บทความวิชาการ

ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวน 143 กับจำนวนเต็มบวกที่หารลงตัวด้วยจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 7

ดาราวรรณ ดั้นเมฆ และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์*

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการศึกษาและการหารูปแบบทั่วไปของผลคูณของจำนวน 143 กับจำนวนเต็มบวกที่หารลงตัวด้วยจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 7 โดยทฤษฎีบทที่ใช้เป็นเครื่องมือหลักในการพิสูจน์ คือ หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ รูปแบบทั่วไปของผลคูณของจำนวน 143 กับจำนวนเต็มบวกที่หารลงตัวด้วยจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 7 ที่ได้นั้นจะขึ้นอยู่กับจำนวนของเลขโดด 7 โดยแบ่งได้เป็นสามกรณี คือ จำนวนของเลขโดด 7 เท่ากับหนึ่ง สอง และมากกว่าหรือเท่ากับสาม

คำสำคัญ: หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ หารลงตัว จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา

*ผู้นิพนธ์ประสานงาน, E-mail: aiyared.ia@up.ac.th

Generalized Beauty: the Product of the Number 143 and the Positive Integer Divided by the Number That Every Digit as 7

Darawan Danmake and Aiyared Iampan*

ABSTRACT

This article presents the study and finding a general form of the product of the number 143 and the positive integer divided by the number that every digit as 7. The main theorem for proof is the Principle of Mathematical Induction. The general form of the product of the number 143 and the positive integer divided by the number that every digit as 7 is depended on the number of 7 which is divided into three cases: the number of 7 is one, two, greater than or equal to three.

Keywords: Principle of Mathematical Induction, divisible, number that every digit as 7

Department of Mathematics, School of Science, University of Phayao

*Corresponding author. E-mail: aiyared.ia@up.ac.th

บทนำ

ในการคำนวณหาผลคูณของจำนวนหลายหลักโดยที่ไม่มีเครื่องคำนวณใดๆ มาช่วยนั้น นับว่าเป็นเรื่องที่ยุ่งยากและไม่สะดวกนัก แต่หากเราสามารถหาสูตรสำหรับการคำนวณหาผลคูณนั้นได้ก็จะเป็นการเพิ่มความสะดวกให้กับเราได้อย่างดีนั่นเอง ในบทความนี้จะกล่าวถึงจำนวนเต็มบวกที่หารลงตัวด้วยจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 7 ซึ่งหมายถึงจำนวนเต็มบวกที่สามารถเขียนอยู่ในรูปผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 7 กับจำนวนเต็มบวกบางจำนวนได้ เช่น 7×5, 7777×12 และ 7777777×321 เป็นต้น การศึกษาและการหารูปแบบทั่วไปของผลคูณของจำนวน 143 กับจำนวนเต็มบวกที่หารลงตัวด้วยจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 7 ได้แนวความคิดมาจากบทความเรื่อง ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 [2] ที่ได้แสดงถึงการศึกษาและการหารูปแบบทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนได้

ดังนั้น บทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์ที่จะศึกษาและหารูปแบบทั่วไปของผลคูณของจำนวน 143 กับจำนวนเต็มบวกที่หารลงตัวด้วยจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 7 โดยอาศัยทฤษฎีบทที่สำคัญสองทฤษฎีบทในการพิสูจน์ คือ ขั้นตอนวิธีการหาร และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ขั้นตอนวิธีการหาร (The Division Algorithm) [3] ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $b \neq 0$ แล้วมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง

$$a = bq + r \text{ และ } 0 \leq r < |b|$$

ทฤษฎีบท 2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction) [3] กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

(1) $P(1)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก k แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

