บทความวิจัย

การพัฒนาบทเรียนแบบสืบเสาะหาความรู้ สำหรับนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย เพื่อพัฒนามโนทัศน์เรื่อง "โลกของเราและตรีโกณมิติ"

Development of an Inquiry-Based Learning Unit to Promote High School Student's Conceptual Understanding of Earth Geometry and Trigonometry

พิมพลักษณ์ ว่องอภิวัฒน์กุล ปร.ด.(วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีการศึกษา)*
*พิณทิพ รื่นวงษา** Ph.D. (Biochemistry)*
*ภิญโญ พานิชพันธ์** Ph.D. (Molecular Biophysics)*

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อให้นักเรียนเข้าใจแง่มุมต่าง ๆ เกี่ยวกับโลกโดยอาศัยความรู้ของตรีโกณมิติและเรขาคณิตเบื้องต้น ด้วยการพัฒนาบทเรียนแบบสืบเสาะหาความรู้ สำหรับนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย เรื่อง โลกของเราและตรีโกณมิติ โดยได้พัฒนาสื่อการเรียนรู้จำลองโลกและแผนที่โลก เพื่อเสริมความเข้าใจในภูมิศาสตร์ เรื่อง เส้นแวง เส้นรุ้ง เส้น great circle เส้นแวงที่ศูนย์องศา และเส้นแบ่งเวลา ประเมินประสิทธิผลของบทเรียนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 25 คน บทเรียนนี้ได้ออกแบบมาเพื่อให้โอกาสนักเรียนได้ถาม-ตอบ และอภิปรายกับเพื่อนทั้งในกลุ่มและต่างกลุ่ม ครูทำหน้าที่เป็นผู้ชี้แนะโดยใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนคิดและอภิปราย รวมทั้งช่วยในการสรุปความคิดรวบยอดกับนักเรียนทั้งห้องหลังจากทำกิจกรรมทุกครั้ง การประเมินผลสัมฤทธิ์การเรียนรู้ของนักเรียนพบว่า บทเรียนที่พัฒนานี้ ช่วยให้ผู้เรียนสามารถพัฒนามโนทัศน์เรื่องเรขาคณิตของโลกของเราและตรีโกณมิติ โดยเฉพาะเส้นแวง เส้นรุ้ง และเส้น great circle ซึ่งเป็นเรื่องที่ยากต่อการเข้าใจ นอกจากนี้ผู้เรียนยังมีเจตคติที่ดีต่อการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ที่เน้นการบูรณาการระหว่างวิชา การใช้สื่อการเรียนรู้ และการทำงานร่วมกับผู้อื่น ส่งผลให้นักเรียนมีการเปลี่ยนแปลงทัศนคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในทางที่ดีขึ้น

คำสำคัญ ตรีโกณมิติ เรขาคณิตของโลก ภูมิศาสตร์ บทเรียนแบบสืบเสาะหาความรู้ สื่อแบบจับต้องได้

* สถาบันนวัตกรรมการเรียนรู้ มหาวิทยาลัยมหิดล
** คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล

Abstract

This research aims to develop an inquiry-based learning unit on "The Earth Geometry and Trigonometry" for high-school students to supplement the traditional presentation of the longitude, latitude, the great circle, the meridian, and the dateline. 27 high-school students participated in the developed learning lessons which motivated the students' in-class discussion and group working. The teachers acted as a facilitator who guided the students through the objectives with basic trigonometry and geometry which they had learned from previous lessons. The teachers also recapitulated the main ideas after each lesson. Students' achievements were evaluated. The result showed that the learning unit promoted students' conceptual understanding. The three-dimensional physical models and illustrations helped develop students' conceptual understandings of the longitude, latitude, the great circle, and its distance. The positive result implied possible good attitude toward learning mathematics realistically in the future.

Key Words: Trigonometry, Earth Geometry, Geography, Inquiry-Based Learning Unit, Physical Model

บทนำ

ทั้งครูและนักเรียนส่วนใหญ่ในระดับมัธยมศึกษา ทั้งในและนอกประเทศไทย ที่เคยสอนและเรียนเรื่องภูมิศาสตร์ รู้จักศัพท์ทางภูมิศาสตร์ เช่น เส้นรุ้ง เส้นแวง หรือพิกัดทางภูมิศาสตร์ แต่เมื่อถามว่าตัวเลขที่ใช้เขียนแทนนั้นมาได้อย่างไร นักเรียนไม่สามารถตอบได้ นอกจากนั้น เมื่อนำแผนที่ที่แสดงเส้นทางการบินของเครื่องบินในสายการบินหนึ่งมาให้นักเรียนดู พร้อมทั้งถามว่า เหตุใดเส้นทางการบินถึงเป็นเส้นโค้ง มีนักเรียนบางคนตอบว่า เป็นเพราะเครื่องบินบินขึ้น และบินลง ซึ่งเหตุผลดังกล่าวนี้ขัดแย้งกับความจริงที่ว่า ระยะทางที่ใช้บินขึ้นและลงนั้น น้อยมากเมื่อเทียบกับระยะทางการบินจริง ๆ ซึ่งถ้าจากเหตุผลที่นักเรียนตอบมา เส้นทางการบินจะต้องโค้งขึ้นแล้วลากเป็นเส้นตรงและโค้งลงมากกว่าที่จะเป็นเส้นโค้งตลอดเส้นทาง ในความเป็นจริงแล้ว ที่เส้นทางการบินเป็นเส้นโค้ง เพราะรูปทรงของโลกเกือบจะเป็นทรงกลม ดังนั้นเครื่องบินจึงบินตามพื้นผิวโลก นอกจากนี้ หากนำแผนที่แบบหนึ่งที่ใช้อยู่ทั่วไปมาให้นักเรียนดู เป็นแผนที่ที่แบ่งเส้นรุ้งและเส้นแวงทุกเส้นได้เท่ากันหมดทุกเส้น โดยเส้นรุ้งและเส้นแวงต่างก็ลากเส้นตั้งฉากซึ่งกันและกัน จากแผนที่นี้ นักเรียนมองไม่เห็นถึงความบิดเบี้ยวของขนาดและรูปร่างของพื้นดินและผืนน้ำ นั่นหมายถึง ประเทศและมหาสมุทรเกิดการบิดเบี้ยวไม่ตรงกับความเป็น

