บทความวิจัย

ขอบเขตไม่เอกรูปบนการประมาณแบบจุดของการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินาม

คณินทร์ ธีรภาพโอฬาร*

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เราใช้วิธีของสไตน์สำหรับการแจกแจงทวินามและฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มทวินามทั่วไป เพื่อหาขอบเขตไม่เอกรูปบนการประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินาม ผลลัพธ์ของการประมาณดังกล่าวอยู่ในรูปของระยะห่างระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินามทั่วไปและตัวแปรสุ่มทวินามพร้อมด้วยขอบเขตบนแบบไม่เอกรูป นอกจากนี้เราได้ยกตัวอย่างเชิงตัวเลขบางส่วนเพื่อแสดงผลลัพธ์ของการประมาณนี้

คำสำคัญ: การแจกแจงทวินาม การแจกแจงทวินามทั่วไป การประมาณทวินาม วิธีของสไตน์ ฟังก์ชัน w

---

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

*ผู้นิพนธ์ประสานงาน, email: kanint@buu.ac.th

A Non-Uniform Bound on Pointwise Approximation of Generalized Binomial Distribution by Binomial Distribution

Kanint Teerapabolarn*

ABSTRACT

In this study, we use Stein's method for the binomial distribution and the *w*-function associated with generalized binomial random variables to determine a non-uniform bound on the binomial approximation to the generalized binomial distribution, in terms of the distance between generalized binomial and binomial probability distribution functions together with its non-uniform upper bound. Furthermore, we also give some numerical examples to illustrate the result of this approximation.

Keywords: binomial distribution, binomial approximation, generalized binomial distribution, Stein's method, *w*-function.

Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University

*Corresponding author, email: kanint@buu.ac.th

บทนำ

การแจกแจงทวินามทั่วไป (generalized binomial distribution) เป็นการแจกแจงวิยุต (discrete distribution) แบบหนึ่งที่ Dwass [5] ได้นำเสนอขึ้นมาเพื่อใช้เป็นการแจกแจงวิยุตที่สามารถใช้อธิบายการแจกแจงที่มีความสำคัญอื่นๆ ได้ครอบคลุมถึงสามการแจกแจง คือ การแจกแจงทวินาม (binomial distribution) การแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริก (hypergeometric distribution) และการแจกแจงโพลยา (Pólya distribution) การแจกแจงทวินามทั่วไปที่ Dwass [5] ได้นำเสนอ มีภูมิหลังและรูปแบบดังนี้ (สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ใน คณินทร์ ธีรภาพโอฬาร [1])

สมมติว่าประชากรชุดหนึ่งประกอบด้วยสมาชิกสองประเภทที่แตกต่างกัน คือ ประเภท I และประเภท II กำหนดให้ A และ B แทนปริมาณเริ่มต้นของสมาชิกประเภทที่ I และ II (A และ B ไม่จำเป็นต้องมีค่าเป็นจำนวนเต็ม) สมมติว่าเราสามารถสุ่มตัวอย่างจากประชากรชุดนี้ โดยผลลัพธ์ที่ได้จะต้องเป็นสมาชิกประเภท I หรือ II (อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น) ด้วยความน่าจะเป็นที่เป็นสัดส่วนกับปริมาณที่เหลือของสมาชิกแต่ละประเภท และแต่ละครั้งของการสุ่มเราจะนำสมาชิกประเภทเดียวกับสมาชิกที่สุ่มได้ในปริมาณ α ออกจากประชากรที่มีอยู่ในขณะนั้น กรณีที่ α เป็นลบหรือน้อยกว่าศูนย์ เราหมายความว่าให้เพิ่มสมาชิกในปริมาณ $-\alpha$ เข้าไปในประชากร ตัวอย่างเช่น เมื่อเริ่มต้นเราสามารถสุ่มหยิบสมาชิกประเภท I หรือ II ด้วยความน่าจะเป็น $\frac{A}{A+B}$ หรือ $\frac{B}{A+B}$ ถ้าผลลัพธ์ที่สุ่มได้ คือ สมาชิกประเภท I แล้วปริมาณสมาชิกทั้งหมดในประชากรจะมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงเป็น $A+B-\alpha$ โดยปริมาณสมาชิกประเภท I จะมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงเป็น $A-\alpha$ ส่วนปริมาณสมาชิกประเภท II จะมีค่าเท่าเดิมเป็น B และความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (conditional probability) ของการสุ่มหยิบสมาชิกประเภท I และ II ในการสุ่มครั้งต่อไปจะมีค่าเท่ากับ $\frac{A-\alpha}{A+B-\alpha}$ และ $\frac{B}{A+B-\alpha}$ ตามลำดับ กระบวนการทดลองนี้จะสิ้นสุดเมื่อจำนวนครั้งของการสุ่มในทำนองเดียวกันนี้ครบ n ครั้ง ($n \in \mathbb{N}$) ให้ X แทนจำนวนครั้งที่สุ่มได้สมาชิกประเภท I ดังนั้นโดยใช้คุณสมบัติที่ว่าผลรวมของความน่าจะเป็นของทุกค่าของตัวแปรสุ่มวิยุต X ต้องมีค่าเท่ากับหนึ่ง และใช้เอกลักษณ์ที่รู้จักกันเป็นอย่างดี [5] คือ $(x+y)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{(k)}y^{(n-k)}$ เมื่อ $x^{(i)} = x(x-\alpha)\cdots(x-(i-1)\alpha)$ ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X จึงเขียนได้เป็น

$$p_X(k) = \binom{n}{k}\frac{A^{(k)}B^{(n-k)}}{(A+B)^{(n)}} \quad , k = 0, 1, \ldots, n \tag{1}$$