จากอัยเรศ [2] และณัฐวุฒิ และอัยเรศ [1] ได้นิยามจำนวนเศษเหลือ (remainder number) ไว้ดังนี้ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ และ $b = 10$ จะได้ว่ามีผลหาร q และเศษเหลือ r ซึ่ง $a = 10 \cdot q + r$ และ $0 \leq r < 10$ นั่นคือ r เป็นเลขโดด นิยาม

$$a := {}_{q}r \qquad \text{(I)}$$

เช่น

$$\begin{array}{lllll}
-450 = {}_{-45}0 & -30 = {}_{-3}0 & 0 = {}_{0}0 & 30 = {}_{3}0 & 450 = {}_{45}0 \\
-451 = {}_{-46}9 & -31 = {}_{-4}9 & 1 = {}_{0}1 & 31 = {}_{3}1 & 451 = {}_{45}1 \\
-452 = {}_{-46}8 & -32 = {}_{-4}8 & 2 = {}_{0}2 & 32 = {}_{3}2 & 452 = {}_{45}2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
-459 = {}_{-46}1 & -39 = {}_{-4}1 & 9 = {}_{0}9 & 39 = {}_{3}9 & 459 = {}_{45}9
\end{array}$$

เพื่อความสะดวก เรายังคงจะเขียน ${}_{0}r$ ด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม $0 \le r < 10$ จากตัวอย่างของจำนวนเศษเหลือของจำนวนเต็มลบ ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ [1] ยังได้แสดงลักษณะของจำนวนเศษเหลือของจำนวนเต็มลบใดๆ ดังนี้

บทตั้ง 3 [1] กำหนดให้ n เป็นจำนวนธรรมชาติ ซึ่ง $n = {}_{q}r$ แล้ว

$$-n = \begin{cases} {}_{-q}0 & ; \ r = 0 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) & ; \ r \neq 0 \end{cases} \tag{II}$$

ก่อนที่จะประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจากบทความนี้จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบปกติ ซึ่งทำได้โดยการบวกทแยงจากเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้าย และสำหรับจำนวนในหลักหน่วยให้ดึงเศษลงมาได้เลย เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายจะขอยกตัวอย่างการแปลงจำนวน $2_{115}37_{31}9_{1}4_{420}601$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$\begin{aligned} 2_{115}37_{31}9_{1}4_{420}601 &= (2+115)3(7+31)(9+1)(4+420)601 \\ &= (117)3(38)(10)(424)601 \\ &= {}_{11}73_{3}8_{1}0_{42}4601 \\ &= (11)7(3+3)(8+1)(0+42)4601 \\ &= (11)769(42)4601 \\ &= {}_{1}1769_{4}24601 \\ &= 1176(9+4)24601 \\ &= 1176(13)24601 \\ &= 1176_{1}324601 \\ &= 117(6+1)324601 \\ &= 1177324601 \end{aligned}$$

ความสวยงามวางนัยทั่วไป

จากการสังเกตผลคูณของจำนวน 143 กับจำนวนเต็มบวกที่หารลงตัวด้วยจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 7 ทำให้เราพบความสัมพันธ์ดังนี้

$$
\begin{array}{lcl}
143\times 7\times 1 &=& 1001\\
143\times 7\times 2 &=& 2002\\
143\times 7\times 3 &=& 3003\\
143\times 7\times 4 &=& 4004\\
143\times 7\times 5 &=& 5005\\
143\times 7\times 6 &=& 6006\\
143\times 7\times 7 &=& 7007\\
143\times 7\times 8 &=& 8008\\
143\times 7\times 9 &=& 9009
\end{array}
$$

(III)

$$
\begin{array}{lcl}
143\times 77\times 1 &=& 11011\\
143\times 77\times 2 &=& 22022\\
143\times 77\times 3 &=& 33033\\
143\times 77\times 4 &=& 44044\\
143\times 77\times 5 &=& 55055\\
143\times 77\times 6 &=& 66066\\
143\times 77\times 7 &=& 77077\\
143\times 77\times 8 &=& 88088\\
143\times 77\times 9 &=& 99099
\end{array}
$$

(IV)

$$
\begin{array}{lcl}
143\times 777\times 1 &=& 111111\\
143\times 777\times 2 &=& 222222\\
143\times 777\times 3 &=& 333333\\
143\times 777\times 4 &=& 444444\\
143\times 777\times 5 &=& 555555\\
143\times 777\times 6 &=& 666666\\
143\times 777\times 7 &=& 777777\\
143\times 777\times 8 &=& 888888\\
143\times 777\times 9 &=& 999999
\end{array}
$$

