บทความวิชาการ

การจัดก๊วนนักกอล์ฟด้วยจัตุรัสละติน

ศันสนีย์ เติมธนาสมบัติ*, ธนวัฒน์ วิเชียรไพศาล และ จริยา อุ่ยยะเสถียร

บทคัดย่อ

"ปัญหาการจัดก๊วนนักกอล์ฟ" คือ การจัดการแข่งขันกอล์ฟซึ่งมีการแข่งขันหลายรอบ แต่ละรอบจะแบ่งนักกอล์ฟออกเป็นก๊วน โดยที่แต่ละก๊วนมีจำนวนนักกอล์ฟเท่ากัน และมีเงื่อนไขว่านักกอล์ฟแต่ละคู่จะอยู่ในก๊วนเดียวกันได้ไม่เกินหนึ่งครั้งตลอดการแข่งขัน ผู้จัดต้องการจัดการแข่งขันให้ได้จำนวนรอบมากที่สุด ปัญหานี้เริ่มมีการศึกษาตั้งแต่ปี ค.ศ. 1998 ถ้าแต่ละก๊วนมีนักกอล์ฟสามคนปัญหานี้คือปัญหาการจัดกลุ่มทีละสามของเคิร์กแมน สำหรับบทความนี้ได้ศึกษาปัญหาในกรณีพิเศษที่จำนวนนักกอล์ฟในก๊วนเท่ากับจำนวนก๊วน เรานำเสนอวิธีการจัดก๊วนนักกอล์ฟโดยใช้จัตุรัสละตินมาช่วยแก้ปัญหา และให้ข้อสรุปว่าถ้าแต่ละก๊วนมีจำนวนนักกอล์ฟอยู่ในรูปเลขยกกำลังของจำนวนเฉพาะแล้วจะมีคำตอบสำหรับปัญหานี้

คำสำคัญ: ปัญหาการจัดก๊วนนักกอล์ฟ จัตุรัสละติน

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

*ผู้นิพนธ์ประสานงาน, email: sansanee.term@gmail.com

The Social Golfer Problem and Latin Squares

Sansanee Termtanasombat*, Tanawat Wichianpaisarn and Chariya Uiyyasathian

ABSTRACT

The social golfer problem has been considered since 1998. The problem states that how to group golfers into equally members per group and play golf for many rounds such that any two golfers will meet in the same group at most once, what is the maximum number of rounds can it be arranged? It is equivalent to Kirkman triple system, if each group has three members. In this article, we study a special case, the number of members per group equals to the number of groups. We present how to arrange golfers in this special case by using a Latin square and conclude that if the number of members per group is a prime power, then this problem can be solved.

Keywords: social golfer problem, latin square

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, Chulalongkorn University

*Corresponding author, email: sansanee.term@gmail.com

บทนำ

ในการแข่งขันกีฬาแต่ละครั้งเจ้าภาพมีหน้าที่จัดตารางการแข่งขันให้เหมาะสมมากที่สุด เช่น การจัดแข่งขันกอล์ฟหนึ่งรอบจะแบ่งนักกอล์ฟออกเป็นกลุ่ม (เรียกว่าก๊วน) โดยที่จำนวนนักกอล์ฟในแต่ละก๊วนเท่ากัน ในการแข่งขันนักกอล์ฟในก๊วนเดียวกันจะเล่นในหลุมเดียวกัน และดำเนินการแข่งขันไปพร้อมกันกับก๊วนที่เล่นในหลุมอื่น เมื่อเล่นกอล์ฟในหลุมนั้นเสร็จแล้วจึงเวียนเล่นหลุมต่อไปจนครบ การแข่งขันกอล์ฟในรอบต่อไปเจ้าภาพจะจัดก๊วนใหม่โดยที่นักกอล์ฟแต่ละคู่จะไม่อยู่ในก๊วนเดียวกันอีก คำถามที่เกิดขึ้นคือ เจ้าภาพจะจัดการแข่งขันได้มากที่สุดกี่รอบ จะเรียกปัญหานี้ว่า *SGP* ซึ่งย่อมาจาก Social Golfer Problem และชื่อนี้เริ่มต้นมาจากการถามคำถามในเว็บ sci.op-research [1] เมื่อเดือนพฤษภาคมปี ค.ศ. 1998 ซึ่งต้องการแบ่งนักกอล์ฟออกเป็น 8 ก๊วน ก๊วนละ 4 คน จำนวนรอบที่เป็นไปได้มากที่สุด คือ $\lfloor 31/3 \rfloor$ = 10 รอบ คิดโดยพิจารณานักกอล์ฟหนึ่งคนอยู่ในก๊วนเดียวกันกับนักกอล์ฟคนอื่นได้รอบละ 3 คน ไม่นานก็มีผู้ตอบปัญหานี้ว่าสามารถจัดได้ 9 รอบ จนกระทั่งในปี ค.ศ. 2004 อะกวาโด (Aguado) [2] ก็ได้ค้นพบวิธีจัดได้ 10 รอบ

