บทความวิจัย

การปรับปรุงขอบเขตไม่เอกรูปบนค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ของฟังก์ชันการแจกแจงปัวซงและทวินามนิเสธ

คณินทร์ ธีรภาพโอฬาร* และ เกษร ใจอุ่น

บทคัดย่อ

ในการศึกษาครั้งนี้ เราใช้วิธีสไตน์เชนหาขอบเขตไม่เอกรูปแบบใหม่ของค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธที่มีพารามิเตอร์ n ($n \in \mathbb{N}$) และ p ($0<p<1$) และฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มปัวซงที่มีค่าเฉลี่ย $\lambda = nq = n(1-p)$ ขอบเขตไม่เอกรูปแบบใหม่นี้ได้รับการปรับปรุงเพื่อใช้วัดความถูกต้องของการประมาณปัวซงได้ดีขึ้น นอกจากนี้เราจะได้ว่าขอบเขตไม่เอกรูปในการศึกษาครั้งนี้ดีกว่าขอบเขตไม่เอกรูปในงานวิจัยของ Teerapabolarm [3] ทั้งในเชิงทฤษฎีและเชิงตัวเลข

คำสำคัญ: การแจกแจงทวินามนิเสธ การแจกแจงปัวซง การประมาณปัวซง วิธีสไตน์เชน

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

*ผู้นิพนธ์ประสานงาน, e-mail: kanint@buu.ac.th

An Improvement of Non-Uniform Bound on the Poisson-Negative Binomial Absolute Error

Kanint Teerapabolarn* **and Keson Jaioun**

ABSTRACT

In this study, we use the Stein-Chen method to determine a new non-uniform bound of the absolute error between the negative binomial distribution function with parameters n ($n \in \mathbb{N}$) and p ($0<p<1$) and the Poisson distribution function with mean $\lambda = nq = n(1-p)$. The new bound is improved to be more appropriate for measuring the accuracy of Poisson approximation. Moreover, by theoretical and numerical comparison, the bound obtained in this study is better than the bound reported in Teerapabolarn [3].

Keywords: Negative binomial distribution, Poisson distribution, Poisson approximation, Stein Chen method

Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University

*Corresponding author, e-mail: kanint@buu.ac.th

บทนำ

การแจกแจงทวินามนิเสธ (negative binomial distribution) ที่มีพารามิเตอร์ n ($n \in \mathbb{N}$) และ p ($0<p<1$) เป็นการแจกแจงวิยุต (discrete distribution) แบบหนึ่งที่มีการศึกษาและประยุกต์ในเรื่องที่เกี่ยวข้องกับความน่าจะเป็นและสถิติ โดยทั่วไปการแจกแจงนี้ หมายถึง การแจกแจงของจำนวนความล้มเหลว (failure) ก่อนเกิดความสำเร็จ (success) ครั้งที่ n ในลำดับของการทดลองย่อยแบร์นูลลี (Bernoulli trial) ที่เป็นอิสระต่อกัน โดยที่ความน่าจะเป็นของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในแต่ละการทดลองย่อยมีค่าเท่ากับ p และความน่าจะเป็นของความล้มเหลวที่เกิดขึ้นในแต่ละการทดลองย่อยมีค่าเท่ากับ $q = 1 - p$ ในกรณีที่ $n = 1$ เราจะเรียกการแจกแจงนี้ว่า การแจกแจงเรขาคณิต (geometric distribution) ที่มีพารามิเตอร์ p ซึ่งเป็นการแจกแจงของจำนวนความล้มเหลวก่อนเกิดความสำเร็จครั้งแรก

ให้ $Y_1,...,Y_n$ เป็นตัวแปรสุ่ม n ตัว ที่อิสระต่อกัน และแต่ละ Y_i มีการแจกแจงเรขาคณิตแบบเดียวกัน นั่นคือ $P(Y_i = y) = pq^y$ เมื่อ $y = 0,1...$ สำหรับทุก $i = 1,2,...,n$ ให้ $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ แล้วจะได้ว่า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงทวินามนิเสธที่มีพารามิเตอร์ n และ p โดยมีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น (probability mass function) ดังนี้

$$p_X(x) = \binom{n+x-1}{x} q^x p^n, \quad x = 0,1,... \tag{1}$$

และมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเป็น $E(X) = \frac{nq}{p}$ และ $Var(X) = \frac{nq}{p^2}$ ตามลำดับ