(V)

$$
\begin{array}{lcccl}
143\times 7777\times 1 &=& 1112111 &=& 1112111\\
143\times 7777\times 2 &=& 2224222 &=& 2224222\\
143\times 7777\times 3 &=& 3336333 &=& 3336333\\
143\times 7777\times 4 &=& 4448444 &=& 4448444\\
143\times 7777\times 5 &=& 5560555 &=& 555_{1}0555\\
143\times 7777\times 6 &=& 6672666 &=& 666_{1}2666\\
143\times 7777\times 7 &=& 7784777 &=& 777_{1}4777\\
143\times 7777\times 8 &=& 8896888 &=& 888_{1}6888\\
143\times 7777\times 9 &=& 10008999 &=& 999_{1}8999
\end{array}
$$

(VI)

เราสังเกตเห็นว่าผลคูณของจำนวน 143 กับจำนวนเต็มบวกที่หารลงตัวด้วยจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 7 ที่ได้นั้นขึ้นอยู่กับจำนวนของเลขโดด 7 โดย (III) เราสังเกตเห็นว่าเลขหลักที่สองและสามเป็นเลขโดด 0 ส่วนหลักที่หนึ่งและสี่เป็นเลขโดดเดียวกัน คือ เลขที่นำมาคูณกับผลคูณของ 143×7 สำหรับ (IV) เราสังเกตเห็นว่าเลขหลักที่สาม (หลักกลาง) เป็นเลขโดด 0 ส่วนหลักที่เหลือเป็นเลขโดดเดียวกัน คือ เลขที่นำมาคูณกับผลคูณของ 143×77 สำหรับ (V) เราสังเกตเห็นว่าทุกหลักเป็นเลขโดดเดียวกัน คือ เลขที่นำมาคูณกับผลคูณของ 143×777 และสำหรับ (VI) เราสังเกตเห็นว่าเลขหลักที่สี่ (หลักกลาง) เป็นเลขสองเท่าของเลขที่นำมาคูณกับผลคูณของ 143×7777 ส่วนหลักที่เหลือเป็นเลขโดดเดียวกัน คือ เลขที่นำมาคูณกับผลคูณของ 143×7777 ต่อไปจะให้ตัวอย่างที่นำเราไปสู่การศึกษาผลคูณของจำนวน 143 กับจำนวนเต็มบวกที่หารลงตัวด้วยจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 7

ตัวอย่าง 4 ผลคูณของ $143 \times 7 \times 9$ สามารถหาได้ถูกต้องจากข้อสังเกตที่เราพบ คือ เลขหลักที่สองและสามเป็นเลขโดด 0 ส่วนหลักที่หนึ่งและสี่เป็นเลขโดดเดียวกัน คือ เลขที่นำมาคูณกับผลคูณของ 143×7 ได้แก่ เลข 9 ดังนี้

$$143 \times 7 \times 9 = 9009$$

และผลคูณของ $143 \times 7 \times 10$ สามารถหาได้ถูกต้องจากข้อสังเกตที่เราพบ คือ เลขหลักที่สองและสามเป็นเลขโดด 0 ส่วนหลักที่หนึ่งและสี่เป็นเลขโดดเดียวกัน คือ เลขที่นำมาคูณกับผลคูณของ 143×7 ได้แก่ เลข $10 = {}_{1}0$ ดังนี้

$$143 \times 7 \times 10 = 10010 = {}_{1}000_{1}0$$

ด้วยเหตุนี้เราจึงเกิดข้อสงสัยดังต่อไปนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวน 143 กับจำนวนเต็มบวกที่หารลงตัวด้วยจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 7 ได้หรือไม่

(2) ถ้าเราสามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณได้แล้วผลคูณจะมีรูปแบบเหมือนกับข้อสังเกตที่เราพบหรือไม่