การแจกแจงที่เขียนอยู่ในรูปของสมการ (1) Dwass [5] เรียกว่า การแจกแจงทวินามทั่วไปที่มีพารามิเตอร์ A, B, α และ n และเรียกตัวแปรสุ่ม X ว่าตัวแปรสุ่มทวินามทั่วไป โดยมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X เป็น $\mu = \frac{nA}{A+B}$ และ $\sigma^2 = \frac{nAB(A+B-n\alpha)}{(A+B)(A+B-\alpha)}$ ตามลำดับ เราจะสังเกตได้ว่าการแจกแจงนี้ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ทั้ง 4 ตัว คือ A, B, α และ n โดยที่ A และ B เป็นจำนวนจริงบวก n เป็นจำนวนเต็มบวก α เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขหรือข้อจำกัดที่ว่า $\alpha(n\text{-}1) \le A+B$ และ $A^{(i)}$ และ $B^{(i)}$ จะต้องไม่เป็นจำนวนลบสำหรับ $i = 1,\ldots,n$ และในกรณีที่ $\alpha \ne 0$ ค่าความน่าจะเป็น $p_X(k)$ ในสมการ (1) จะกำหนดโดย $\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\alpha}$ และ n โดยเฉพาะอย่างยิ่งค่าของ α สามารถทำให้การแจกแจงนี้เปลี่ยนรูปไปเป็นการแจกแจงที่

สำคัญอื่นๆ ได้ ซึ่งสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก Wongkasem และคณะ [8] หรือ คณินทร์ ธีรภาพโอฬาร [1]

พิจารณาฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นในสมการ (1) เราสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$p_X(k)=\binom{n}{k}\frac{\left[A(A-\alpha)\dots(A-(k-1)\alpha)\right]\left[B(B-\alpha)\dots(B-(n-k-1)\alpha)\right]}{(A+B)(A+B-\alpha)\dots(A+B-(n-1)\alpha)}$$

$$=\binom{n}{k}\frac{\left[\frac{A}{A+B}\frac{(A-\alpha)}{A+B}\dots\frac{(A-(k-1)\alpha)}{A+B}\right]\left[\frac{B}{A+B}\frac{(B-\alpha)}{A+B}\dots\frac{(B-(n-k-1)\alpha)}{A+B}\right]}{\frac{(A+B)}{A+B}\frac{(A+B-\alpha)}{A+B}\dots\frac{(A+B-(n-1)\alpha)}{A+B}} \qquad (2)$$

จากสมการ (2) เราจะเห็นว่าถ้า $A+B$ ลู่เข้าสู่ค่าอนันต์ และ $\frac{A}{A+B}$ ลู่เข้าสู่เป็นค่าคงตัว p แล้วการแจกแจงทวินามทั่วไปที่มีพารามิเตอร์ A, B, α และ n จะลู่เข้าสู่การแจกแจงทวินามที่มีพารามิเตอร์ n และ p นั่นคือ $p_X(k)=\binom{n}{k}\frac{A^{(k)}B^{(n-k)}}{(A+B)^{(n)}}\to\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ สำหรับทุก k = 0, 1,...,n และทุกจำนวนจริง α ดังนั้นเราสามารถประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินาม ถ้าหากว่าเรากำหนดเงื่อนไขของพารามิเตอร์ของทั้งสองการแจกแจงมีความสอดคล้องกัน ดังเช่นในงานวิจัยของ Wongkasem และคณะ [8] ได้ใช้วิธีของสไตน์ (Stein's method) สำหรับการแจกแจงทวินามพร้อมด้วยฟังก์ชัน w (w-function) ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มทวินามทั่วไปมาประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินาม โดยอยู่ในรูปของผลต่างระหว่างการแจกแจงทวินามทั่วไป และการแจกแจงทวินามพร้อมด้วยขอบเขตบนแบบเอกรูป (uniform upper bound) ดังนี้

$$\left|\sum_{k\in E}p_X(k)-\sum_{k\in E}b(k;n,p)\right|\le\left(1-p^{n+1}-(1-p)^{n+1}\right)\frac{n(n-1)|\alpha|}{(n+1)(A+B-\alpha)} \qquad (3)$$

โดยที่ E คือ เซตย่อยของเซต $\{0,\dots,n\}$, $p=\frac{A}{A+B}$ และ $b(k;n,p)\equiv\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

จากอสมการ (3) ถ้า $E=\{x_0\}$ เมื่อ $x_0\in\{0,\dots,n\}$ เราจะได้ว่า

$$\left|p_X(x_0)-b(x_0;n,p)\right|\le\left(1-p^{n+1}-(1-p)^{n+1}\right)\frac{n(n-1)|\alpha|}{(n+1)(A+B-\alpha)} \qquad (4)$$

เราสามารถสังเกตได้ว่าขอบเขตบนทางด้านขวามือของอสมการ (4) จะไม่เปลี่ยนแปลงสำหรับทุกค่าของ $x_0\in\{0,\dots,n\}$ ซึ่งอาจทำให้การประมาณการแจกแจงข้างต้นไม่สอดคล้องกับค่าของ x_0 ที่เปลี่ยนไป แต่ถ้าขอบเขตบนทางด้านขวามือของอสมการ (4) สามารถเปลี่ยนแปลงไปตามค่าของ x_0 ในลักษณะที่ทำให้การประมาณการแจกแจงมีความถูกต้องมากขึ้นก็น่าจะเป็นผลดีมากกว่า ในงานวิจัยนี้เราต้องการประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินามในรูปแบบเช่นเดียวกับอสมการ (4) แต่ขอบเขตบนของการประมาณจะอยู่ในรูปแบบไม่เอกรูป (non-uniform upper bound) ดังนั้นวัตถุประสงค์ของการวิจัยนี้ คือ หาขอบเขตบนไม่เอกรูปบนการประมาณแบบจุดของการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินาม

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการดำเนินการหาผลลัพธ์หลักที่อยู่ในรูปแบบที่คล้ายกับอสมการ (4) เราจะดำเนินการหาโดยใช้วิธีของสไตน์สำหรับการแจกแจงทวินามพร้อมด้วยฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มทวินามทั่วไป เราควรเริ่มต้นด้วยการหารูปแบบของฟังก์ชัน w แล้วจึงสร้างบทตั้ง (lemma) ที่จำเป็นสำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักต่อไป

1. ฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มทวินามทั่วไป

ให้ตัวแปรสุ่มทวินามทั่วไป X มีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น $p_X(k)$ ที่กำหนดเช่นเดียวกับในสมการ (1) และ $p_X(k) > 0$ สำหรับทุก $k \in \{0,1,...,n\}$ แล้วเราจะได้ฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่ม X ดังบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 1 ให้ $w(X)$ เป็นฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มทวินามทั่วไป X แล้ว

$$w(k) = \frac{(n-k)(A-k\alpha)}{(A+B)\sigma^2},\ k = 0,1,...,n \tag{5}$$

โดยที่ $\sigma^2 = \dfrac{nAB(A+B-n\alpha)}{(A+B)^2(A+B-\alpha)}$

พิสูจน์ ดูได้ใน Wongkasem และคณะ [8]

รูปแบบความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นคุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชัน w สำหรับการหาผลลัพธ์หลัก ซึ่ง Cacoullos และ Papathanasiou [4] ได้กำหนดไว้ดังนี้

ถ้าตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มและไม่เป็นลบ (non-negative integer-valued random variable) X มี $p_X(k) > 0$ สำหรับทุก k ในเซตค้ำจุนของ X (support of X) และความแปรปรวน $0 < \sigma^2 < \infty$ แล้ว

$$Cov(X, g(X)) = \sigma^2 E[w(X)\Delta g(X)] \tag{6}$$

สำหรับฟังก์ชัน $g : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $E|w(X)\Delta g(X)| < \infty$ โดยที่ $\Delta g(x) = g(x+1) - g(x)$ และเราจะสังเกตได้ว่า $E[w(X)] = 1$ (เมื่อกำหนด $g(x) = x$ สำหรับทุกตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มและไม่เป็นลบ X

2. วิธีของสไตน์สำหรับการแจกแจงทวินาม

วิธีของสไตน์ได้เริ่มต้นประมาณปี 1972 โดย Stein [6] ได้นำเสนอวิธีทั่วไปที่มีประสิทธิภาพในการประมาณการแจกแจงของผลรวมของตัวแปรสุ่มที่มีความสัมพันธ์กัน (dependent random variables) ด้วยการแจกแจงปรกติ (normal distribution) ต่อมา Chen [3] ได้ปรับและพัฒนาวิธีของสไตน์แบบเดิมมาสู่การประมาณการแจกแจงของผลรวมของตัวแปรสุ่มแบร์นูลลีที่มีความสัมพันธ์กัน (dependent Bernoulli random variables) ด้วยการแจกแจงปัวซง (Poisson distribution) และประมาณปี 1986 วิธีของสไตน์จึงได้ปรับและพัฒนามาสู่การประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่มด้วยการแจกแจงทวินามโดย Stein [7] วิธีของสไตน์เริ่มต้นด้วยสมการของสไตน์ (Stein's equation) ของแต่ละการแจกแจงที่สมนัยกัน และสมการ

ของสไตน์สำหรับการแจกแจงทวินามที่มีพารามิเตอร์ $n \geq 1$ และ $p = 1-q \in (0,1)$ (เมื่อกำหนดฟังก์ชัน h) นิยามโดย

$$(n-x)pg(x+1) - qxg(x) = h(x) - \mathcal{B}_{n,p}(h) \tag{7}$$

โดยที่ $\mathcal{B}_{n,p}(h) = \sum_{k=0}^{n} h(k)\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ และ g และ h เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีขอบเขตที่นิยามบนเซต $\{0,1,...,n\}$

สำหรับ $E \subseteq \{0,1,...,n\}$ ให้ $h_E : \{0,1,...,n\} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$h_E(x) = \begin{cases} 1\ , x \in E \\ 0\ , x \notin E \end{cases}$$

ต่อไปเราจะพิจารณาเช่นเดียวกับ Barbour และคณะ [2] หน้า 189 โดยให้ $g_E : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องสมการ (7) โดยที่ $g_E(0) = g_E(1)$ และ $g_E(x) = g_E(n)$ สำหรับทุก $x \geq n$

สำหรับ $E = \{x_0\}$ เมื่อ $x_0 \in \{0,...,n\}$ เราสามารถเขียนผลเฉลย $g_{x0} = g\{x_0\}$ ของสมการ (7) ได้เป็น

$$g_{x_0}(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{x_0} p^{x_0-x}\mathcal{B}_{n,p}(1-h_{C_{x-1}})}{x\binom{n}{x} q^{x_0-(x-1)}}\ , & x_0 < x \\[2ex] -\dfrac{\binom{n}{x_0} p^{x_0-x}\mathcal{B}_{n,p}(h_{C_{x-1}})}{x\binom{n}{x} q^{x_0-(x-1)}}\ , & x_0 \geq x \geq 1 \end{cases} \tag{8}$$