เป็นที่ทราบกันดีว่า ถ้า n มีค่าเข้าใกล้อนันต์ ($n \to \infty$) และ q มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ($q \to 0$) ในขณะที่ $\lambda = \frac{nq}{p}$ มีค่าจำกัด ($0 < \lambda < \infty$) แล้วการแจกแจงทวินามนิเสธที่มีพารามิเตอร์ n และ p จะลู่เข้าสู่การแจกแจงปัวซงที่มีค่าเฉลี่ย $\lambda = \frac{nq}{p}$ ดังนั้นเราจะได้ว่าการแจกแจงทวินามนิเสธจะสามารถประมาณได้ด้วยการแจกแจงปัวซงที่มีค่าเฉลี่ย $\lambda = \frac{nq}{p}$ เมื่อ n มีค่ามาก และ q มีค่าน้อย ในทำนองเดียวกันฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธ $\mathbb{N}_{n,p}(x) = \sum_{j=0}^{x} \binom{n+j-1}{j} q^j p^n$ สามารถประมาณได้ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มปัวซง $\mathbb{P}_\lambda(x) = \sum_{j=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}$ เมื่อ $x = 0,1,...$ เช่นกัน ซึ่งในกรณีนี้ Teerapabolarn and Wongkasem [1] ได้ใช้วิธีสไตน์เชน (Stein-Chen method) สร้างขอบเขตไม่เอกรูปสำหรับค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธและตัวแปรสุ่มปัวซงสำหรับ $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ดังนี้

$$\left| \mathbb{N}_{n,p}(x_0) - \mathbb{P}_\lambda(x_0) \right| \le \min\left\{ p, \frac{1}{(x_0+1)} \right\} (e^\lambda - 1) \frac{q}{p} \tag{2}$$

พิจารณาฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นในสมการ (1) เราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
P(X=x) &= \frac{(n+x-1)!}{x!(n-1)!} q^x p^n ,\ x = 0,1,.. \\
&= \begin{cases} p^n & ,x=0 \\ \dfrac{(n+x-1)\cdots nq^x p^n}{x!} & ,x=1,2,... \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(1-\dfrac{nq}{n}\right)^n & ,x=0 \\ \left(1-\dfrac{nq}{n}\right)^n \dfrac{(nq)^x}{x!}\left\{\dfrac{(n+x-1)}{n}\cdots\dfrac{n}{n}\right\} & ,x=1,2,... \end{cases}
\end{aligned} \tag{3}
$$

จากสมการ (3) พบว่า ถ้า $n \to \infty$ และ $q \to 0$ ในขณะที่ nq มีค่าจำกัด ($0<nq<\infty$) แล้วจะได้ว่า $p_X(x) \to \frac{e^{-nq}(nq)^x}{x!}$ สำหรับทุก $x = 0,1,...$ แสดงว่าถ้า n มีค่ามาก และ q มีค่าน้อยเข้าใกล้ศูนย์ในขณะที่ $\lambda = nq$ มีค่าจำกัด แล้วการแจกแจงทวินามนิเสธจะลู่เข้าสู่การแจกแจงปัวซงที่มีค่าเฉลี่ย $\lambda = nq$ ได้เช่นเดียวกัน ดังที่ได้มีการกล่าวไว้ใน Johnson *et al.* [2] ดังนั้นนอกจากการประมาณฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธด้วยฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มปัวซงที่มีค่าเฉลี่ย $\lambda = \frac{nq}{p}$ แล้ว การประมาณดังกล่าวสามารถใช้ได้กับค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มปัวซง $\lambda = nq$ ได้เช่นกัน และในกรณีนี้ Teerapabolarn [3] ได้ใช้วิธีสไตน์เชนสร้างขอบเขตไม่เอกรูปสำหรับค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธและตัวแปรสุ่มปัวซงสำหรับ n ($n \in \mathbb{N}$) เป็นดังนี้

$$\left|\mathbb{N}_{n,p}(x_0) - \mathbb{P}_\lambda(x_0)\right| \le \min\left\{1, \frac{1}{p(x_0+1)}\right\}(e^\lambda - 1)q \tag{4}$$