ย้อนกลับไปในปี ค.ศ. 1850 เคิร์กแมน (Kirkman) ได้ถามปัญหาที่คล้ายกับ *SGP* ไว้ในนิตยสาร Lady's and Gentleman's Diary ไว้ว่า

"มีนักเรียนหญิงอยู่ 15 คน ต้องการจัดให้เข้าแถวเดินเข้าชั้นเรียนแถวละ 3 คน จำนวน 5 แถว เป็นเวลา 7 วัน โดยมีเงื่อนไขว่านักเรียนแต่ละคู่จะอยู่ในแถวเดียวกันไม่เกินหนึ่งครั้ง"

เมื่อเปรียบเทียบกันแล้วปัญหานี้คือปัญหา *SGP* โดยที่แบ่งนักกอล์ฟออกเป็น 5 ก๊วน ก๊วนละ 3 คน และจัดแข่งขัน 7 รอบ ซึ่งเคิร์กแมนแสดงวิธีการจัดนักเรียนไว้ดังนี้ [3]

	แถว 1	แถว 2	แถว 3	แถว 4	แถว 5
จันทร์	ABC	DEF	GHI	JKL	MNO
อังคาร	ADG	BEJ	CFM	HKN	ILO
พุธ	AEN	BDO	CHL	FIK	GJM
พฤหัส	AIM	BGL	CDK	EHO	FJN
ศุกร์	AHJ	BKM	CEI	DLN	FGO
เสาร์	AFL	BIN	CJO	DHM	EGK
อาทิตย์	AKO	BFH	CGN	DIJ	ELM

เพื่อความสะดวกจะเขียน $SGP(g,p,w)$ แทนปัญหา *SGP* ที่แบ่งนักกอล์ฟออกเป็น g ก๊วน ก๊วนละ p คน และจัดแข่งขัน w รอบ ดังนั้น วิธีการจัดนักเรียนของเคิร์กแมนเป็นคำตอบของปัญหา $SGP(5,3,7)$

สำหรับกรณีที่ $p = 2$ ปัญหา $SGP(n,2,w)$ จะสมมูลกับปัญหาการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ (One-factorization) ของกราฟบริบูรณ์ที่มี $2n$ จุดยอด (Complete graph, K_{2n}) สำหรับกรณีที่ $p = 3$ ปัญหา $SGP(g,3,w)$ คือ ปัญหาการจัดกลุ่มทีละสามของเคิร์กแมน (Kirkman's triple system) สำหรับกรณีที่ $g = p = n$ ปัญหา $SGP(n,n,w)$ มีความเกี่ยวข้องกับจัตุรัสละติน ซึ่งบทความนี้จะนำเสนอวิธีการจัดก๊วนนักกอล์ฟสำหรับปัญหา $SGP(n,n,w)$ โดยใช้จัตุรัสละตินที่ตั้งฉากกัน

จัตุรัสละติน

บทนิยามที่ 1 จัตุรัสละตินขนาด $n \times n$ (Latin square of side n) คือ ตารางที่มี n แถว และ n คอลัมน์ บนเซตของสัญลักษณ์ n ตัว โดยที่ในแต่ละแถวและแต่ละคอลัมน์ต้องปรากฏสัญลักษณ์ทุกตัวเพียงครั้งเดียว

ตัวอย่างที่ 1 จัตุรัสละตินขนาด 3 × 3 บนเซตของสัญลักษณ์ {0,1,2}

0	1	2
1	2	0
2	0	1

L_1

0	2	1
1	0	2
2	1	0

L_2

0	2	1
2	1	0
1	0	2

L_3

หากต้องการเปลี่ยนชื่อสัญลักษณ์ (Relabel) ในจัตุรัสละตินให้เปลี่ยนชื่อสัญลักษณ์ที่ปรากฏอยู่ทุกช่อง เช่น เปลี่ยน 1 เป็น 2 ต้องเปลี่ยนทุกช่องที่มี 1 ปรากฏอยู่เป็น 2 ทั้งหมด ซึ่งจัตุรัสที่ได้จากการเปลี่ยนชื่อจะสมมูล (Equivalence) กับจัตุรัสเดิม เช่น ในตัวอย่างที่ 1 เมื่อเปลี่ยนชื่อสัญลักษณ์ในจัตุรัส L_1 จากเซตของสัญลักษณ์ {0,1,2} เป็น {0,2,1} จะได้จัตุรัส L_3