โดยที่ $C_x = \{0,...,x\}$

จากผลเฉลยในสมการ (8) เราสามารถสร้างบทตั้งเพื่อช่วยในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไปได้ ดังนี้

บทตั้ง 2 *สำหรับ* $x_0 \in \{0,...,n\}$ *ให้* $\Delta g_{x0}(x) = g_{x0}(x+1) - g_{x0}(x)$ *และ* $n > 1$ *แล้วเราจะได้ว่าอสมการต่อไปนี้เป็นจริง*

$$\sup_{x\geq 1} |\Delta g_{x_0}(x)| \leq \begin{cases} \dfrac{np+q^n-1}{(n-1)np^2} & , x_0 = 0 \\ \dfrac{1-q^{n-1}}{(n-1)p} & , x_0 = 1 \\ \min\left\{\dfrac{1-p^n}{qx_0}, \dfrac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}\right\} & , x_0 \geq 2 \end{cases} \tag{9}$$

พิสูจน์ เราแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นสองกรณี ดังนี้

กรณี 1 $x_0 = 0$

ในกรณีนี้โดย Barbour และคณะ [2] เราจะได้ว่า g_0 เป็นฟังก์ชันลดและมีค่ามากกว่าศูนย์สำหรับ $x \in \{1,...,n\}$ ดังนั้นสำหรับ $x \in \{1,...,n\}$ เราจะได้

$$\begin{aligned} |\Delta g_0(x)| &= g_0(x) - g_0(x+1) \\ &= \frac{\sum_{k=x}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}}{x\binom{n}{x}p^x q^{-x+1}} - \frac{\sum_{k=x+1}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}}{(x+1)\binom{n}{x+1}p^{x+1}q^{-x}} \\ &= \frac{q^{n-1}}{x\binom{n}{x}p^x q^{n-x}}\left\{\sum_{k=x}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} - \sum_{k=x}^{n-1}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\frac{x(n-k)}{(k+1)(n-k)}\right\} \\ &= \frac{q^{n-1}}{x\binom{n}{x}p^x q^{n-x}}\sum_{k=x}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\left\{1 - \frac{x(n-k)}{(k+1)(n-x)}\right\} \\ &\leq \frac{q^{n-1}}{npq^{n-1}}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\left\{1 - \frac{n-k}{(k+1)(n-1)}\right\} \\ &= g_0(1) - g_0(2) \\ &= \frac{1-q^n}{np} - \frac{q(1-q^n-npq^{n-1})}{(n-1)np^2} \\ &= \frac{np+q^n-1}{(n-1)np^2} \end{aligned}$$

กรณี 2 $x_0 \geq 1$

โดย Barbour และคณะ [2] เราจะได้ว่า g_{x0} เป็นฟังก์ชันลดและมีค่าน้อยกว่าศูนย์สำหรับ $x \in \{1,\ldots,x_0\}$ และ g_{x0} เป็นฟังก์ชันลดและมีค่ามากกว่าศูนย์ สำหรับ $x \in \{x_0+1, x_0+2,\ldots,n\}$ ดังนั้นเราจะได้ว่า $|\Delta g_{x0}(x)| \leq g_{x0}(x_0+1) - g_{x0}(x_0)$

พิจารณา $x_0 = 1$ เราจะได้

$$
\begin{aligned}
|\Delta g_1(x)| &\leq g_1(2) - g_1(1) \\
&= \frac{\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{(n-1)p} + \frac{\sum_{k=0}^{0}\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{q} \\
&= \frac{1-q^n - npq^{n-1}}{(n-1)p} + q^{n-1} \\
&= \frac{1-q^{n-1}}{(n-1)p}
\end{aligned}
$$

พิจารณา $x_0 \geq 2$ เราจะได้

$$
|\Delta g_{x_0}(x)| \leq \frac{\sum_{k=x_0+1}^{n}\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{(n-x_0)p} + \frac{\sum_{k=0}^{x_0-1}\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{qx_0} \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{qx_0}\left\{\sum_{k=x_0+1}^{n}\binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-(k-1)} \frac{x_0(n-k+1)}{k(n-x_0)} + \sum_{k=0}^{x_0-1}\binom{n}{k} p^k q^{n-k}\right\} \\
&\leq \frac{1}{qx_0}\left\{\sum_{k=x_0}^{n-1}\binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \sum_{k=0}^{x_0-1}\binom{n}{k} p^k q^{n-k}\right\} \\
&= \frac{1-p^n}{qx_0}
\end{aligned} \tag{11}
$$

และจาก (10) จะได้

$$
\begin{aligned}
|\Delta g_{x_0}(x)| &\le \frac{\sum_{k=x_0+1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!(n-x_0)}p^k q^{n+1-k}}{qp}+\frac{\sum_{k=0}^{x_0-1}\frac{n!}{x_0 k!(n-k)!}p^{k+1}q^{n-k}}{pq}\\
&\le \frac{\sum_{k=x_0+1}^{n}\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}p^k q^{n+1-k}\left(\frac{n+1-k}{n-x_0}\right)}{(n+1)qp}+\frac{\sum_{k=0}^{x_0-1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}p^{k+1}q^{n-k}\left(\frac{k+1}{x_0}\right)}{(n+1)pq}\\
&\le \frac{1}{(n+1)pq}\left\{\sum_{k=x_0+1}^{n}\binom{n+1}{k}p^k q^{n+1-k}+\sum_{k=1}^{x_0}\binom{n+1}{k}p^k q^{n+1-k}\right\}\\
&= \frac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