ซึ่งขอบเขตไม่เอกรูปนี้ดีกว่า (มีค่าน้อยกว่า) ขอบเขตไม่เอกรูปในอสมการ (2) อย่างไรก็ตาม จากการศึกษางานวิจัยของคณินทร์ ธีรภาพโอฬาร [4] เราพบว่าขอบเขตไม่เอกรูปในอสมการ (4) สามารถปรับปรุงให้ดีและมีความเหมาะสมมากขึ้นได้ ดังนั้นจุดมุ่งหมายของงานวิจัยนี้ คือ ต้องการปรับปรุงขอบเขตไม่เอกรูปของการประมาณฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธด้วยฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มปัวซงที่มีค่าเฉลี่ย $\lambda = nq$ ในอสมการ (4) ให้ดีและมีความเหมาะสมมากยิ่งขึ้น และวิธีที่นำมาใช้ปรับปรุงขอบเขตไม่เอกรูป คือ วิธีสไตน์เชน เช่นเดียวกัน

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อปรับปรุงขอบเขตไม่เอกรูปของค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธและตัวแปรสุ่มปัวซง

2. เพื่อเปรียบเทียบของเขตไม่เอกรูปของค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ที่ได้ปรับปรุงและขอบเขตไม่เอกรูปในอสมการ (4)

วิธีดำเนินการวิจัย

วิธีที่เราใช้ในการปรับปรุงขอบเขตไม่เอกรูปของการประมาณฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธด้วยฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มปัวซงที่มีค่าเฉลี่ย $\lambda = nq$ คือ วิธีสไตน์เชน ซึ่งเป็นวิธีเดียวกับที่ใช้ในงานวิจัยของ Teerapabolarn and Wongkasem [1] และ Teerapabolarn [3] วิธีนี้เริ่มต้นด้วยสมการของสไตน์ (Stein's equation) สำหรับการแจกแจงปัวซงที่มีค่าเฉลี่ย $\lambda > 0$ ดังนี้

$$\lambda f(x+1) - xf(x) = h(x) - \wp_\lambda(h) \tag{5}$$

โดยที่ $\wp_\lambda(h) = e^{-\lambda}\sum_{\ell=0}^{\infty} h(\ell)\frac{\lambda^\ell}{\ell!}$ และ f และ h เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีขอบเขตที่นิยามบนเซต $\mathbb{N}\cup\{0\}$

สำหรับ x_0 ให้ $\in \mathbb{N}\cup\{0\}$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$h_{x_0}(x) = \begin{cases} 1\,, & x \le x_0 \\ 0\,, & x > x_0 \end{cases}$$

ซึ่งคณินทร์ ธีรภาพโอฬาร [4] ได้หาผลเฉลย f เมื่อแทน h ด้วย h_{x_0} ในสมการ (5) เป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)!\left[\left(\sum_{j=0}^{x-1}\frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=x_0+1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-x}}{k!}\right)\right] & ,x \le x_0 \\ (x-1)!\left[\left(\sum_{j=0}^{x_0}\frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=x}^{\infty}\frac{\lambda^{k-x}}{k!}\right)\right] & ,x > x_0 \\ 0 & ,x = x_0 \end{cases} \tag{6}$$

ซึ่งจะสังเกตได้ว่า $f(x) \ge 0$ สำหรับทุกค่าของ $x_0 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

ต่อไปเราจะสร้างบทตั้ง (lemma) เพื่อช่วยพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก (main theorem) ดังนี้