สำหรับการระบุตำแหน่งบนตาราง **ช่อง** (i,j) หมายถึง ช่องที่อยู่ในแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j

บทนิยามที่ 2 จัตุรัสละติน 2 จัตุรัสที่**ตั้งฉากกัน (Orthogonal Latin squares)** คือ เมื่อนำสัญลักษณ์ในช่อง (i,j) จากจัตุรัสแรกและจัตุรัสที่สองมาคู่กัน คู่ที่ได้ซึ่งคำนึงถึงลำดับก่อนหลังจะแตกต่างกันทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 2 การนำสัญลักษณ์ในช่อง (i,j) จากจัตุรัสละตินในตัวอย่างที่ 1 มาคู่กัน

00	12	21
11	20	02
22	01	10

L_1 คู่กับ L_2

00	12	21
12	21	00
21	00	12

L_1 คู่กับ L_3

จากตัวอย่างที่ 2 จะเห็นว่าจัตุรัส L_1 ตั้งฉากกับจัตุรัส L_2 ในขณะที่จัตุรัส L_1 กับ L_3 ไม่ตั้งฉากกัน เพราะมีการจับคู่ที่ซ้ำกันดังตัวอย่างที่ได้แรเงาไว้

ต่อไปจะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่ 1-3 ซึ่งเป็นทฤษฎีบทเกี่ยวกับจัตุรัสละตินที่ตั้งฉากกันที่รู้จักกันอย่างแพร่หลาย สามารถหาอ่านเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิง [4] โดยจะนำทฤษฎีบทเหล่านี้ไปใช้ในการหาคำตอบของปัญหา $SGP(n,n,w)$ ต่อไป

ทฤษฎีบทที่ 1 มีจัตุรัสละตินขนาด $n \times n$ ไม่เกิน $n-1$ จัตุรัสที่จัตุรัสแต่ละคู่ตั้งฉากกัน

บทพิสูจน์ สมมติว่ามีจัตุรัสละตินขนาด $n \times n$ อยู่ k จัตุรัส คือ $L_1, L_2, ..., L_k$ ซึ่ง L_i ตั้งฉากกับ L_j ทุกๆ $i \neq j$ เราจะแสดงว่า $k \leq n-1$

โดยไม่เสียนัยทั่วไปกำหนดให้แต่ละ i จัตุรัส L_i มีแถวแรกเป็น $1,2,...,n$ ถ้าไม่เป็นเช่นนี้ให้ทำการเปลี่ยนชื่อสัญลักษณ์ จะได้ว่าจัตุรัสละตินแต่ละคู่ยังคงตั้งฉากกันเหมือนเดิม

พิจารณาช่อง (2,1) บนจัตุรัสละติน L_i ให้เลขในช่องนั้นแทนด้วย a_i จะได้ว่า $a_i \neq 1$ เพราะมี 1 ในคอลัมน์ที่ 1 แล้ว ดังนั้น $a_i \in \{2,3,...,n\}$ สำหรับทุกๆ $i \neq j$ ตัวเลขในช่อง $(1,t)$ ของ L_i และ L_j คือ t ถ้า $a_i = a_j = t$ จะได้ว่า L_i ไม่ตั้งฉากกับ L_j เพราะเมื่อนำตัวเลขมาคู่กันในช่อง (2,1) คือ tt จะซ้ำกับช่อง $(1,t)$

แสดงว่าถ้า L_i กับ L_j ตั้งฉากกันแล้ว จะได้ว่า $a_i \neq a_j$ เนื่องจาก $a_i \in \{2,3,...,n\}$ แสดงว่ามี a_i ที่แตกต่างกันได้อย่างมาก $n-1$ ตัว ดังนั้น $k \leq n-1$ ■

ทฤษฎีบทที่ 2 ให้ n เป็นจำนวนเฉพาะ จะมีจัตุรัสละตินขนาด $n \times n$ อยู่ $n-1$ จัตุรัสที่จัตุรัสแต่ละคู่ตั้งฉากกัน

บทพิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเฉพาะ สร้างตารางขึ้นมา $n-1$ ตารางเป็นตารางการบวกมอดูโล n โดยใช้สูตร $x + iy$ โดยที่ $i = 1,2,...,n-1$ และ x,y $\{0,1,...,n-1\}$ เช่น $n = 5$, จะได้ $i = 3$, $x = 2$, $y = 4$, จะได้ $x + iy = 14 \equiv 4 \pmod 5$ และจะได้ตารางการบวก $x + 3y$

ตารางการบวก $x + 3y$

x \ y	0	1	2	3	4
0	0	3	1	4	2
1	1	4	2	0	3
2	2	0	3	1	4
3	3	1	4	2	0
4	4	2	0	3	1

จัตุรัสละติน L_3

0	3	1	4	2
1	4	2	0	3
2	0	3	1	4
3	1	4	2	0
4	2	0	3	1

ให้ L_i เป็นจัตุรัสที่ได้จากตารางการบวก $x + iy$ เห็นได้ชัดว่า L_i เป็นจัตุรัสละติน จะแสดงว่าสำหรับทุกๆ $i \neq j$, L_i ตั้งฉากกับ L_j

พิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง สมมติว่ามี $i \neq j$ ซึ่ง L_i กับ L_j ไม่ตั้งฉากกัน

จากนิยามของจัตุรัสละตินที่ตั้งฉากกัน สรุปได้ว่า ใน L_i และ L_j จะต้องมี 2 ช่องที่ต่างกันที่มีการจับคู่ที่เท่ากัน ให้ 2 ช่องนั้นคือ (x_1,y_1) และ (x_2,y_2) จะได้ช่อง $(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2)$

ค่าในช่อง (x_1,y_1) ใน L_i คือ $x_1 + iy_1$ และค่าในช่อง (x_2,y_2) ใน L_i คือ $x_2 + iy_2$

การจับคู่ที่เท่ากันจะทำให้

$$x_1 + iy_1 \equiv x_2 + iy_2 \pmod{n} \quad (1)$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับ L_j จะได้

$$x_1 + jy_1 \equiv x_2 + jy_2 \pmod{n} \quad (2)$$

นำสมการ (1)-(2) จะได้ $y_1(i-j) \equiv y_2(i-j) \pmod{n}$

ถ้า $y_1 \neq y_2$ จะได้ว่า $i-j \equiv 0 \pmod{n}$ เนื่องจาก n เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $i = j$ เกิดข้อขัดแย้ง

ถ้า $y_1 = y_2$ จากสมการ (1) จะได้ว่า $x_1 \equiv x_2 \pmod{n}$ นั่นคือ $x_1 = x_2$ แสดงว่า $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ เกิดข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้น L_i ตั้งฉากกับ L_j ทุกๆ $i \neq j$ ■

นอกจากนี้ ถ้า $n = p^k$ โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะแล้ว จะมีจัตุรัสละตินขนาด $n \times n$ อยู่ $n-1$ จัตุรัสที่จัตุรัสแต่ละคู่ตั้งฉากกัน ซึ่งสร้างมาจากฟิลด์กาลัว (Galois field) $GF(n)$ และมีวิธีสร้างจัตุรัสละตินที่ตั้งฉากกันโดยใช้สูตร $x + iy$ โดยที่ $x,y,i \in GF(n)$ และ $i \neq 0$

สำหรับปัญหาการมีจัตุรัสละตินขนาด 6×6 ที่ตั้งฉากกัน ซึ่งสมมูลกับปัญหาการจัดทหาร 36 คน ที่ออยเลอร์ (Euler) ถามขึ้นในปี ค.ศ. 1782 ซึ่งกล่าวว่า

"ในหน่วยทหารมีกองทัพอยู่ 6 กองทัพ แต่ละกองทัพมีทหาร 6 นาย ซึ่งมียศต่างกันทั้ง 6 นาย ต้องการจัดแถวทหารเหล่านี้เป็นตารางขนาด 6×6 โดยที่แต่ละแถวและแต่ละคอลัมน์ ต้องมีมาจากทั้ง 6 กองทัพและมียศต่างกัน 6 ยศ"

ออยเลอร์คาดการณ์ไว้ว่า ไม่มีคำตอบสำหรับปัญหานี้ ล่วงเลยมาร้อยปี จึงมีบทพิสูจน์ว่าข้อคาดการณ์นั้นถูกต้อง คือ ในปี ค.ศ. 1901 ทาร์รี (Tarry) [5] ได้เขียนจัตุรัสละตินขนาด 6×6 ทุกรูปแบบด้วยมือ (เนื่องจากในตอนนั้นยังไม่มีคอมพิวเตอร์) จึงสรุปได้ว่าไม่มีจัตุรัสละตินขนาด 6×6 ที่ตั้งฉากกัน