จากอสมการ (11) และ (12) เราจะได้

$$
|\Delta g_{x_0}(x)| \le \min\left\{\frac{1-p^n}{qx_0},\frac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}\right\}
$$

ดังนั้น จากการพิสูจน์ทั้งสองกรณีเราจะได้อสมการ (9) เป็นจริง

ผลการวิจัย

ผลการวิจัยที่เราต้องการในงานวิจัยนี้ คือ ขอบเขตบนไม่เอกรูปบนการประมาณแบบจุดของการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินาม (หาได้โดยใช้วิธีของสไตน์สำหรับการแจกแจงทวินามและฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มทวินามทั่วไป) และทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นผลลัพธ์ของการประมาณดังกล่าว

ทฤษฎีบท 1 *ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มทวินามทั่วไป และ $p=\frac{A}{A+B}$ แล้วจะได้ว่า*

$$
\left|p_X(x_0)-b(x_0;n,p)\right| \le \begin{cases}
\dfrac{(np+q^n-1)B|\alpha|}{(A+B-\alpha)A} & ,\ x_0=0\\
\dfrac{(1-q^{n-1})qn|\alpha|}{A+B-\alpha} & ,\ x_0=1\\
\dfrac{n(n-1)|\alpha|}{A+B-\alpha}\min\left\{\dfrac{(1-p^n)p}{x_0},\dfrac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{n+1}\right\}, & x_0\in\{2,\dots,n\}
\end{cases}
$$

พิสูจน์ จากสมการ (7) เมื่อแทน x ด้วย X และให้ $h = h_{x0}$ แล้วหาค่าคาดหมายตลอดสมการเราจะได้

$$\begin{aligned} p_X(x_0) - b(x_0; n, p) &= E\left[(n-X)pg_{x_0}(X+1) - qXg_{x_0}(X)\right] \\ &= E[npg_{x_0}(X+1) - pX\Delta gx_{x_0}(X) - Xg_{x_0}(X)] \\ &= E[\mu g_{x_0}(X+1)] - pE[X\Delta g_{x_0}(X)] - E[Xg_{x_0}(X)] \\ &= E[\mu g_{x_0}(X+1)] - pE[X\Delta g_{x_0}(X)] - Cov(X, g_{x_0}(X)) - E[\mu g_{x_0}(X)] \\ &= E\left[\mu\Delta \mathrm{g}_{x_0}(X)\right] - pE\left[X\Delta g_{x_0}(X)\right] - Cov(X, g_{x_0}(X)) \end{aligned} \tag{13}$$

โดยที่ g_{x0} นิยามเช่นเดียวกับสมการ (9) และจากบทตั้ง 2 เราจะได้ $E\left|w(X)\Delta g_{x0}(X)\right| < \infty$ ดังนั้นโดยสมการ (6) เราสามารถเขียนสมการ (13) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \left|p_X(x_0) - b(x_0; n, p)\right| &\le \left|E\left[\mu\Delta \mathrm{g}_{x_0}(X)\right] - pE\left[X\Delta g_{x_0}(X)\right] - \sigma^2 E\left[w(X)\Delta g_{x_0}(X)\right]\right| \\ &= \left|E\left[\left(\mu - pX - \sigma^2 w(X)\right)\Delta g_{x_0}(X)\right]\right| \\ &\le E\left[\left|\mu - pX - \sigma^2 w(X)\right|\left|\Delta \mathrm{g}_{x_0}(X)\right|\right] \\ &\le \sup_{x\ge 1}|\Delta g_{x_0}(x)|\, E\left|\mu - pX - \sigma^2 w(X)\right| \end{aligned} \tag{14}$$

เนื่องจาก $\mu - pk - \sigma^2 w(k) = \dfrac{nA}{A+B} - \dfrac{kA}{A+B} - \dfrac{(n-k)(A-k\alpha)}{A+B} = \dfrac{(n-k)k\alpha}{A+B}$ ซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เมื่อ $\alpha \ge 0$ และน้อยกว่าศูนย์ เมื่อ $\alpha < 0$ นั่นคือสำหรับ $\alpha \ge 0$ เราจะได้ว่า $E\left|\mu - pX - \sigma^2 w(X)\right| =$ $\mu - pE(X) - \sigma^2 E[w(X)] = \dfrac{pqn(n-1)\alpha}{A+B-\alpha}$ และสำหรับ $\alpha < 0$ เราจะได้ว่า $E\left|\mu - pX - \sigma^2 w(X)\right| =$ $-\dfrac{pqn(n-1)\alpha}{A+B-\alpha}$ ดังนั้นจึงทำให้ $E\left|\mu - pX - \sigma^2 w(X)\right| = \dfrac{pqn(n-1)|\alpha|}{A+B-\alpha}$ เมื่อแทนค่าใน (14) จะได้ว่า

$$\left|p_X(x_0) - b(x_0; n, p)\right| \le \sup_{x\ge 1}|\Delta g_{x_0}(x)|\frac{pqn(n-1)|\alpha|}{A+B-\alpha} \tag{15}$$

และโดยใช้บทตั้ง 2 กับอสมการ (15) เราจะได้ผลลัพธ์ตามที่ต้องการ

บทแทรก 1 *สำหรับ* $n \ge 2$ และ $0 < p < 1$ *แล้วจะได้ว่า*

1. $\min\left\{\dfrac{1-p^n}{qx_0}, \dfrac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}\right\} \le \dfrac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}$ *สำหรับ* $x_0 \in \{2, ..., n\}$ (16)