เพื่อความสะดวกต่อการพิสูจน์ เราจะใช้สัญลักษณ์ #(7) แทนจำนวนของเลขโดด 7 ของ $\underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=n}$ และเราจะแบ่งการศึกษาออกเป็นสามกรณีตามจำนวนของเลขโดด 7 ของ $\underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=n}$ ดังนี้ $\#(7) = 1$, $\#(7) = 2$ และ $\#(7) \geq 3$

ทฤษฎีบท 5 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$143 \times 7 \times n = n00n \tag{VII}$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$143 \times 7 \times n = n00n$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

เนื่องจาก $143 \times 7 \times 1 = 1001$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง กำหนดให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$143 \times 7 \times k = k00k$$

เราจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง พิจารณา

$$\begin{aligned} 143\times 7\times(k+1) &= (143\times 7\times k)+(143\times 7\times 1) \\ &= k00k+1001 \\ &= (k+1)00(k+1) \end{aligned}$$

ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$143 \times 7 \times n = n00n$$

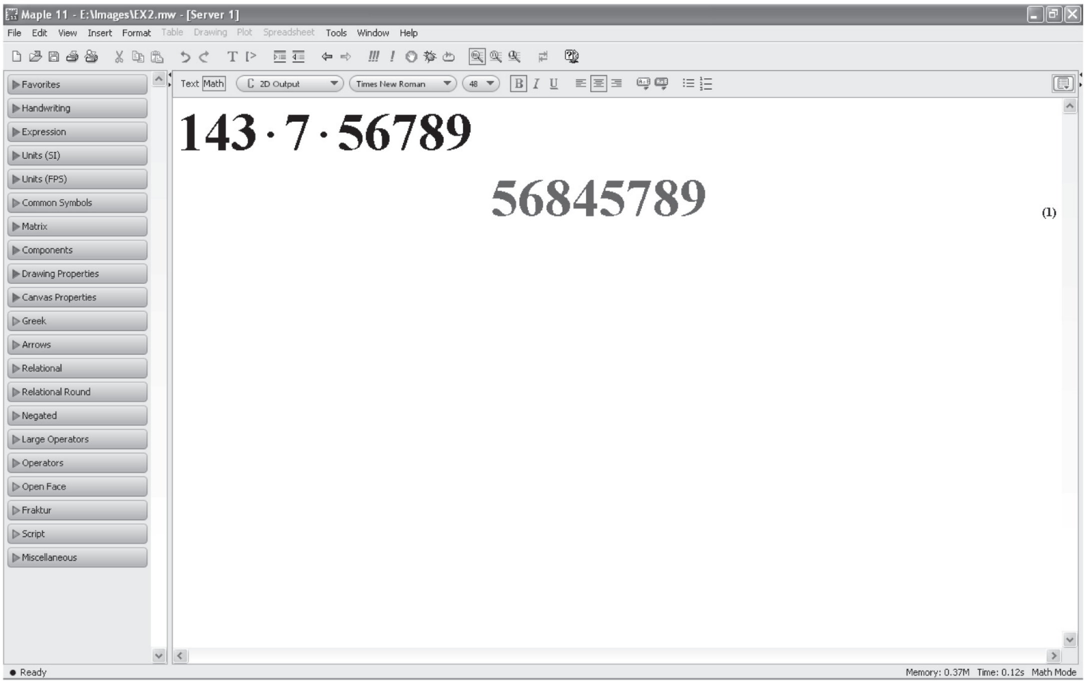
สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n □

ตัวอย่าง 6 จงหา $143 \times 7 \times 56789$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 143\times 7\times 56789 &= 143\times 7\times {}_{5678}9 \\ &= {}_{5678}900\,{}_{5678}9 \\ &= (5678)90(0+5678)9 \\ &= {}_{567}890\,{}_{567}89 \\ &= (567)89(0+567)89 \\ &= {}_{56}789\,{}_{56}789 \\ &= (56)78(9+56)789 \\ &= {}_{5}678\,{}_{6}5789 \\ &= 567(8+6)5789 \\ &= 567\,{}_{1}45789 \\ &= 56(7+1)45789 \\ &= 56845789 \end{aligned}$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์