ทฤษฎีบทที่ 3 ไม่มีจัตุรัสละตินขนาด 6×6 ที่ตั้งฉากกัน

ปัญหา $SGP(n,n,w)$

ในส่วนนี้ เราจะใช้ความรู้ในเรื่องจัตุรัสละตินที่ตั้งฉากกันมาช่วยแก้ปัญหา SGP โดยจะเริ่มด้วยการแสดงวิธีหาคำตอบสำหรับปัญหา $SGP(3,3,4)$ ก่อน จากนั้นจึงขยายไปสู่ค่า n ใดๆ

ให้ L_1 และ L_2 เป็นจัตุรัสละตินขนาด 3×3 สองจัตุรัสที่ตั้งฉากกัน ซึ่งได้มาจากตัวอย่างที่ 1 และ 2 และให้จัตุรัส A บรรจุตัวเลข 1-9 แทนนักกอล์ฟ 9 คน

$$L_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \hline\end{array} \quad L_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ \hline\end{array} \quad A = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline\end{array}$$

เราจะจัดก๊วนออกเป็น 4 รอบ ดังต่อไปนี้

รอบที่ 1 จัดก๊วนโดยใช้แถวจากตาราง A จะได้ 3 ก๊วน คือ 123, 456, 789

รอบที่ 2 จัดก๊วนโดยใช้คอลัมน์จากตาราง A จะได้ 3 ก๊วน คือ 147, 258, 369

รอบที่ 3 จัดก๊วนโดยใช้ L_1 มาเทียบกับตาราง A โดยช่องใน L_1 ถูกแบ่งออกเป็น 3 กลุ่มตามหมายเลขที่อยู่ในช่อง ผู้เล่น 2 คนใดๆ ในตาราง A จะอยู่ในก๊วนเดียวกันถ้าพวกเขาอยู่ในช่องที่มีเลขเดียวกันใน L_1 เช่น 1, 6, 8 อยู่ในก๊วนหมายเลข 0

L_1 =

0	1	2
1	2	0
2	0	1

A =

1	2	3
4	5	6
7	8	9

ดังนั้น จะได้ 3 ก๊วน คือ 168, 249, 357

รอบที่ 4 จัดก๊วนโดยใช้ L_2 มาเทียบกับตาราง A ในลักษณะเดียวกันกับรอบที่ 3 จะได้ 3 ก๊วน คือ 159, 348, 267

L_2 =

0	2	1
1	0	2
2	1	0

A =

1	2	3
4	5	6
7	8	9

เห็นชัดว่าแต่ละแถวกับแต่ละคอลัมน์มีสมาชิกร่วมกันเพียงตัวเดียว และเนื่องจาก L_1 และ L_2 เป็นจัตุรัสละตินที่ตั้งฉากกัน ตัวเลขเดียวกันจึงมาจากต่างแถวและต่างคอลัมน์กันทั้งหมด นอกจากนั้น ช่องที่มีเลขเดียวกันใน L_1 เมื่อเทียบกับใน L_2 จะพบว่ามีเลขซ้ำกันเพียงตัวเดียว จะได้ว่าก๊วนสองก๊วนจากรอบที่ต่างกัน จะมีนักกอล์ฟร่วมกันเพียงหนึ่งคน นักกอล์ฟแต่ละคู่จึงอยู่ในก๊วนเดียวกันอย่างมากรอบเดียว ดังนั้น การจัดด้วยวิธีนี้เป็นคำตอบของปัญหา $SGP(3,3,4)$ สรุปเป็นตารางได้ดังนี้

	ก๊วนที่ 1	ก๊วนที่ 2	ก๊วนที่ 3
รอบที่ 1	123	456	789
รอบที่ 2	147	258	369
รอบที่ 3	168	249	357
รอบที่ 4	159	348	267

สังเกตว่า นักกอล์ฟเบอร์ 1 ได้อยู่ในก๊วนเดียวกันกับ 8 คนที่เหลือทั้งหมดแล้ว ดังนั้น ไม่สามารถจัดก๊วนได้ในรอบที่ 5