จริง เพราะเมื่อดูจากแผนที่โลกที่เป็นทรงกลม จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าระยะทางระหว่างจุดบนพื้นผิวโลกตามแนวเส้นรุ้งที่องศาแตกต่างกัน จะมีระยะทางไม่เท่ากัน (มุมของเส้นแวงเท่ากันในทุกระนาบของเส้นรุ้ง) เพราะเส้นแวงจะลู่เข้าขั้วโลกเหนือและขั้วโลกใต้ ทำให้ระยะทางตามแนวเส้นรุ้งที่เข้าใกล้ขั้วโลกทั้งสองแทบจะเป็นศูนย์ นอกจากนี้อีกปัญหาหนึ่งสำหรับนักเรียนคือการมองรูปทรงทางเรขาคณิตจากสามมิติเป็นภาพสองมิติ (Quinlan, 2006)

จากเหตุผลดังกล่าวนี้ ทำให้เราได้ทราบถึงปัญหาทางตรีโกณมิติของนักเรียนเหล่านั้น คณะผู้วิจัยซึ่งตระหนักถึงความสำคัญที่ต้องบูรณาการทั้งระหว่างวิชา(ภูมิศาสตร์และคณิตศาสตร์) และระหว่างเนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์(เรขาคณิตและตรีโกณมิติ) ซึ่งในการวิจัยนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาบทเรียนแบบสืบเสาะหาความรู้ โดยใช้สื่อการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ที่จับต้องได้และสื่อแบบรูปวาด ซึ่งจะเป็นตัวช่วยที่สำคัญให้นักเรียนมองเห็นภาพได้ชัดเจนยิ่งขึ้น การพัฒนาบทเรียนในครั้งนี้ มุ่งหวังให้นักเรียนมีการพัฒนามโนทัศน์ได้ดียิ่งขึ้น โดยสามารถคำนวณหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิวโลก (เดินทางบนผิวโลก) ได้

คำถามการวิจัย

1) การพัฒนาบทเรียนเรื่อง “โลกของเราและตรีโกณมิติ”แบบสืบเสาะหาความรู้ มีผลต่อการพัฒนามโนทัศน์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายอย่างไร

2) นักเรียนมีความคิดเห็นอย่างไรต่อบทเรียนเรื่อง “โลกของเราและตรีโกณมิติ”

ระเบียบวิธีวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง

การวิจัยนี้ ใช้วิธีการกำหนดกลุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง (purposive sampling) เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 อายุ 16-18 ปี จำนวน 27 คน (ชาย 8 คนและหญิง 19 คน) โดยนักเรียนที่เข้าร่วมการวิจัยได้เรียนวิชาตรีโกณมิติมาแล้วในเทอมที่ผ่านมา

ระยะเวลาทำการวิจัย 3 ปี 8 เดือน ระหว่างเดือนมีนาคม 2550 ถึงเดือนพฤศจิกายน 2553

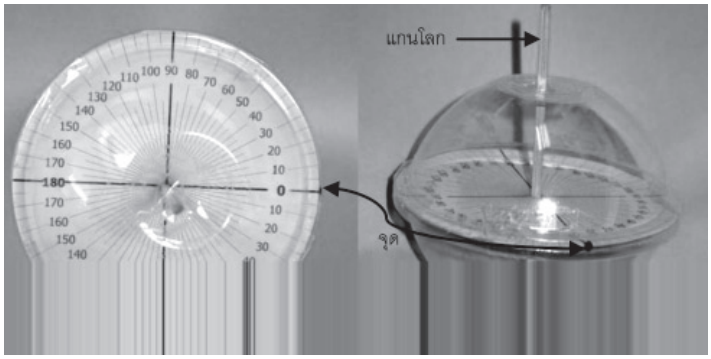
วิธีการดำเนินการวิจัย

1. การพัฒนาสื่อการเรียนรู้

การวิจัยนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อเสนอแนะวิธีดำเนินการเรียนการสอนเพื่อให้เกิดความเข้าใจเกี่ยวกับระยะทางระหว่างจุดบนพื้นผิวโลก และระยะทางบนแผนที่โลกชนิดต่าง ๆ และสามารถเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างแผนที่โลก (2 มิติ) กับลูกโลก (3 มิติ) ในการพัฒนาบทเรียนเรื่อง “โลกของเราและตรีโกณมิติ” ต้องให้ผู้เรียนสามารถแปลงจุดบนรูปทรง 3 มิติบนพื้นผิวโลกให้เป็นรูป 2 มิติบนแผนที่ (หรือในทางกลับกัน) ฉะนั้นจึงได้มีการพัฒนาสื่อทั้งที่จับต้องได้และเป็นรูปวาด รวมทั้งเครื่องมือวัดมุมต่าง ๆในหน่วยของเรเดียนและองศา เพื่อนำมาใช้ในกิจกรรม เส้นรุ้ง เส้นแวง และการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิวโลกและแผนที่โลก