2. $\dfrac{np+q^n-1}{(n-1)np^2} < \dfrac{1-q^{n-1}}{(n-1)p} \le \dfrac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}$ (17)

พิสูจน์ 1. เราเห็นได้ชัดว่าอสมการ (16) เป็นจริง

2. เริ่มต้นเราจะแสดงว่าอสมการทางซ้ายมือของ (17) หรือ $\dfrac{np+q^n-1}{(n-1)np^2}<\dfrac{1-q^{n-1}}{(n-1)p}$ เป็นจริง

เนื่องจาก $\dfrac{np+q^n-1}{(n-1)np^2}=\dfrac{1-q^n}{np}-\dfrac{q(1-q^n-npq^{n-1})}{(n-1)np^2}<\dfrac{1-q^n}{np}$ ซึ่งถ้าเราแสดงว่า $\dfrac{1-q^n}{np}<\dfrac{1-q^{n-1}}{(n-1)p}$ เป็นจริง แล้วจะได้ว่าอสมการข้างต้นเป็นจริงด้วย

เพราะว่า $nq^{n-1} < 1+\cdots+q^{n-1}$ และ $p\,(1+\cdots+q^{n-1}) = 1-q^n$ แล้วเราจะได้ว่า $npq^{n-1} < 1-q^n$ และ

$$\begin{aligned} npq^{n-1}<1-q^n &\Rightarrow nq^{n-1}-nq^n-1+q^n<0 \\ &\Rightarrow n-1-(n-1)q^n<n-nq^{n-1} \\ &\Rightarrow (n-1)(1-q^n)<n(1-q^{n-1}) \\ &\Rightarrow \frac{1-q^n}{np}<\frac{1-q^{n-1}}{(n-1)p} \end{aligned}$$

ดังนั้นเราจะได้ว่าอสมการทางซ้ายมือของ (17) เป็นจริง

ต่อไปเราจะแสดงว่า $\dfrac{1-q^{n-1}}{(n-1)p}\le\dfrac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}$

เนื่องจาก $\dfrac{1-q^{n-1}}{(n-1)p}=\dfrac{\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}}{(n-1)p}+\dfrac{\sum_{k=0}^{0}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}}{q}$ และ

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}}{(n-1)p}+\frac{\sum_{k=0}^{0}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}}{q} &= \frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}p^kq^{n+1-k}\left(\frac{n+1-k}{n-1}\right)}{(n+1)qp}+\frac{(n+1)pq^{n+1-1}}{(n+1)pq} \\ &\le \frac{1}{(n+1)pq}\left\{\sum_{k=2}^{n}\binom{n+1}{k}p^kq^{n+1-k}+(n+1)pq^{n+1-1}\right\} \\ &= \frac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq} \end{aligned}$$

ดังนั้นเราจะได้ว่าอสมการ (17) เป็นจริง □

บทแทรก 1 สร้างขึ้นมาเพื่อใช้ในการเปรียบเทียบผลลัพธ์ทั้งหมดในทฤษฎีบท 1 และผลลัพธ์ในอสมการ (4) และโดยบทแทรก 1 เราพบว่าขอบเขตบนแบบไม่เอกรูปของผลลัพธ์ทั้งหมดในทฤษฎีบท 1 ดีกว่าขอบเขตบนแบบเอกรูปในอสมการ (4)

บทแทรกที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้เป็นผลลัพธ์โดยตรงที่ได้มาจากทฤษฎีบท 1 ซึ่งเกี่ยวข้องกับการประมาณแบบจุดของการแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริกและการแจกแจงโพลยาด้วยการแจกแจงทวินาม

บทแทรก 2 *ถ้า* $\alpha > 0$ *และ* A/α *และ* B/α *เป็นจำนวนเต็มแล้วเราจะได้*

$$\left|h(x_0;A,B,n,\alpha)-b(x_0;n,p)\right| \le \begin{cases} \dfrac{(np+q^n-1)B\alpha}{(A+B-\alpha)A} & , x_0=0 \\ \dfrac{(1-q^{n-1})qn\alpha}{A+B-\alpha} & , x_0=1 \\ \dfrac{n(n-1)\alpha}{A+B-\alpha}\min\left\{\dfrac{(1-p^n)p}{x_0},\dfrac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{n+1}\right\}, & x_0\in\{2,\dots,n\} \end{cases}$$

โดยที่ $h(x_0;A,B,n,\alpha)\equiv\dfrac{\binom{A/\alpha}{x_0}\binom{B/\alpha}{n-x_0}}{\binom{A/\alpha+B/\alpha}{n}}$ *คือ ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไฮเพอร์จีออเมตริกที่มีพารามิเตอร์* A, B, α *และ* n

บทแทรก 3 *สำหรับ* $\alpha < 0$ *เราจะได้ว่า*

$$\left|py(x_0;A,B,n,\alpha)-b(x_0;n,p)\right| \le \begin{cases} \dfrac{(np+q^n-1)B(-\alpha)}{(A+B-\alpha)A} & , x_0=0 \\ \dfrac{(1-q^{n-1})qn(-\alpha)}{A+B-\alpha} & , x_0=1 \\ \dfrac{n(n-1)(-\alpha)}{A+B-\alpha}\min\left\{\dfrac{(1-p^n)p}{x_0},\dfrac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{n+1}\right\}, & x_0\in\{2,\dots,n\} \end{cases}$$

โดยที่ $py(x_0;A,B,n,\alpha)\equiv\dfrac{\binom{-A/\alpha+x_0-1}{x_0}\binom{-B/\alpha+n-x_0-1}{n-x_0}}{\binom{-A/\alpha-B/\alpha+n-1}{n}}$ *คือ ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มโพลยาที่มีพารามิเตอร์* A, B, α *และ* n