ทฤษฎีบท 7 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$143 \times 77 \times n = nn0nn \tag{VIII}$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$143 \times 77 \times n = nn0nn$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

เนื่องจาก $143 \times 77 \times 1 = 11011$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง กำหนดให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$143 \times 77 \times k = kk0kk$$

เราจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง พิจารณา

$$\begin{aligned} 143 \times 77 \times (k+1) &= (143 \times 77 \times k) + (143 \times 77 \times 1) \\ &= (kk0kk) + (11011) \\ &= (k+1)(k+1)0(k+1)(k+1) \end{aligned}$$

ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$143 \times 77 \times n = nn0nn$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n $\square$

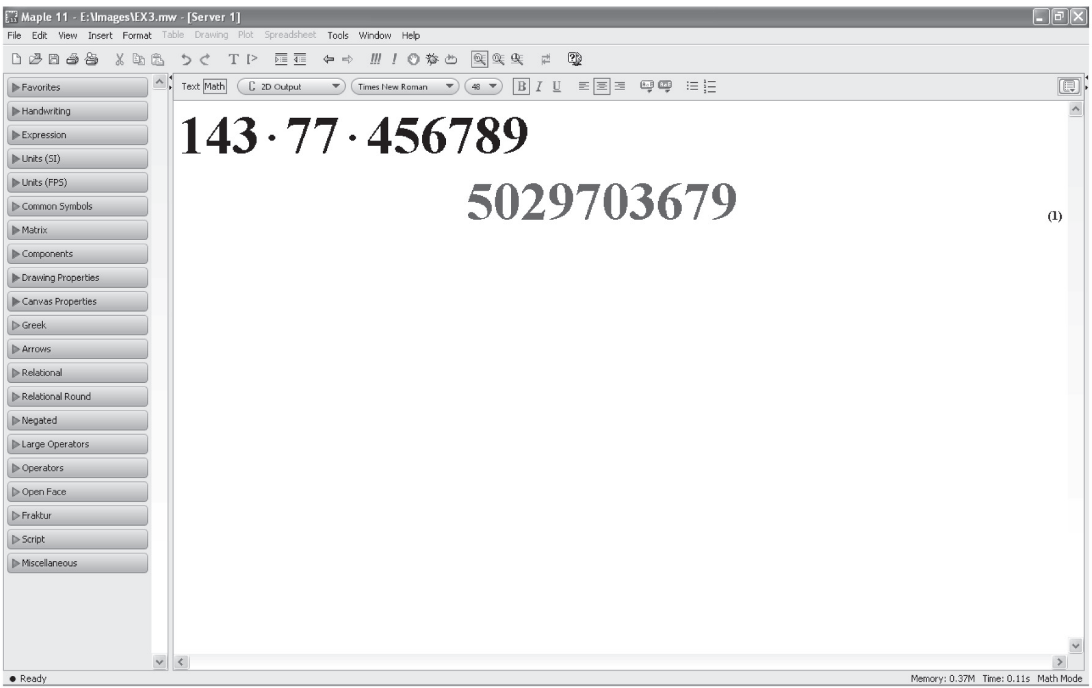
สำหรับผลลัพธ์ของตัวอย่าง 8 สามารถแปลงจากจำนวนเศษเหลือเป็นเลขฐานสิบได้เช่นเดียวกับตัวอย่าง 6

ตัวอย่าง 8 จงหา $143 \times 77 \times 456789$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 7 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 143\times 77\times 456789 &= 143\times 77\times {}_{45678}9 \\ &= {}_{45678}9\,{}_{45678}90\,{}_{45678}9\,{}_{45678}9 \\ &= 5029703679 \end{aligned}$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์



บทตั้ง 9 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 3$ จะได้ว่า

$$143\times \underbrace{777\ldots 7}_{\#(7)=n} = 111\underbrace{222\ldots 2}_{\#(2)=n-3}111 \qquad \text{(IX)}$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$143\times \underbrace{777\ldots 7}_{\#(7)=n} = 111\underbrace{222\ldots 2}_{\#(2)=n-3}111$$