1.1 สื่อที่จับต้องได้ ในการวิจัยครั้งนี้ได้พัฒนาสื่อที่จับต้องได้ 3 ชิ้น คือ

1.1.1 แบบจำลองลูกโลกที่ทำจากฝาโดมพลาสติกใส ด้วยการนำฝาแก้วน้ำครึ่งวงกลมมาประกบติดกัน มีไม้เสียบลูกชิ้นเป็นแกนโลก เสียบทะลุจากขั้วโลกเหนือลงไปขั้วโลกใต้ ด้านในที่เป็นระนาบของเส้นศูนย์สูตรแสดงมุมต่าง ๆ ของเส้นแวง

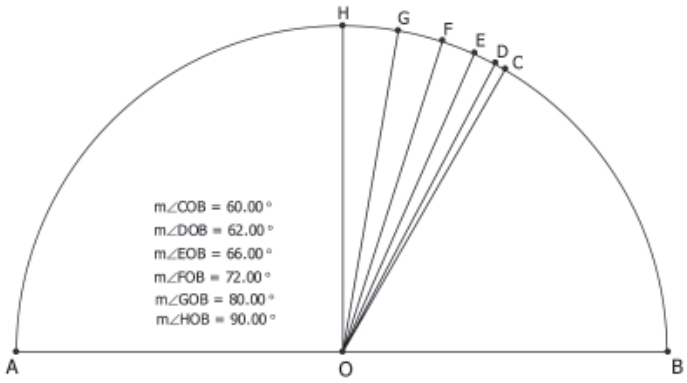


รูปที่ 1 แบบจำลองลูกโลก (ที่ทำจากฝาโดมของแก้วน้ำ)

1.1.2 แบบจำลองลูกโลกของ Quinlan (2006) เป็นแบบจำลองที่ช่วยให้นักเรียนเห็นถึงระนาบของเส้นรุ้งและระนาบของเส้นแวงที่องศาแตกต่างกัน

รูปที่ 2 แบบจำลองลูกโลกของ Quinlan (2006)

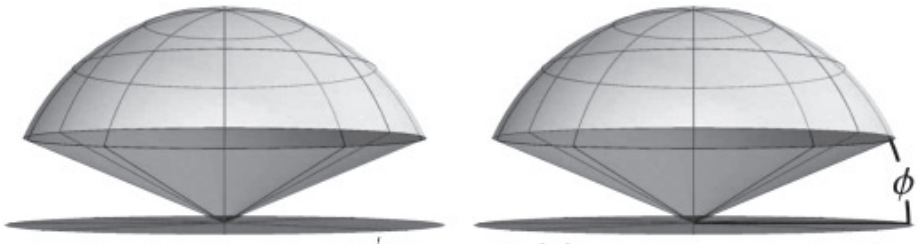
1.1.3 ส่วนของวงกลมที่ตัดออกโดยเส้นรัศมีสองเส้นที่มีมุมที่จุดศูนย์กลางแตกต่างกัน ดังนี้ 60˚, 62˚, 66˚, 72˚, 80˚ และ 90˚ ใช้เพื่อเปรียบเทียบดูระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุด



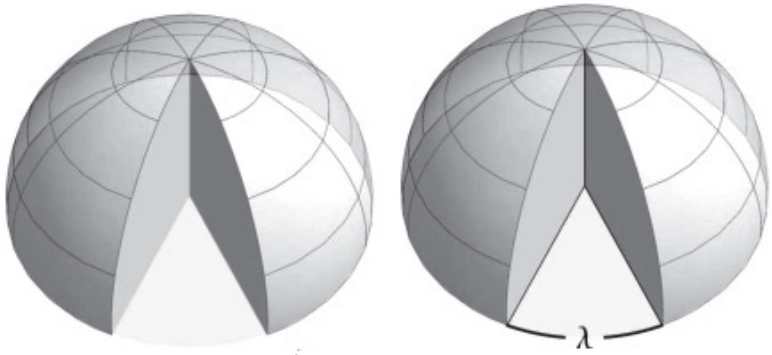
รูปที่ 3 ส่วนของวงกลมที่ตัดออกโดยเส้นรัศมีสองเส้นที่มีมุมที่จุดศูนย์กลางแตกต่างกัน (60° (CÔB), 62° (DÔB), 66° (EÔB), 72° (FÔB), 80° (GÔB) และ 90° (HÔB))

1.2 สื่อที่เป็นรูปวาด

1.2.1 รูปวาดที่แสดงถึงการวัดมุมของเส้นรุ้งและเส้นแวง รวมทั้งเป็นรูปที่ช่วยในการคำนวณระยะทางระหว่างจุดบนพื้นผิวโลกตามแนวเส้นรุ้งและเส้นแวงอีกด้วย