จากวิธีการจัดก๊วนในปัญหา $SGP(3,3,4)$ ที่ผ่านมาสามารถขยายไปสู่การแก้ปัญหา $SGP(n,n,w)$ เมื่อ $n \geq 4$ เนื่องจากจำนวนรอบขึ้นอยู่กับจำนวนจัตุรัสละตินที่ตั้งฉากกันเราจึงต้องการสร้างจัตุรัสละตินที่ตั้งฉากกันให้ได้มากที่สุด และจะทำให้ได้ค่า w มากที่สุด ซึ่งผลเฉลยของปัญหานี้ได้จากทฤษฎีบทที่ 4-6 ศึกษาเพิ่มเติมได้ในเอกสารอ้างอิง [6]

ทฤษฎีบทที่ 4 ถ้ามีจัตุรัสละตินขนาด $n \times n$ อยู่ k จัตุรัสที่จัตุรัสแต่ละคู่ตั้งฉากกัน แล้วจะมีผลเฉลยสำหรับปัญหา $SGP(n,n,k+2)$

บทพิสูจน์ สมมติว่ามีจัตุรัสละตินขนาด $n \times n$ อยู่ k จัตุรัส คือ $L_1,L_2,\ldots,L_k$ ซึ่ง L_i ตั้งฉากกับ L_j ทุกๆ $i \neq j$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป กำหนดให้แต่ละ i จัตุรัส L_i มีแถวแรกเป็น $1,2,\ldots,n$ ถ้าไม่เป็นเช่นนี้ให้ทำการเปลี่ยนชื่อสัญลักษณ์ จะได้ว่าจัตุรัสละตินแต่ละคู่ยังคงตั้งฉากกันเหมือนเดิม

ให้ A เป็นตารางขนาด $n \times n$ ที่ในแต่ละช่องมีสัญลักษณ์แทนนักกอล์ฟแต่ละคน แต่ละรอบจะแบ่งนักกอล์ฟออกเป็น n ก๊วน ก๊วนละ n คน ให้ B_t^i แทนเซตของนักกอล์ฟในก๊วนที่ t ในรอบที่ i จัดแข่งกอล์ฟได้ $k+2$ รอบดังนี้

ในรอบที่ i สำหรับ $i = 1,2,\ldots,k$ นำ L_i มาเทียบกับตาราง A แต่ละก๊วน B_t^i จะประกอบด้วยนักกอล์ฟที่อยู่ในช่องที่มี t ปรากฏอยู่ใน L_i จะได้ว่า $B_1^i,B_2^i,\ldots,B_n^i$ ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย และถ้า $i \neq j$ แล้ว $|B_t^i \cap B_s^j| = 1$ เพราะ L_i ตั้งฉากกับ L_j ทำให้ช่องที่ t ปรากฏอยู่ใน L_i จะซ้ำกับช่องที่ s ปรากฏอยู่ใน L_i เพียงช่องเดียว

ในรอบที่ $k+1$ แต่ละก๊วน B_t^{k+1} จะประกอบด้วยนักกอล์ฟที่อยู่ในแถวที่ t ของตาราง A

ในรอบที่ $k+2$ แต่ละก๊วน B_t^{k+2} จะประกอบด้วยนักกอล์ฟที่อยู่ในคอลัมน์ที่ t ของตาราง A

จะเห็นว่า สำหรับ $i = 1,2,\ldots,k$ $|B_t^i \cap B_s^{k+1}| = 1$ เพราะ t ปรากฏอยู่ในแต่ละแถวของ L_i เป็นจำนวน 1 ช่องเท่านั้น ดังนั้น จะมี t ปรากฏอยู่ในแถวที่ s เพียง 1 ช่องพอดี ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $|B_t^i \cap B_s^{k+2}| = 1$ สำหรับรอบที่ $k+1$ และ $k+2$ $|B_t^{k+1} \cap B_s^{k+2}| = 1$ เพราะแถวที่ t และคอลัมน์ที่ s มีช่องร่วมกัน คือ ช่อง (t,s)

สรุปได้ว่า สองก๊วนใดๆ จากรอบที่ต่างกันมีนักกอล์ฟร่วมกันเพียง 1 คน แสดงว่านักกอล์ฟแต่ละคู่อยู่ในก๊วนเดียวกันไม่เกิน 1 รอบ ดังนั้น $\{B_t^i : i = 1,2,\ldots,k+2,\ t = 1,2,\ldots,n\}$ เป็นผลเฉลยของปัญหา $SGP(n,n,k+2)$ ■