เนื่องจาก 143 × 777 = 111111 จะได้ว่า $P(3)$ เป็นจริง กำหนดให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก และ $k \geq 3$ ซึ่ง $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$143\times\underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=k}=111\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k-3}111$$

เราจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง พิจารณา

$$\begin{aligned}
143\times\underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=k+1} &= 143\times\left(7\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}+\underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=k}\right)\\
&= \left(143\times7\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}\right)+\left(143\times\underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=k}\right)\\
&= 1001\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}+111\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k-3}111\\
&= 1112\underbrace{222...2}_{\#(2)=k-3}111\\
&= 111\underbrace{222...2}_{\#(2)=k-2}111\\
&= 111\ \underbrace{222...2}_{\#(2)=(k+1)-3}\ 111
\end{aligned}$$

ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$143\times\underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=n}=111\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n-3}111$$

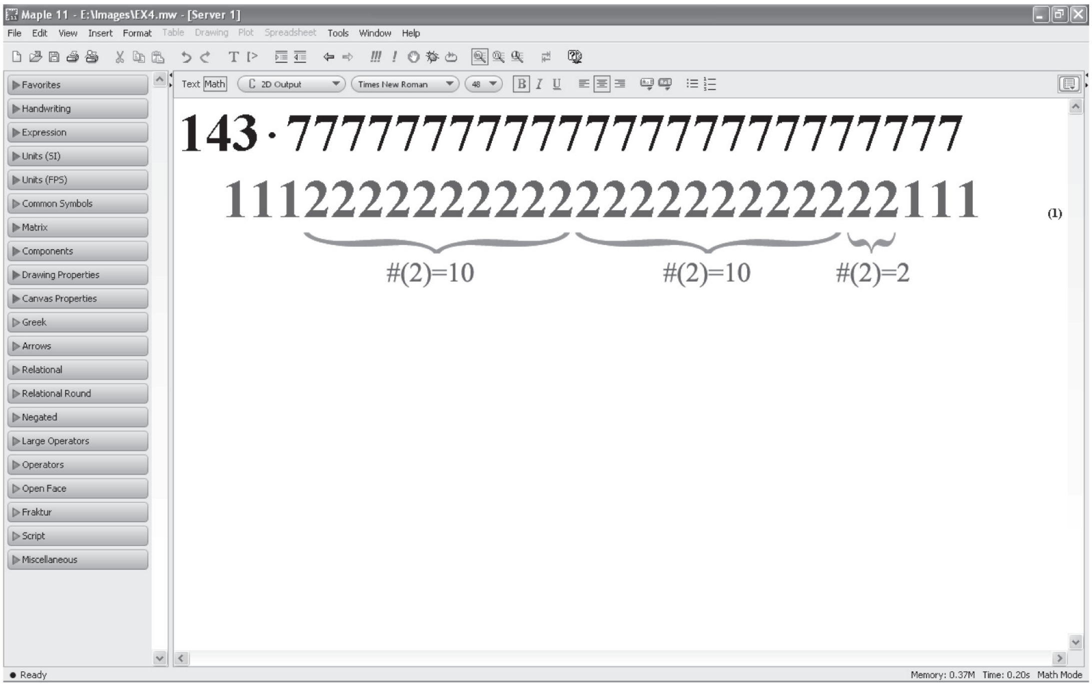
สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 3$ □

ตัวอย่าง 10 จงหา $143\times\underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=25}$

วิธีทำ โดยบทตั้ง 9 จะได้ว่า

$$143\times\underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=25} = 111\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=22}111$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์



โดยบทตั้ง 9 ทำให้เราได้รับทฤษฎีบท 11 ดังนี้

ทฤษฎีบท 11 กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $m \geq 3$ และสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$143 \times \underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=m} \times n = nnn\underbrace{(2\cdot n)(2\cdot n)(2\cdot n)\ldots(2\cdot n)}_{\#(2\cdot n)=m-3}nnn \qquad \text{(X)}$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$143 \times \underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=m} \times n = nnn\underbrace{(2\cdot n)(2\cdot n)(2\cdot n)\ldots(2\cdot n)}_{\#(2\cdot n)=m-3}nnn$$