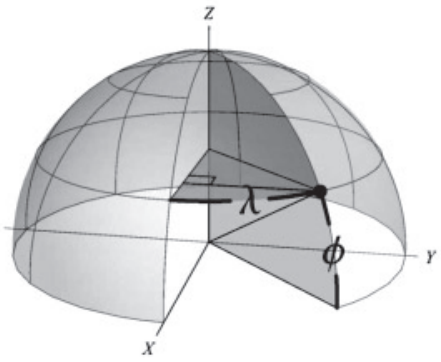


รูปที่ 4 แสดงมุมของเส้นรุ้ง



รูปที่ 5 แสดงมุมของเส้นแวง

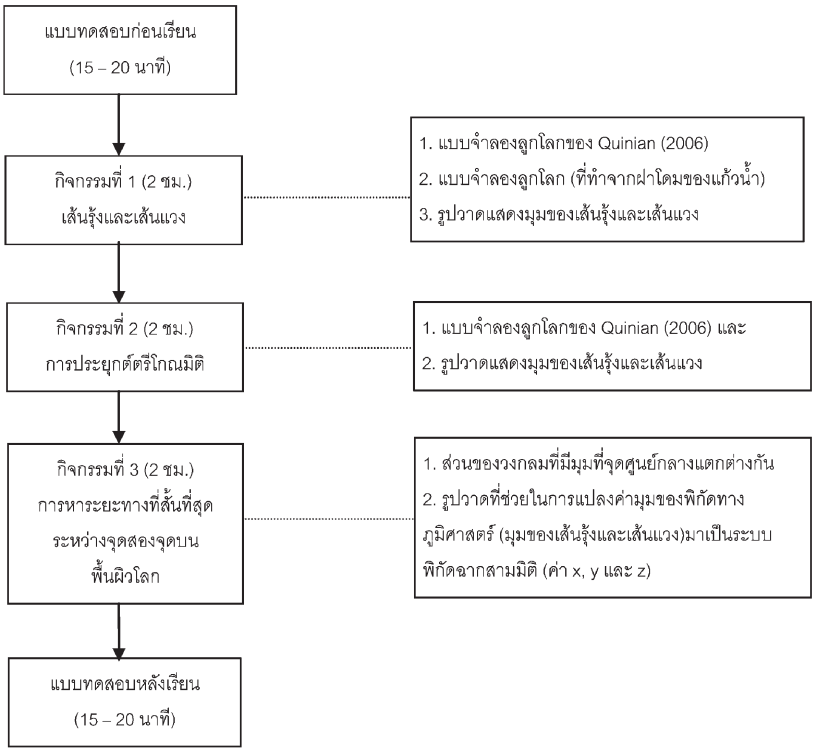
1.2.2 รูปวาดที่ช่วยในการแปลงค่ามุมของพิกัดทางภูมิศาสตร์ (มุมของเส้นรุ้งและเส้นแวง) มาเป็นระบบพิกัดฉากสามมิติ (ค่า x, y และ z)



รูปที่ 6 รูปวาดที่ช่วยในการแปลงค่ามุมของพิกัดทางภูมิศาสตร์มาเป็นระบบพิกัดฉากสามมิติ

2. การดำเนินงานวิจัย

กิจกรรมในการวิจัยนี้ประกอบด้วย 3 กิจกรรม ดังแสดงในรูปที่ 7 กิจกรรมเหล่านี้จะช่วยให้นักเรียนสร้างความรู้ได้เองโดยมีครูเป็นผู้ชี้แนะ ก่อนเริ่มกิจกรรมในแต่ละครั้ง ครูจะพูดคร่าว ๆ ถึงวัตถุประสงค์และกิจกรรม นักเรียนแต่ละกลุ่มจะเป็นผู้ลงมือช่วยกันทำกิจกรรมตามใบงานและใช้อุปกรณ์ที่แจกให้ โดยช่วยกันเก็บรวบรวมข้อมูล วิเคราะห์ข้อมูล ตีความ อภิปราย หลังจากเสร็จสิ้นแต่ละกิจกรรม นักเรียนแต่ละกลุ่มจะช่วยกันเขียนคำตอบลงในใบงานกลุ่ม หลังจากนั้นครูและนักเรียนจึงช่วยกันสรุปความรู้ที่ได้จากการทำกิจกรรมเพื่อให้แน่ใจว่านักเรียนได้เข้าใจตามวัตถุประสงค์ของกิจกรรมนั้น ๆ

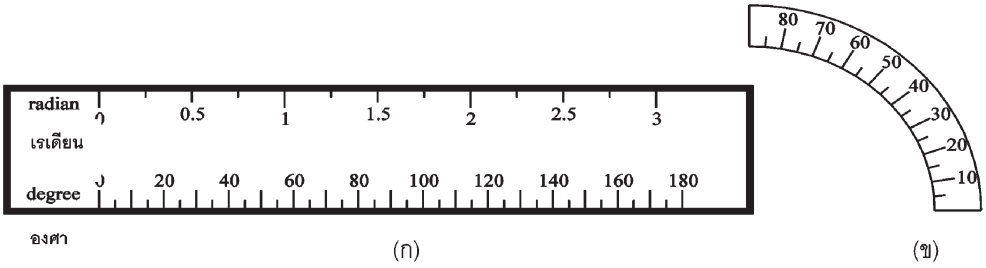


รูปที่ 7 แผนผังของบทเรียนเรื่อง "โลกของเราและตรีโกณมิติ"

กิจกรรมที่ 1 เส้นรุ้งและเส้นแวง (2 ชม.)