บทตั้ง 1 ให้ $x_0 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ แล้วจะได้ว่า

$$\sup_{x\ge 2} f(x) \le \frac{\lambda^{-1}\left(e^\lambda - \lambda - 1\right)}{x_0 + 1}\max\left\{1, 2\lambda^{-1}\right\} \tag{7}$$

พิสูจน์ เราจะแสดงว่าอสมการ (7) เป็นจริงโดยแบ่งการแสดงเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1: $2 \le x \le x_0$

โดยสมการ (6) และอสมการ (2.7) ใน Teerapabolarn [5] เราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f(x) &\le f(x_0) \\
&= (x_0-1)!\left[\left(\sum_{j=0}^{x_0-1}\frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=x_0+1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-x_0}}{k!}\right)\right] \\
&\le (x_0-1)!\sum_{k=x_0+1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-x_0}}{k!} \\
&= \frac{(x_0-1)!\lambda}{(x_0+1)!}+\frac{(x-1)!\lambda^2}{(x_0+2)!}+\cdots \\
&= \frac{\lambda}{x_0(x_0+1)}+\frac{\lambda^2}{x_0(x_0+1)(x_0+2)}+\cdots \\
&\le \frac{\lambda^{-1}}{x_0+1}\left\{\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\cdots\right\} \\
&= \frac{\lambda^{-1}(e^{\lambda}-\lambda-1)}{x_0+1}
\end{aligned}
$$

กรณีที่ 2: $2\le x$ และ $x_0+1\le x$
โดยสมการ (6) เราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-1)!\left[\left(\sum_{j=0}^{x_0}\frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=x}^{\infty}\frac{\lambda^{k-x}}{k!}\right)\right] \\
&\le (x-1)!\sum_{k=x}^{\infty}\frac{\lambda^{k-x}}{k!} \\
&= (x-1)!\left\{\frac{1}{x!}+\frac{\lambda}{(x+1)!}+\frac{\lambda^2}{(x+2)!}+\cdots\right\} \\
&\le \frac{1}{x_0+1}\left\{1+\frac{\lambda}{x+1}+\frac{\lambda^2}{(x+1)(x+2)}+\cdots\right\} \\
&\le \frac{1}{x_0+1}\left\{1+\frac{\lambda}{3}+\frac{\lambda^2}{12}+\cdots\right\} \\
&\le \frac{2\lambda^{-2}}{x_0+1}\left\{\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\frac{\lambda^4}{4!}+\cdots\right\} \\
&= \frac{2\lambda^{-2}(e^{\lambda}-\lambda-1)}{x_0+1}
\end{aligned}
$$

ดังนั้นจากทั้ง 2 กรณี เราจะได้อสมการ (7) □

บทตั้ง 2 ให้ $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $\lambda = nq$ แล้วจะได้ว่า

$$\mathbb{P}_\lambda(x_0) - \mathbb{N}_{n,p}(x_0) \le 1 - e^{\lambda} p^n \tag{8}$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\lambda(x_0) - \mathbb{N}_{n,p}(x_0) &= \sum_{k=0}^{x_0} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} - \sum_{k=0}^{x_0} \binom{n+k-1}{k} q^k p^n \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{x_0} \frac{\lambda^k}{k!} - p^n \sum_{k=0}^{x_0} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} q^k \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{x_0} \frac{\lambda^k}{k!} - p^n \left\{1 + \sum_{k=1}^{x_0} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} q^k \right\} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{x_0} \frac{\lambda^k}{k!} - p^n \left\{1 + \sum_{k=1}^{x_0} \frac{(nq)^k}{k!} \frac{(n+k-1)}{n} \cdots \frac{n}{n} \right\} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{x_0} \frac{\lambda^k}{k!} - p^n \left\{1 + \sum_{k=1}^{x_0} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{(n+k-1)}{n} \cdots \frac{n}{n} \right\} \\
&\le e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{x_0} \frac{\lambda^k}{k!} - p^n \sum_{k=0}^{x_0} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{x_0} \frac{\lambda^k}{k!} - \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}} p^n \sum_{k=0}^{x_0} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= (1 - e^{\lambda} p^n) e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x_0} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&\le 1 - e^{\lambda} p^n
\end{aligned}$$