โดยบทตั้ง 1 จะได้ว่า

$$143 \times \underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=m} \times 1 = 111\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=m-3}111$$

ฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง กำหนดให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$143 \times \underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=m} \times k = kkk\underbrace{(2\cdot k)(2\cdot k)(2\cdot k)\ldots(2\cdot k)}_{\#(2\cdot k)=m-3}kkk$$

เราจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง พิจารณา

$$
\begin{aligned}
&143\times\underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=m}\times(k+1)\\
&=\left(143\times\underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=m}\times k\right)+\left(143\times\underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=m}\times 1\right)\\
&=\left(kkk\underbrace{(2\cdot k)(2\cdot k)(2\cdot k)\ldots(2\cdot k)}_{\#(2\cdot k)=m-3}kkk\right)+\left(111\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=m-3}111\right)\\
&=(k+1)(k+1)(k+1)\left(\underbrace{(2\cdot k+2)(2\cdot k+2)(2\cdot k+2)\ldots(2\cdot k+2)}_{\#(2\cdot k+2)=m-3}\right)(k+1)(k+1)(k+1)\\
&=(k+1)(k+1)(k+1)\left(\underbrace{[2\cdot(k+1)][2\cdot(k+1)][2\cdot(k+1)]\ldots[2\cdot(k+1)]}_{\#(2\cdot(k+1))=m-3}\right)(k+1)(k+1)(k+1)
\end{aligned}
$$

ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$143\times\underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=m}\times n = nnn\underbrace{(2\cdot n)(2\cdot n)(2\cdot n)\ldots(2\cdot n)}_{\#(2\cdot n)=m-3}nnn$$

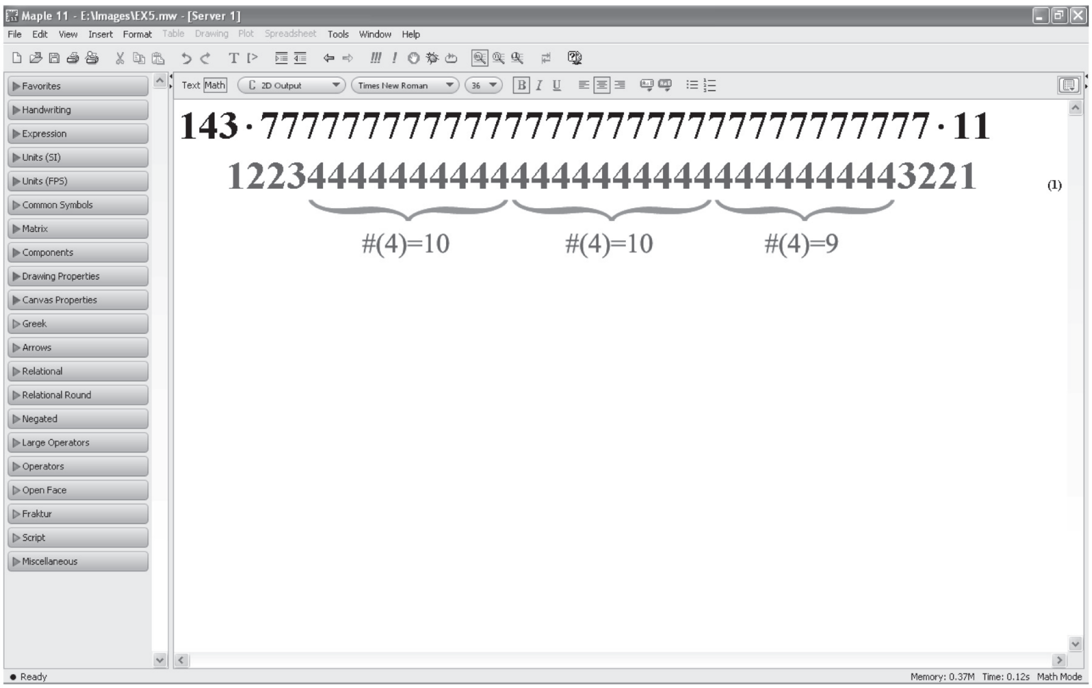
สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n □