ทฤษฎีบทที่ 5 ถ้า n เป็นจำนวนเฉพาะ แล้วจะมีผลเฉลยสำหรับปัญหา $SGP(n,n,n+1)$

บทพิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเฉพาะ โดยทฤษฎีบทที่ 2 จะมีจัตุรัสละตินขนาด $n \times n$ อยู่ $n-1$ จัตุรัสที่จัตุรัสแต่ละคู่ตั้งฉากกัน แทนค่า $k = n-1$ ในทฤษฎีบทที่ 4 จะได้ว่ามีผลเฉลยสำหรับปัญหา $SGP(n,n,n+1)$ ■

ทฤษฎีบทที่ 6 ไม่มีผลเฉลยสำหรับปัญหา $SGP(6,6,4)$

บทพิสูจน์ ถ้ามีผลเฉลยสำหรับปัญหา $SGP(6,6,4)$ ทำกระบวนการย้อนกลับเพื่อสร้างจัตุรัสละตินขนาด 6×6 ที่ตั้งฉากกัน จะได้ $k = 2$ ตามทฤษฎีบทที่ 4 แต่ทฤษฎีบทที่ 3 กล่าวว่าไม่มีจัตุรัสละตินขนาด 6×6 ที่ตั้งฉากกัน แสดงว่ามีผลเฉลยสำหรับปัญหา $SGP(6,6,4)$ ไม่ได้ ■

การประยุกต์และปัญหาที่คล้ายกัน

ปัญหาที่ 1 จัดแข่งหมากรุก $2n$ คน แบบพบกันหมด ซึ่งมีเงื่อนไขว่า ในหนึ่งวันแต่ละคนต้องลงแข่งและแข่งเพียงหนึ่งกระดานเท่านั้น ถามว่าจะใช้เวลาการแข่งขัน $2n - 1$ วัน ได้หรือไม่

จะเห็นได้ว่าปัญหานี้เหมือนกับการหาวิธีจัดก๊วนของปัญหา $SGP(n,2,2n - 1)$ ซึ่งสามารถจัดได้โดยการแก้ปัญหาการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ของกราฟบริบูรณ์ที่มี $2n$ จุดยอด ซึ่งผลเฉลยของการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ สามารถหาอ่านได้ในเอกสารอ้างอิง [4]

ปัญหาที่ 2 ห้องเรียนวิชาเคมีแบ่งนักเรียนเป็น g กลุ่ม กลุ่มละ p คน ให้ทำการทดลอง w การทดลอง โดยที่แต่ละกลุ่มจะมีหัวหน้ากลุ่มในแต่ละการทดลอง ซึ่งนักเรียนที่เป็นหัวหน้าไปแล้วจะไม่เป็นหัวหน้าอีกในการทดลองอื่น และนักเรียนแต่ละคู่จะเจอกันได้ไม่เกินหนึ่งครั้ง จะจัดกลุ่มได้อย่างไร

ปัญหานี้คือปัญหา $SGP(g,p,w)$ ที่มีการระบุหัวหน้ากลุ่มในก๊วนด้วย จึงเป็นกรณีเฉพาะของปัญหา $SGP(g,p,w)$ ซึ่งสามารถใช้คอมพิวเตอร์ช่วยแก้ปัญหาได้ ศึกษาเพิ่มเติมได้ในเอกสารอ้างอิง [5]

ปัญหาที่ 3 นักธุรกิจ 20 คนเข้าร่วมงานประชุมสัมมนา ช่วงพักรับประทานอาหารกลางวันนักธุรกิจต้องการพบปะสังสรรค์กับทุกๆ คน แต่ว่าโต๊ะหนึ่งนั่งร่วมกันได้เพียง 4 คน ถามว่าต้องจัดงานประชุมน้อยที่สุดกี่วัน นักธุรกิจแต่ละคนจึงจะได้พบกับนักธุรกิจคนอื่นๆ ครบทุกคน

ปัญหานี้ดูเหมือนจะเป็นปัญหา $SGP(5,4,w)$ แต่ใช้วิธีการแก้ปัญหาไม่เหมือนกัน เพราะปัญหาการจัดก๊วนต้องการ w มากที่สุด และนักกอล์ฟบางคู่ไม่เคยอยู่ในก๊วนเดียวกันเลยก็ได้ สำหรับปัญหานี้ต้องการ w น้อยที่สุด แต่นักธุรกิจแต่ละคู่ต้องเจอกันอย่างน้อยหนึ่งครั้ง ดังนั้น ปัญหานี้ไม่ใช่ $SGP(5,4,w)$ อย่างไรก็ตาม ปัญหานี้เป็นปัญหาที่น่าสนใจสามารถอ่านเพิ่มเติมได้ในเอกสารอ้างอิง [7]

