนจำนวนบล็อกซึ่งบรรจุทั้ง y และ z ใน $\mathcal{B}_1$ (และ $\mathcal{B}_2$ ตามลำดับ) เห็นได้ชัดว่าจำนวนบล็อกใน $\mathcal{B}_2$ ซึ่งไม่บรรจุ y และ z มีค่าเท่ากับ

$$(2t-1)-t-t+\lambda_2=\lambda_2-1$$

เพราะฉะนั้น จำนวนบล็อกทั้งหมดใน $(S',\mathcal{B}')$ ที่บรรจุทั้ง y และ z ซึ่งมีค่าเท่ากับผลรวมระหว่างจำนวนบล็อกใน $\mathcal{B}_1$ ที่บรรจุทั้ง y และ z กับจำนวนบล็อกใน $\mathcal{B}_2$ ที่ไม่บรรจุ y และ z จะมีค่าเท่ากับ $\lambda_1+(\lambda_2-1)=t-1$ นอกจากนี้ เราได้ว่าจำนวนบล็อกใน $(S',\mathcal{B}')$ ที่บรรจุทั้ง x_0 และ y จะเท่ากับจำนวนบล็อกใน $\mathcal{B}_2$ ที่ไม่บรรจุ y ซึ่งมีค่าเท่ากับ $t-1$ บล็อก ■

สรุป

ในทฤษฎีบทที่ 8 เราได้สร้าง BIBD ใหม่จาก BIBD เดิมในกรณีที่มีทรีตเมนต์เพิ่มขึ้น 1 ทรีตเมนต์ โดยต้องการ BIBD เดิม ซึ่งสอดคล้องกับพารามิเตอร์ $(2t-1, 4t-2, 2t, t, t)$ และมีเงื่อนไขสำคัญคือ

"มีบล็อกเป็นจำนวนครึ่งหนึ่งของทั้งหมด ซึ่งแต่ละทรีตเมนต์จะต้องอยู่ในบล็อกเหล่านี้ เป็นจำนวน t บล็อก"

โดยการนำบล็อกที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าวจาก BIBD เดิมมาใช้เป็นบล็อกสำหรับ BIBD ใหม่ และนำส่วนเติมเต็มของบล็อกที่ไม่ใช้จาก BIBD เดิมมาใช้เป็นบล็อกสำหรับ BIBD ใหม่นี้ด้วย ซึ่งจะทำให้เกิด BIBD ใหม่ที่สอดคล้องกับพารามิเตอร์ดังนี้ $(2t, 4t-2, 2t-1, t, t-1)$ จากขั้นตอนดังกล่าวทำให้เราสามารถนำข้อมูลจากการทดลองเดิมส่วนหนึ่งมาใช้ในการทดลองครั้งใหม่ได้

นอกจากนี้แล้ว เราพบว่าขั้นตอนการสร้าง BIBD ใหม่นี้เป็นการจัดทรีตเมนต์ลงในบล็อกใหม่เพียงครึ่งหนึ่งเท่านั้น โดยที่จำนวนบล็อกทั้งหมดและจำนวนสมาชิกในแต่ละบล็อกไม่มีการเปลี่ยนแปลง นั่นคือ ใน BIBD ทั้งสองนั้นมีจำนวนบล็อกทั้งหมดเท่ากับ $4t-2$ บล็อก และทุกบล็อกมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ t ซึ่งจะช่วยให้ประหยัดค่าใช้จ่ายในการทดลองและไม่ต้องเสียเวลาในการเตรียมบล็อกและการจัดแบ่งบล็อกใหม่เพื่อใช้ในการทดลองครั้งใหม่นั่นเอง

เอกสารอ้างอิง

1. จิราวัลย์ จิตรถเวช. 2552. แผนแบบการทดลอง. กรุงเทพฯ. สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์. หน้า 1.
2. Bailey, R. A. 2008. Design of Comparative Experiments. New York. Cambridge University Press. p. 19.
3. Yates, F. 1935. Complex Experiments. *Journal of the Royal Statistical Society-Supplement* 2: 181-247.
4. Hall, P. 1935. On Representations of Subsets. *Journal of the London Mathematical Society* 10: 26-30.
5. Fisher, R. A. 1940. An Examination of the Different Possible Solutions of a Problem in Incomplete Blocks. *Annals of Eugenics* 10: 52-75.

6. Houghten, S. K., Thiel, L. H., Janssen, J., and Lam, W. H. 2001. There is no (46,6,1) Block Design. *Journal of Combinatorial Designs* 9: 60-71.
7. Bilous, R., Lam, C. W. H., Thiel, L. H., Li, P. C., Rees, G. H., Radziszowski, S. P., Holzmann, W. H., and Kharaghani, H. 2007. There is no 2-(22,8,4) Block Design. *Journal of Combinatorial Designs* 15: 262-267.
8. Paley, R. E. A. C. 1933. On Orthogonal Matrices. *Journal of Mathematical Physics* 12: 311-320.
9. Wallis, W. D. 2007. Introduction to Combinatorial Designs. 2^{nd} Edition. New York. Champman & Hall. p. 64.
10. Ryser, H. J. 1952. Matrices with Integer Elements in Combinatorial Investigations. *The American Journal of Mathematics* 74: 769-773.

ได้รับบทความวันที่ 15 มีนาคม 2556
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 9 พฤษภาคม 2556