เป็นกิจกรรมการทบทวนความรู้เดิมของนักเรียน และช่วยให้นักเรียนเข้าใจการวัดมุมของเส้นรุ้งและเส้นแวงได้ดียิ่งขึ้น โดยใช้สื่อการเรียนรู้ที่จับต้องได้ 2 ชิ้น คือ แบบจำลองลูกโลกที่ทำจากฝาโดมของแก้วน้ำ (รูปที่ 1) และแบบจำลองลูกโลกของ Quinlan (2006) (รูปที่ 2) รวมทั้งใช้รูปวาด ที่แสดงถึงการวัดมุมของเส้นรุ้งและเส้นแวงอีกด้วย (รูปที่ 4 และ 5) ในกิจกรรมนี้คาดว่านักเรียนจะสามารถบอกได้ว่าวัดมุมของเส้นรุ้งและเส้นแวงอย่างไร รวมถึงเปรียบเทียบระยะทางระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิวโลกตามแนวเส้นรุ้งและเส้นแวง โดยไม่ต้องคำนวณรายละเอียดของกิจกรรมที่ 1 มีดังนี้คือ

1) เริ่มต้นบทเรียนด้วยกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ระหว่างความยาวเรเดียนและมุมที่เป็นองศา โดยให้นักเรียนแต่ละกลุ่มละ 3-5 คน หันด้านของแบบจำลองลูกโลก ที่แผ่นกระดาษตรงกลางมีตัวเลขที่แสดงมุมของเส้นแวงขึ้น และหันจุดที่กำหนดให้เข้าหาตัว (รูปที่ 1) จากนั้นให้นักเรียนใช้ไม้บรรทัดเรเดียนและเสี้ยววงกลมที่สร้างขึ้นจากรัศมีของแบบจำลองลูกโลกนี้ (รูปที่ 8) วัดจากจุดที่กำหนดให้ ไปทางขวามือความยาว 2 เรเดียน และวัดจากจุดที่กำหนดให้ ขึ้นไปยังแกนไม้ตรงกลาง 1 เรเดียน แล้วทำเครื่องหมายบนแบบจำลองลูกโลกด้วยปากกาเมจิก



รูปที่ 8 ไม้บรรทัดเรเดียน (ก) และเสี้ยววงกลม (ข)

2) การอ่านมุมของเส้นแวง จะอ่านมุมได้จากแผ่นกระดาษตรงกลางของแบบจำลองลูกโลก การอ่านมุมของเส้นรุ้ง อ่านได้จากเสี้ยววงกลม ส่วนการวัดความยาวเรเดียน จะใช้ไม้บรรทัดเรเดียนในการวัด

3) หลังจากนั้น ถามนักเรียนถึงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวเรเดียนและมุมที่เป็นองศา ซึ่งจะเห็นว่ามุมที่ได้เป็นมุมที่รองรับความยาวส่วนโค้ง และถ้าถามต่อว่า หากแบบจำลองลูกโลก มีขนาดเปลี่ยนไป ไม้บรรทัดเรเดียนและเสี้ยวของวงกลมจะมีขนาดเปลี่ยนไปหรือไม่ จะเห็นว่าทั้งไม้บรรทัดเรเดียนและเสี้ยวของวงกลมจะมีขนาดเปลี่ยนไป โดยขึ้นอยู่กับขนาดของรัศมีของแบบจำลองลูกโลก ถ้ารัศมีมีขนาดมากขึ้น ทั้งไม้บรรทัดเรเดียนและเสี้ยวของวงกลมจะมีขนาดยาวขึ้นด้วย

4) กิจกรรมถัดไป เป็นการพิจารณาว่ามุมของเส้นรุ้งและเส้นแวงวัดอย่างไร เส้นรุ้งและเส้นแวงแต่ละเส้นเป็นอย่างไร แต่ละเส้นยาวเท่ากันหรือไม่ และระนาบของเส้นรุ้งและ

เส้นแวงมีลักษณะเป็นอย่างไร ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันวาดเส้นรุ้งที่ 30 และ 60 องศาเหนือ และเส้นแวงที่ 30 และ 120 องศาตะวันออกบนแบบจำลองลูกโลก แล้วช่วยกันอภิปรายและเขียนข้อสรุปในแต่ละหัวข้อลงในใบงาน