สรุป

บทความนี้นำเสนอการใช้จัตุรัสละตินที่ตั้งฉากกันมาแก้ปัญหาการจัดก๊วนนักกอล์ฟในกรณีพิเศษ คือ $SGP(n,n,w)$ โดยถ้า $n = p^k$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะมีผลเฉลยสำหรับปัญหา $SGP(n,n,n+1)$ แต่ถ้า $n \neq p^k$ ผลเฉลยจะขึ้นอยู่กับจำนวนของจัตุรัสละตินที่ตั้งฉากกันในกรณีที่ $n = 6$ ไม่มีจัตุรัสละตินขนาด 6×6 ที่ตั้งฉากกัน ทำให้ไม่มีผลเฉลยสำหรับปัญหา $SGP(6,6,4)$ สำหรับปัญหา $SGP(g,p,w)$ ใดๆ ในตารางที่ 1 ได้แสดงผลเฉลยบางส่วนของปัญหา SGP ซึ่งรวบรวมโดยวอริก (Warwick) ในปี ค.ศ. 2002 (ดูรายละเอียดได้จากเอกสารอ้างอิง [8]) ยกเว้นปัญหา $SGP(8,4,w)$ อะกวาโดได้ปรับปรุงค่า $w = 10$ ในปี ค.ศ. 2004 ผู้เขียนจึงปรับปรุงเป็นตารางค่า w ได้ดังนี้

ตารางที่ 1 แสดงค่า w สำหรับปัญหา $SGP(g,p,w)$ ตัวเลขในวงเล็บแสดงค่า w ที่มากที่สุด แต่ยังไม่มีผลเฉลย

g \ p	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3								
3	5	4							
4	7	4	5						
5	9	7	5	6					
6	11	8	7	6	3				
7	13	9 (10)	7 (9)	5 (8)	4 (8)	7 (8)			
8	15	10 (11)	10	6 (9)	5 (9)	4 (9)	9		
9	17	11 (13)	8 (11)	6 (11)	5 (10)	4 (10)	3 (10)	3 (10)	
10	19	13 (14)	9 (13)	7 (12)	6 (11)	5 (11)	4 (11)	3 (11)	3 (11)

ผลเฉลยของปัญหา SGP เป็นคำตอบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับการจัดกลุ่มในกิจกรรมต่างๆ ซึ่งต้องการใช้ทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดให้มีประสิทธิภาพมากที่สุด ถ้าเจ้าภาพไม่ทราบวิธีการจัดก๊วนให้ได้รอบมากที่สุด จะทำให้นักกอล์ฟพลาดโอกาสในการพบปะเพื่อนใหม่ไปอย่างน่าเสียดาย ในยุคปัจจุบันที่ต้องการสิ่งที่ดีที่สุด กำไรมากที่สุด มีความพึงพอใจมากที่สุด ผลเฉลยของปัญหา SGP เป็นคำตอบที่ท่านต้องการอย่างแน่นอน

เอกสารอ้างอิง

1. Sci.op-research, 1998. Maximum socializing on the golf course. Available from URL: http://groups.google. com/group/sci.op-research/msg/e8f9bf12d4f8cbbf. 29 September 2012.
2. Aguado, A. 2004. A 10 Days Solution to the Social Golfer Problem. Available from URL:http://www.maa.org/editorial/mathgames/socgolf1.pdf. 29 September 2012.
3. Pegg, E. 2007. Math games: Social Golfer Problem. Available from URL: http://www.maa.org/editorial/athgames/mathgames_08_14_07.html. 29 September 2012.
4. Wallis, W. D. 2007. Introduction to Combinatorial Designs. 2nd Edition. New York. Chapman & Hall/CRC. p. 117-163.
5. Tarry, G. 1901. Le problème des 36 officiers. *Comptes Rendus Association France* 2: 170-203.
6. Triska, M. 2008. Solution Methods for the Social Golfer Problem. Master Thesis. Austria. Veinna University of Technology. p. 12-18.
7. Warwick, H. 2003. The Fully Social Golfer Problem. Proceedings of the 3rd International Workshop on Symmetry in Constraint Satisfaction Problems. 29 September 2003. County Cork. Ireland. p. 75-85.
8. Warwick, H. 2002. Warwick's Results Page for the Social Golfer Problem. Available from URL: http://web.archive.org/web/20050308115423/http://www.icparc.ic.ac.uk/~wh/golf/. 29 September 2012.

ได้รับบทความวันที่ 30 กันยายน 2555
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 29 ตุลาคม 2555