ดังนั้น เราได้อสมการ (8) ตามต้องการ □

ผลการวิจัย

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ได้แสดงผลลัพธ์ที่อยู่ในรูปของขอบเขตไม่เอกรูปของค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธและฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มปัวซง

ทฤษฎีบท 1 ให้ $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $\lambda = nq$ แล้วจะได้ว่า

$$\left|\mathbb{N}_{n,p}(x_0) - \mathbb{P}_\lambda(x_0)\right| \le \min\left\{1 - e^{\lambda} p^n, \frac{e^{\lambda} - \lambda - 1}{p(x_0+1)} \max\left(q, \frac{2}{n}\right)\right\} \tag{9}$$

พิสูจน์ จากการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1 ของคณินทร์ ธีรภาพโอฬาร [4] เราจะได้ว่า

$$-\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)pq^k \sup_{x\geq 2} f(x)\right\} \leq \mathbb{N}_{n,p}(x_0) - \mathbb{P}_{\lambda}(x_0) \leq 0$$

หรือ

$$0 \leq \mathbb{P}_{\lambda}(x_0) - \mathbb{N}_{n,p}(x_0) \leq \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)pq^k \sup_{x\geq 2} f(x)\right\} \tag{10}$$

โดยที่ f นิยามเช่นเดียวกับสมการ (6) และโดยบทตั้ง 1 เราจะได้

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 2}(k-1)pq^k \sup_{x\geq 2} f(x) &\leq \frac{\lambda^{-1}(e^{\lambda}-\lambda-1)}{x_0+1}\max\left\{1, 2\lambda^{-1}\right\}\sum_{k\geq 2}(k-1)pq^k \\ &= \frac{\lambda^{-1}(e^{\lambda}-\lambda-1)}{x_0+1}\max\left\{1, 2\lambda^{-1}\right\}\frac{q^2}{p} \\ &= \frac{e^{\lambda}-\lambda-1}{(x_0+1)np}\max\left\{q, \frac{2}{n}\right\} \qquad (11)\end{aligned}$$

โดยอสมการ (10) และ (11) เราจะได้

$$0 \leq \mathbb{P}_{\lambda}(x_0) - \mathbb{N}_{n,p}(x_0) \leq \frac{e^{\lambda}-\lambda-1\max\{q, 2/n\}}{(x_0+1)p} \tag{12}$$

และจากบทตั้ง 2 จะได้ว่า

$$0 \leq \mathbb{P}_{\lambda}(x_0) - \mathbb{N}_{n,p}(x_0) \leq 1 - e^{\lambda}p^n \tag{13}$$

ดังนั้น โดยอสมการ (12) และ (13) เราจะได้

$$0 \leq \mathbb{P}_{\lambda}(x_0) - \mathbb{N}_{n,p}(x_0) \leq \min\left\{1 - e^{\lambda}p^n, \frac{e^{\lambda}-\lambda-1}{p(x_0+1)}\max\left(q, \frac{2}{n}\right)\right\}$$

ซึ่งทำให้เราได้อสมการ (9) □

หมายเหตุ เมื่อเปรียบเทียบขอบเขตไม่เอกรูปของผลลัพธ์ในอสมการ (9) และขอบเขตไม่เอกรูปของผลลัพธ์ในอสมการ (4) เราจะได้ว่าขอบเขตในอสมการ (9) ดีกว่าขอบเขตในอสมการ (4) สำหรับทุก $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 1 สำหรับ $\lambda = nq$ แล้วจะได้ว่า

1. $(e^{\lambda}-1)q > 1 - e^{\lambda}p^n$
2. $(e^{\lambda}-1)q > (e^{\lambda}-\lambda-1)\max\left\{q, \frac{2}{n}\right\}$