5) หลังจากที่นักเรียนทราบแล้วว่า ระนาบแต่ละระนาบของเส้นรุ้งที่มุมต่างกัน มีขนาดไม่เท่ากัน แต่ทุกระนาบของเส้นแวงที่มุมต่างกัน มีขนาดเท่ากันหมด ทำให้ทราบต่อไปว่า เส้นรอบวงของระนาบแต่ระนาบของเส้นรุ้งที่มุมต่างกันก็จะมีความยาวแตกต่างกันด้วย ในขณะที่เส้นรอบวงของทุกระนาบของเส้นแวงมีความยาวเท่ากันทุกเส้น นักเรียนจะต้องตอบคำถามสุดท้ายของกิจกรรมนี้ ที่ให้นักเรียนเปรียบเทียบระยะทางระหว่างเส้นทางสองเส้นที่แตกต่างกัน โดยเปรียบเทียบตามแนวเส้นรุ้งและเปรียบเทียบตามแนวเส้นแวง ซึ่งถ้านักเรียนเข้าใจ จะตอบได้ว่า ถ้ามุมของเส้นรุ้งบนระนาบของเส้นแวงมีขนาดเท่ากันทั้งคู่และจากที่เส้นแวงทุกเส้นมีความยาวเท่ากัน ดังนั้นจะมีระยะทางเท่ากัน และถึงแม้ว่ามุมของเส้นแวงบนระนาบของเส้นรุ้งมีขนาดเท่ากันทั้งคู่ แต่เส้นรุ้งที่มีองศาน้อยกว่า จะยาวกว่าเส้นรุ้งที่มีองศามากกว่าเสมอ

กิจกรรมที่ 2 การประยุกต์ตรีโกณมิติ (2 ชม.)

ในกิจกรรมนี้ มีการใช้รูปวาดที่แสดงถึงการวัดมุมของเส้นรุ้งและเส้นแวงอีกครั้ง (รูปที่ 4 และ 5) เพื่อช่วยให้นักเรียนได้มาคำนวณหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด ตามแนวเส้นรุ้งและแนวเส้นแวง

1) ให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม ช่วยกันอธิบายวิธีคำนวณหาความยาวส่วนโค้งระหว่างจุดสองจุดตามแนวเส้นแวง โดยนำความรู้พื้นฐานของตรีโกณมิติ มาคำนวณหารัศมีของระนาบของเส้นรุ้ง แล้วหาความยาวส่วนโค้งระหว่างจุดสองจุดตามแนวเส้นแวง โดยนำรัศมีที่หาได้มาคูณกับมุมของเส้นแวงที่เปลี่ยนไป

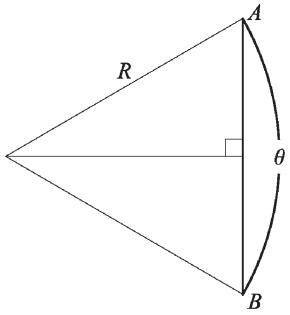
2) นักเรียนสามารถคำนวณหาความยาวส่วนโค้งระหว่างจุดสองจุดตามแนวรุ้ง โดยใช้รัศมีของโลกคูณกับมุมของเส้นรุ้งที่เปลี่ยนไป (เนื่องจากกิจกรรมนี้ สมมติให้โลกมีรูปทรงเป็นทรงกลม และจากที่ระนาบของเส้นแวงมีขนาดเท่ากันทุกเส้น ดังนั้น รัศมีของระนาบของเส้นแวงทุกระนาบ คือรัศมีของโลกนั่นเอง)

กิจกรรมที่ 3 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิวโลก (2 ชม.)

ในกิจกรรมนี้จะใช้ส่วนของวงกลมที่ตัดออกโดยเส้นรัศมีสองเส้นที่มีมุมที่จุดศูนย์กลางแตกต่างกัน (รูปที่ 3) และรูปวาดที่ช่วยในการแปลงค่ามุมของ พิกัดทางภูมิศาสตร์ (มุมของเส้นรุ้งและเส้นแวง) มาเป็นระบบพิกัดฉากสามมิติ (ค่า x, y และ z) (รูปที่ 6) เพื่อช่วยในการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิวโลก

จากการใช้รูปที่ 3 มาเปรียบเทียบระยะทางระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิวโลก นักเรียนจะสังเกตว่า ระยะทางที่สั้นที่สุดหาได้จากการนำมุมที่จุดศูนย์กลางหรือมุมที่รองรับความยาวส่วนโค้งหรือระยะทางระหว่างจุดทั้งสอง มาคูณรัศมีของโลกนั่นเอง

ในการหามุมที่จุดศูนย์กลาง นักเรียนใช้รูปที่ 9 หามุมที่รองรับความยาวส่วนโค้งระหว่างจุด A และ B ซึ่งก่อนอื่น จะต้องหาระยะทางในแนวเส้นตรง AB ให้ได้เสียก่อน มีการใช้รูปที่ 6 แปลงค่าพิกัดทางภูมิศาสตร์ (มุมของเส้นรุ้งและเส้นแวง) มาเป็นระบบพิกัดฉากสามมิติ (ค่า x, y และ z) เพื่อหาระยะทางในแนวเส้นตรง AB ได้ จากนั้นใช้ส่วนกลับของค่าไซน์ (arcsine) คูณกับรัศมีโดยเฉลี่ยของโลก (ประมาณ 6,370 กิโลเมตร) ในการหาความยาวส่วนโค้งระหว่างจุด A และ B



รูปที่ 9 ส่วนของวงกลมที่ตัดออกโดยเส้นรัศมีสองเส้นที่มีมุมที่จุดศูนย์กลางรองรับระยะทางระหว่างจุด A และ B

การเก็บรวบรวมข้อมูลและการวิเคราะห์ข้อมูล

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลประกอบด้วย แบบทดสอบความคิดรวบยอดก่อนเรียนและหลังเรียน ใบงาน แบบสะท้อนความคิดเห็นของนักเรียนต่อบทเรียน และแบบประเมินความพึงพอใจของนักเรียนต่อบทเรียนเรื่อง “โลกของเราและตรีโกณมิติ”