ผลลัพธ์ในทฤษฎีบท 1 หรือในบทแทรก 2 และ 3 จะเป็นผลการประมาณทวินามที่ดี ถ้าหากว่า α และ/หรือ n และ/หรือ A มีค่าน้อย และ $A + B - \alpha$ มีค่ามาก ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของการลู่เข้าที่ได้กล่าวมาแล้ว

ตัวอย่างเชิงตัวเลข

ตัวอย่างเชิงตัวเลขต่อไปนี้เป็นเพียงตัวอย่างบางส่วนที่นำมาแสดงให้เห็นว่าการประมาณแบบจุดของการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินามมีความเหมาะสมอย่างไร (โดยพิจารณาจากขอบเขตบนของการประมาณดังกล่าว) และตัวอย่างเชิงตัวเลขสำหรับงานวิจัยนี้เป็นการแสดงการประยุกต์ใช้ผลลัพธ์ในทฤษฎีบท 1 ในส่วนที่เกี่ยวข้องกับการแจกแจงไฮเพอร์จิออเมตริกและการแจกแจงโพลยา (ในบทแทรก 2 และ 3) ดังนี้

ตัวอย่าง 1 กำหนดให้ $n = 5$, $A = 30$, $A+B = 1000$ และ $\alpha = 1$ แล้วผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้คือ

1. สำหรับขอบเขตบนแบบเอกรูป

$$\left|p_X(x_0) - b(x_0;5,0.03)\right| \le 0.000557317,\ x_0 = 0,1,\ldots,5$$

2. สำหรับขอบเขตบนแบบไม่เอกรูป

$$\left|p_X(x_0) - b(x_0;5,0.03)\right| \le \begin{cases} 0.000282683\ , x_0 = 0 \\ 0.000556887\ , x_0 = 1 \\ 0.000300301\ , x_0 = 2 \\ \dfrac{0.000600601}{x_0},\ x_0 = 3,4,5 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้ $n = 10$, $A = 50$, $A+B = 1000$ และ $\alpha = 1$ แล้วผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้ คือ

1. สำหรับขอบเขตบนแบบเอกรูป

$$\left|p_X(x_0) - b(x_0;10,0.05)\right| \le 0.003531531,\ x_0 = 0,1,\ldots,10$$

2. สำหรับขอบเขตบนแบบไม่เอกรูป

$$\left|p_X(x_0) - b(x_0;10,0.05)\right| \le \begin{cases} 0.001877880\ , x_0 = 0 \\ 0.003516147\ , x_0 = 1 \\ 0.002252252\ , x_0 = 2 \\ \dfrac{0.004504505}{x_0},\ x_0 = 3,\ldots,10 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 3 กำหนดให้ n = 20, A = 100, $A + B$ = 1000 และ $\alpha = 1$ แล้วผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้ คือ

1. สำหรับขอบเขตบนแบบเอกรูป

$$\left|p_X(x_0) - b(x_0;20,0.1)\right| \le 0.016131407,\ x_0 = 0,1,...,20$$

2. สำหรับขอบเขตบนแบบไม่เอกรูป

$$\left|p_X(x_0) - b(x_0;20,0.1)\right| \le \begin{cases} 0.010104294\ , x_0 = 0 \\ 0.015584051\ , x_0 = 1 \\ 0.016131407\ , x_0 = 2 \\ \dfrac{0.038038038}{x_0},\ x_0 = 3,...,20 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 4 กำหนดให้ n = 10, A = 50, $A + B$ = 1000 และ $\alpha = -1$ แล้วผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้ คือ

1. สำหรับขอบเขตบนแบบเอกรูป

$$\left|p_X(x_0) - b(x_0;10,0.05)\right| \le 0.003524475,\ x_0 = 0,1,...,10$$

2. สำหรับขอบเขตบนแบบไม่เอกรูป

$$\left|p_X(x_0) - b(x_0;10,0.05)\right| \le \begin{cases} 0.001874128\ , x_0 = 0 \\ 0.003509121\ , x_0 = 1 \\ 0.002247752\ , x_0 = 2 \\ \dfrac{0.004495504}{x_0},\ x_0 = 3,...,10 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 5 กำหนดให้ n = 15, A = 100, $A + B$ = 1000 และ $\alpha = -1$ แล้วผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้ คือ

1. สำหรับขอบเขตบนแบบเอกรูป

$$\left|p_X(x_0) - b(x_0;15,0.1)\right| \le 0.010682229,\ x_0 = 0,1,...,15$$

2. สำหรับขอบเขตบนแบบไม่เอกรูป

$$\left|p_X(x_0) - b(x_0;15,0.1)\right| \le \begin{cases} 0.006346674\ , x_0 = 0 \\ 0.010401232\ , x_0 = 1 \\ 0.010489511\ , x_0 = 2 \\ \dfrac{0.020979021}{x_0},\ x_0 = 3,...,15 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 6 กำหนดให้ $n = 25$, $A = 150$, $A + B = 1000$ และ $\alpha = -1$ แล้วผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้ คือ

1. สำหรับขอบเขตบนแบบเอกรูป

$$\left| p_X(x_0) - b(x_0; 25, 0.15) \right| \le 0.022716865,\ x_0 = 0,1,..,25$$

2. สำหรับขอบเขตบนแบบไม่เอกรูป

$$\left| p_X(x_0) - b(x_0; 25, 0.15) \right| \le \begin{cases} 0.015665122\ ,\ x_0 = 0 \\ 0.020799255\ ,\ x_0 = 1 \\ 0.022716865\ ,\ x_0 = 2,3 \\ \dfrac{0.08991009}{x_0},\ x_0 = 4,...,25 \end{cases}$$