พิสูจน์ ดูพิสูจน์ในบทแทรก 3.2 ของคณินทร์ ธีรภาพโอฬาร [6] □

ตัวอย่างเชิงตัวเลข

เพื่อให้เห็นถึงการใช้ผลลัพธ์ของการประมาณได้อย่างชัดเจน เราจึงได้นำเสนอผลลัพธ์เชิงตัวเลขบางส่วนของการประมาณฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธด้วยฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มปัวซง และผลลัพธ์เชิงตัวเลขต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของผลลัพธ์ในทฤษฎีบท 1

1. $n = 100$ และ $p = 0.999$ ดังนั้น $\lambda = 0.1$ และผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้คือ

$$\left|\mathbb{N}_{n,p}(x_0) - \mathbb{P}_\lambda(x_0)\right| \le \begin{cases} 0.000050032, & x_0 = 0,1 \\ \dfrac{0.000103522}{x_0+1}, & x_0 \ge 2 \end{cases}$$

ซึ่งดีกว่าผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้จากอสมการ (4)

$$\left|\mathbb{N}_{n,p}(x_0) - \mathbb{P}_\lambda(x_0)\right| \le \begin{cases} 0.000105171, & x_0 = 0 \\ 0.000052638, & x_0 = 1 \\ \dfrac{0.000105276}{x_0+1}, & x_0 \ge 2 \end{cases}$$

2. $n = 500$ และ $p = 0.999$ ดังนั้น $\lambda = 0.5$ และผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้คือ

$$\left|\mathbb{N}_{n,p}(x_0) - \mathbb{P}_\lambda(x_0)\right| \le \begin{cases} 0.000250136, & x_0 = 0,1 \\ \dfrac{0.000595481}{x_0+1}, & x_0 \ge 2 \end{cases}$$

ซึ่งดีกว่าผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้จากอสมการ (4)

$$\left|\mathbb{N}_{n,p}(x_0) - \mathbb{P}_\lambda(x_0)\right| \le \begin{cases} 0.000648721, & x_0 = 0 \\ 0.000324685, & x_0 = 1 \\ \dfrac{0.000649371}{x_0+1}, & x_0 \ge 2 \end{cases}$$

3. $n = 100$ และ $p = 0.99$ ดังนั้น $\lambda = 1.0$ และผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้คือ

$$\left|\mathbb{N}_{n,p}(x_0) - \mathbb{P}_\lambda(x_0)\right| \le \begin{cases} 0.005020938, & x_0 = 0,1 \\ \dfrac{0.014510744}{x_0+1}, & x_0 \ge 2 \end{cases}$$

ซึ่งดีกว่าผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้จากอสมการ (1.4)

$$\left|\mathbb{N}_{n,p}(x_0) - \mathbb{P}_\lambda(x_0)\right| \le \begin{cases} 0.017182818\ , x_0 = 0 \\ 0.008678191\ , x_0 = 1 \\ \dfrac{0.017356382}{x_0+1}, x_0 \ge 2 \end{cases}$$

4. $n = 250$ และ $p = 0.99$ ดังนั้น $\lambda = 2.5$ และผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้คือ

$$\left|\mathbb{N}_{n,p}(x_0) - \mathbb{P}_\lambda(x_0)\right| \le \begin{cases} 0.012505116\ , 0 \le x_0 \le 6 \\ \dfrac{0.014510744}{x_0+1}, x_0 \ge 7 \end{cases}$$

ซึ่งดีกว่าผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้จากอสมการ (1.4)

$$\left|\mathbb{N}_{n,p}(x_0) - \mathbb{P}_\lambda(x_0)\right| \le \begin{cases} 0.111824940\ , x_0 = 0 \\ 0.056477242\ , x_0 = 1 \\ \qquad \vdots \\ 0.016136355\ , x_0 = 6 \\ \dfrac{0.112954484}{x_0+1}, x_0 \ge 7 \end{cases}$$