1. แบบทดสอบความคิดรวบยอด

แบบทดสอบความคิดรวบยอด เรื่อง “โลกของเราและตรีโกณมิติ” มีลักษณะเป็นแบบทดสอบอัตนัยให้นักเรียนเขียนวิธีคิดอย่างละเอียดลงไป ประกอบด้วยคำถาม 6 หัวข้อ ครอบคลุม 4 ประเด็น คือ พื้นฐานทางตรีโกณมิติ เส้นรุ้งและเส้นแวง การประยุกต์ตรีโกณมิติ และการหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิวโลก ในแต่ละข้อมีเกณฑ์การให้คะแนนแบบวิเคราะห์ (analytic rubrics)

สำหรับแบบทดสอบความคิดรวบยอดหลังเรียนนั้น เป็นแบบทดสอบคู่ขนานกับแบบทดสอบความคิดรวบยอดก่อนเรียนใน 4 ประเด็นดังกล่าว แบบทดสอบผ่านความเห็นชอบของผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน ได้แก่ ผู้เชี่ยวชาญทางด้านคณิตศาสตร์ 1 ท่าน และผู้เชี่ยวชาญทางด้านคณิตศาสตร์ศึกษา 2 ท่าน มีค่าความเที่ยงของแบบทดสอบ โดยมีค่าสัมประสิทธิ์อัลฟาของครอนบาค (cronbach) คือ 0.8 ด้วยการทำแบบทดสอบจากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายจำนวน 150 คน การวิเคราะห์ข้อมูล ด้วยการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตราฐาน และเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากการทำแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนโดยใช้สถิติทดสอบแบบ wilcoxon match-pairs signed-rank test (Marascuilo & McSweency, 1977: p.330-333) กำหนดค่าความเชื่อมั่น 95% ($p\text{-value} \leq 0.05$)

2. ใบงาน

ผู้วิจัยได้ออกแบบคำถามในใบงาน 3 ใบงาน สำหรับ 3 กิจกรรมหลัก โดยที่นักเรียนจะต้องเข้าใจ และสร้างความรู้ขึ้นเองได้จากแต่ละกิจกรรม จึงจะสามารถตอบคำถามในแต่ละใบงานได้ นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันสรุปและ

ช่วยกันตอบ ซึ่งจะเป็นผลที่ได้จากการอภิปรายจากนักเรียนทั้งกลุ่ม ความเข้าใจของนักเรียนทั้งกลุ่มจะวัดจากผลการวิเคราะห์ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของใบงาน

3. แบบสะท้อนความคิดของนักเรียนต่อบทเรียนเรื่อง "โลกของเราและตรีโกณมิติ"

สำหรับการสะท้อนความคิดเกี่ยวกับสิ่งที่ได้เรียนรู้จากบทเรียนเรื่อง "โลกของเราและตรีโกณมิติ" หลังจากจบทั้ง 3 กิจกรรม นักเรียนแต่ละคนจะเขียนสิ่งที่ได้เรียนรู้ใน 3 ประเด็นหลัก คือ ได้เรียนรู้อะไรบ้างทางด้านเนื้อหาวิชาการ ด้านทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และการนำไปใช้ประโยชน์ จากนั้นผู้วิจัยวิเคราะห์ข้อมูล โดยการจัดจำแนกคำตอบออกเป็นหมวดหมู่ และรายงานเป็นเปอร์เซ็นต์ที่นักเรียนตอบ

4. แบบประเมินความพึงพอใจของนักเรียนต่อบทเรียนเรื่อง "โลกของเราและตรีโกณมิติ"

การประเมินความพึงพอของนักเรียนต่อบทเรียนนี้ ทำโดยใช้คำถามปลายเปิด เพื่อให้นักเรียนมีอิสระในการเขียนแสดงความคิดเห็นในประเด็นของการเปรียบเทียบการเรียนในห้องเรียนที่ผ่านมากับการทำกิจกรรมในบทเรียนนี้ รวมทั้งข้อดี ข้อเสีย และข้อเสนอแนะต่อการจัดกิจกรรม จากนั้นจึงนำคำตอบที่ได้จากนักเรียนมาจัดกลุ่ม และรายงานเป็นเปอร์เซ็นต์ที่นักเรียนตอบ

ผลการวิจัย

1. ผลของบทเรียนเรื่อง "โลกของเราและตรีโกณมิติ" ต่อการพัฒนามโนทัศน์ของนักเรียน

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลจากแบบทดสอบความคิดรวบยอดก่อนและหลังเรียน และจากใบงาน แสดงถึงผลของบทเรียนเรื่อง "โลกของเราและตรีโกณมิติ" ต่อการพัฒนามโนทัศน์ของนักเรียน แสดงในตารางที่ 1 – 4 ดังนี้

ตารางที่ 1 คะแนนเฉลี่ยความคิดรวบยอดของนักเรียนก่อนเรียน บทเรียนเรื่อง "โลกของเราและตรีโกณมิติ" (n=27)