ผลลัพธ์เชิงตัวเลขในตัวอย่าง 1 ถึง 6 ได้ชี้ให้เห็นว่าขอบเขตบนของการประมาณจะมีค่าน้อยถ้าหากว่า n และ/หรือ A มีค่าน้อย และ A+B−α มีค่ามาก ซึ่งแสดงว่าการประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินามจะมีประสิทธิภาพเมื่อ n และ/หรือ A มีค่าน้อย และ A+B−α มีค่ามาก และเมื่อเปรียบเทียบขอบเขตบนที่ได้มาจากอสมการ (4) และทฤษฎีบท 1 ของผลลัพธ์เชิงตัวเลขในตัวอย่าง 1 ถึง 6 เราจะเห็นได้ว่าขอบเขตบนที่ได้มาจากทฤษฎีบท 1 (ขอบเขตบนแบบไม่เอกรูป) ดีกว่าขอบเขตบนที่ได้มาจากอสมการ (4) (ขอบเขตบนแบบเอกรูป)

สรุปผลการวิจัย

การแจกแจงทวินามทั่วไปเป็นการแจกแจงวิยุตแบบหนึ่งที่ครอบคลุมการแจกแจงที่สำคัญถึงสามการแจกแจง คือ การแจกแจงทวินาม การแจกแจงไฮเพอร์จิออเมตริก และการแจกแจงโพลยา ซึ่งเราจะเห็นว่าการแจกแจงนี้สัมพันธ์กับการแจกแจงทวินามเป็นอย่างมาก และเมื่อได้ศึกษาเรื่องของการลู่เข้าของการแจกแจงทวินามทั่วไป เราสามารถสรุปได้ว่า ถ้า A+$B \to \infty$ และ $\dfrac{A}{A+B}$ ลู่เข้าสู่เป็นค่าคงตัว p แล้วการแจกแจงทวินามทั่วไปที่มีพารามิเตอร์ A, B, α และ n จะลู่เข้าสู่การแจกแจงทวินามที่มีพารามิเตอร์ n และ p จากผลที่ได้นี้สามารถเชื่อมโยงไปสู่เรื่องของการประมาณแบบจุดของการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินาม โดยมีขอบเขตบนของการประมาณเป็นหลักเกณฑ์ทั่วไปที่นำมาใช้ประมาณค่าผลต่างระหว่างการแจกแจงทวินามทั่วไปและการแจกแจงทวินาม ซึ่งเราสามารถใช้หลักเกณฑ์นี้เป็นเครื่องมือในการวัดความถูกต้องของการประมาณการแจกแจงดังกล่าวได้ กล่าวคือ ถ้าขอบเขตบนดังกล่าวมีค่าน้อยแสดงว่าการแจกแจงทวินามสามารถประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปได้ดี หรือแสดงว่าการแจกแจงทวินามทั่วไปเข้าใกล้การแจกแจงทวินาม ในทางกลับกันถ้าขอบเขตบนมีค่ามากแสดงว่าการประมาณการแจกแจงดังกล่าวไม่มีความเหมาะสม และขอบเขตบนดังกล่าวจะมีค่ามากหรือน้อยนั้นมักจะขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงที่มีความสอดคล้องกัน ซึ่งจากผลการวิจัยที่ได้เราพบว่าการประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินามจะมีความเหมาะสมเมื่อ α และ/หรือ n และ/หรือ A มีค่าน้อย และ $A + B - \alpha$ มีค่ามาก และเมื่อเปรียบเทียบขอบเขตบนในอสมการ (4) และทฤษฎีบท 1 เราพบว่าขอบเขตบนแบบไม่เอกรูปในทฤษฎีบท 1 ดีกว่าขอบเขตบนแบบเอกรูปในอสมการ (4)

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณกรรมการผู้อ่านผลงานวิจัยทั้งสองท่านที่ได้กรุณาให้คำแนะนำและแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ จนทำให้ผลงานวิจัยนี้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

เอกสารอ้างอิง

1. Teerapabolarn, K. 2552. A Generalized Binomial Districution and Relation with the Binomial and Poisson Distributions. *Burapha Science Journal* 14(1): 92-99.
2. Barbour, A. D., Holst, L., and Janson, S. 1992. Poisson Approximation. Oxford Studies in Probability 2. Oxford. Clarendon Press.
3. Chen, L. H. Y. 1975. Poisson Approximation for Dependent Trials. *Annals of Probability* 3: 534-545.
4. Cacoullos, T., and Papathanasiou, V. 1989. Characterization of Distributions by Variance Bounds. *Statistics and Probability Letters* 7: 351-356.
5. Dwass, M. 1979. A Generalized Binomial Distribution. *American Statistician* 33: 86-87.
6. Stein, C. M. 1972. A Bound for the Error in Normal Approximation to the Distribution of a Sum of dependent Random Variables. *Proceedings Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* 3: 583-602.
7. Stein, C. M. 1986. Approximate Computation of Expectations. Hayward California. IMS.
8. Wongkasem, P., Teerapabolarn K., and Gulasirima, R.. 2008. On Approximating a Generalized Binomial by Binomial and Poisson Distributions. *International Journal of Statistics and Systems* 3: 113-124.

ได้รับบทความวันที่ 5 สิงหาคม 2553
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 21 กันยายน 2553