5. $n = 1000$ และ $p = 0.99$ ดังนั้น $\lambda = 10$ และผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้คือ

$$\left|\mathbb{N}_{n,p}(x_0) - \mathbb{P}_\lambda(x_0)\right| \le \begin{cases} 0.049089996\ , 0 \le x_0 \le 4529 \\ \dfrac{222.3784424}{x_0+1}, x_0 \ge 4530 \end{cases}$$

ซึ่งดีกว่าผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้จากอสมการ (1.4)

$$\left|\mathbb{N}_{n,p}(x_0) - \mathbb{P}_\lambda(x_0)\right| \le \begin{cases} 220.254657948\ , x_0 = 0 \\ 111.239726236\ , x_0 = 1 \\ \qquad \vdots \\ 0.049112462\ , x_0 = 4529 \\ \dfrac{222.479452473}{x_0+1}, x_0 \ge 4530 \end{cases}$$

พิจารณาผลลัพธ์เชิงตัวเลขของทั้งห้าตัวอย่าง เราพบว่าขอบเขตของค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์จะแคบในกรณีที่ q มีค่าน้อย (มีค่าเข้าใกล้ 0) ซึ่งแสดงว่าผลลัพธ์ของการประมาณปัวซงนี้จะมีความถูกต้องเหมาะสมมากขึ้น เมื่อ q มีค่าน้อย และเมื่อดูผลการเปรียบเทียบเชิงตัวเลขของขอบเขตไม่เอกรูปในแต่ละตัวอย่าง เราพบว่าขอบเขตไม่เอกรูปในทฤษฎีบท 1 ดีกว่า (น้อยกว่า) ขอบเขตไม่เอกรูปในอสมการ (4) โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ λ มีค่ามากขึ้น

สรุปผลการวิจัย

ในการศึกษาครั้งนี้ เราได้ปรับปรุงผลลัพธ์ของการประมาณฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธที่มีพารามิเตอร์ n และ p ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มปัวซงที่มีค่าเฉลี่ย $\lambda = nq$ ผลลัพธ์ดังกล่าวอยู่ในรูปของค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธและฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มปัวซงและขอบเขตไม่เอกรูป ซึ่งเราพบว่าเมื่อขอบเขตไม่เอกรูปของค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์มีค่าน้อย หรือมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ (q หรือ λ มีค่าน้อย) จะทำให้การประมาณปัวซงมีความถูกต้องและเหมาะสมมากขึ้น และเมื่อเปรียบเทียบขอบเขตของการประมาณในเชิงทฤษฎีและเชิงตัวเลขเราพบว่าขอบเขตไม่เอกรูปในการศึกษาครั้งนี้ดีกว่า (น้อยกว่า) ขอบเขตไม่เอกรูปของ Teerapabolarn [3] สำหรับทุกค่าของ $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณกรรมการผู้อ่านผลงานวิจัยที่ได้กรุณาให้คำแนะนำและแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ จนทำให้ผลงานวิจัยนี้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

เอกสารอ้างอิง

1. Teerapabolarn, K., and Wongkasem, P. 2007. Poisson Approximation for Independent Geometric Random Variables. *International Mathematical Forum* 2: 3211-3218.
2. Johnson, N. L., Koyz, S., and Kemp, A. W. 2005. *Univariate Discrete Distributions.* 3rd Edition. New York. Wiley.
3. Teerapabolarn, K. 2009. A Note on Poisson Approximation for Independent Geometric Random Variables. *International Mathematical Forum* 4: 531-535.
4. คณินทร์ ธีรภาพโอฬาร. 2552. ขอบเขตล่างและบนของความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธและตัวแปรสุ่มปัวซง. *วารสารวิทยาศาสตร์ มข* 37: 92-101.
5. Teerapabolarn, K. 2007. A Bound on the Poisson-Binomial Relative Error. *Statistical Methodology* 4:407-415.
6. คณินทร์ ธีรภาพโอฬาร. 2553. การปรับปรุงขอบเขตของความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธและตัวแปรสุ่มปัวซง. *วารสารวิทยาศาสตร์ มข* 38: 417-427.

ได้รับบทความวันที่ 20 ธันวาคม 2555
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 31 มกราคม 2556