ตัวอย่าง 12 จงหา $143\times\underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=33}\times 11$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 11 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
143\times\underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=33}\times 11 &= {}_1 1_1 1_1 1\underbrace{(22)(22)(22)\ldots(22)}_{\#(22)=30}{}_1 1_1 1_1 1\\
&= {}_1 1_1 1_1 1\underbrace{{}_2 2_2 2_2 2\ldots{}_2 2}_{\#({}_2 2)=30}{}_1 1_1 1_1 1\\
&= 1223\underbrace{444\ldots4}_{\#(4)=29}3221
\end{aligned}
$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์



โดยทฤษฎีบท 5, 7 และ 11 เราจะได้รับบทแทรก 13 ทันที

บทแทรก 13 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$143\times\underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=m}\times n \;=\; \begin{cases} n00n & ; m=1 \\ nn0nn & ; m=2 \\ nnn\underbrace{(2\cdot n)(2\cdot n)(2\cdot n)\ldots(2\cdot n)}_{\#(2\cdot n)=m-3}nnn & ; m\ge 3 \end{cases} \qquad \text{(XI)}$$

โดยบทแทรก 13 ทำให้เราได้รับบทแทรก 14 ทันที

บทแทรก 14 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$143\times\underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=m}\times(-n) \;=\; \begin{cases} -(n00n) & ; m=1 \\ -(nn0nn) & ; m=2 \\ -(nnn\underbrace{(2\cdot n)(2\cdot n)(2\cdot n)\ldots(2\cdot n)}_{\#(2\cdot n)=m-3}nnn) & ; m\ge 3 \end{cases} \qquad \text{(XII)}$$

บทสรุป

รูปแบบทั่วไปที่แน่นอนหรือสูตรของผลคูณของจำนวน 143 กับจำนวนเต็มบวกที่หารลงตัวด้วยจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 7 หาได้จริงตามบทแทรก 13 ซึ่งแบ่งออกได้เป็นสามกรณีตามจำนวนของเลขโดด 7 ของ $\underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=n}$ ดังนี้

$$143\times\underbrace{777\ldots7}_{\#(7)=m}\times n \;=\; \begin{cases} n00n & ;\, m=1 \\ nn0nn & ;\, m=2 \\ nnn\underbrace{(2\cdot n)(2\cdot n)(2\cdot n)\ldots(2\cdot n)}_{\#(2\cdot n)=m-3}nnn & ;\, m\geq 3 \end{cases}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และรูปแบบที่ได้ยังสอดคล้องกับข้อสังเกตที่เราพบอีกด้วย โดยอาศัยจำนวนเศษเหลือจนกระทั่งได้สูตรการหาผลคูณนี้ขึ้นมา ทำให้การหาผลคูณของจำนวน 143 กับจำนวนเต็มบวกที่หารลงตัวด้วยจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 7 เป็นเรื่องที่สะดวกและไม่ยุ่งยากเกินไป

จากบทความนี้ ผู้อ่านสามารถศึกษาลักษณะที่สวยงามของการกระทำของจำนวนเต็มต่างๆ ได้โดยอาศัยจำนวนเศษเหลือและหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการสร้างเลขโดดและการพิสูจน์ นอกเหนือจากทฤษฎีบทต่างๆ ที่ได้รับจากการศึกษา ผู้อ่านยังจะได้พบกับความสวยงามของคณิตศาสตร์อีกด้วย

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่านสำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์ โดยบทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย: Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA)

เอกสารอ้างอิง

1. ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2556. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ. *วารสารนเรศวรพะเยา* อยู่ระหว่างการตีพิมพ์.
2. อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2554. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข. *วารสารนเรศวรพะเยา* 4(2): 29-35.
3. Clark, W.E. 2002. Elementary Number Theory. Department of Mathematics, University of South Florida. USA. Available from URL: http://shell.cas.usf.edu/~wclark/elem_num_th_book.pdf. 25 July 2012.

ได้รับบทความวันที่ 26 กรกฎาคม 2555
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 4 ตุลาคม 2555