หัวข้อ	ค่าเฉลี่ย ± ส่วนเบี่ยงเบนมาตราฐาน (Mean ± S. D.)
1. พื้นฐานทางตรีโกณมิติ (10 คะแนน)	2.44±1.19
2. เส้นรุ้งและเส้นแวง (10 คะแนน)	0.00±0.00
3. การประยุกต์ตรีโกณมิติ (10 คะแนน)	0.00±0.00
4. การหาระยะทางที่สั้นที่สุด (10 คะแนน)	0.00±0.00
คะแนนรวม (40 คะแนน)	**2.44±1.19**

จากตารางที่ 1 พบว่า คะแนนเฉลี่ยความคิดรวบยอดของนักเรียนก่อนเรียนบทเรียนเรื่อง “โลกของเราและตรีโกณมิติ” มีคะแนนเฉลี่ยความคิดรวบยอดในพื้นฐานตรีโกณมิติ 2.44 ในขณะที่คะแนนเฉลี่ยความคิดรวบยอดในหัวข้อเส้นรุ้งและเส้นแวง การประยุกต์ตรีโกณมิติ และการหาระยะทางที่สั้นที่สุดเป็น 0

ตารางที่ 2 คะแนนเฉลี่ยความคิดรวบยอดของนักเรียนหลังเรียน บทเรียนเรื่อง “โลกของเราและตรีโกณมิติ” (n=27)

หัวข้อ	ค่าเฉลี่ย ± ส่วนเบี่ยงเบนมาตราฐาน (Mean ± S. D.)
1. พื้นฐานทางตรีโกณมิติ (10 คะแนน)	8.72±1.27
2. เส้นรุ้งและเส้นแวง (10 คะแนน)	6.07±2.04
3. การประยุกต์ตรีโกณมิติ (10 คะแนน)	6.96±1.48
4. การหาระยะทางที่สั้นที่สุด (10 คะแนน)	3.11±2.82
คะแนนรวม (40 คะแนน)	**24.87±4.43**

จากตารางที่ 2 พบว่า คะแนนเฉลี่ยความคิดรวบยอดของนักเรียนหลังเรียนบทเรียนเรื่อง “โลกของเราและตรีโกณมิติ” มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้นมาก ทั้ง 4 หัวข้อ

ตารางที่ 3 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความคิดรวบยอดของนักเรียนก่อนและหลังเรียน บทเรียนเรื่อง “โลกของเราและตรีโกณมิติ”

หัวข้อ	ผลต่าง			Z
	–	+	0	
1. พื้นฐานทางตรีโกณมิติ (10 คะแนน)	0	27	0	-4.570
2. เส้นรุ้งและเส้นแวง (10 คะแนน)	0	27	0	-4.681
3. การประยุกต์ตรีโกณมิติ (10 คะแนน)	0	27	0	-4.568
4. การหาระยะทางที่สั้นที่สุด (10 คะแนน)	0	16	11	-3.704
คะแนนรวม (40 คะแนน)	**0**	**27**	**0**	**-4.553**

จากตารางที่ 3 ผลการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความคิดรวบยอดของนักเรียนก่อนและหลังเรียน บทเรียนเรื่อง “โลกของเราและตรีโกณมิติ” พบว่า สูงขึ้นภายหลังการเรียนทุกหัวข้อ อย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.05

ตารางที่ 4 คะแนนเฉลี่ยใบงานกลุ่มของนักเรียนโรงเรียน (n=27)

หัวข้อ	ค่าเฉลี่ย ± ส่วนเบี่ยงเบนมาตราฐาน (Mean ± S. D.)
1. พื้นฐานทางตรีโกณมิติ (10 คะแนน)	9.50±0.93
2. เส้นรุ้งและเส้นแวง (10 คะแนน)	9.75±0.71
3. การประยุกต์ตรีโกณมิติ (10 คะแนน)	9.50±0.93
4. การหาระยะทางที่สั้นที่สุด (10 คะแนน)	3.00±1.07
คะแนนรวม (40 คะแนน)	**31.75±1.67**

ผลงานคะแนนเฉลี่ยใบงานกลุ่มของนักเรียน พบว่า ใน 3 หัวข้อแรก ได้แก่ พื้นฐานทางตรีโกณมิติ เส้นรุ้ง เส้นแวง การประยุกต์ตรีโกณมิติ มีคะแนนเฉลี่ยของใบงานสูง (9.50, 9.75 และ 9.50 ตามลำดับ) ในขณะที่คะแนนเฉลี่ยใบงานกลุ่มของนักเรียน หัวข้อการหาระยะทางสั้นที่สุด มีคะแนนเฉลี่ยต่ำ (300±1.07)

2. ความคิดเห็นของนักเรียนต่อบทเรียนเรื่อง "โลกของเราและตรีโกณมิติ"

การสะท้อนความคิดของนักเรียน และความพึงพอใจของนักเรียน ได้แสดงถึงความคิดเห็นของนักเรียนต่อบทเรียน เป็นดังนี้

2.1 ผลการสะท้อนความคิดของนักเรียนต่อบทเรียนเรื่อง "โลกของเราและตรีโกณมิติ"

เมื่อให้นักเรียนสะท้อนความคิดอย่างอิสระ โดยการเขียนความคิดเห็นทางด้านวิชาการที่ได้รับลงในกระดาษเปล่า พบว่า มากกว่าครึ่งหนึ่งของนักเรียนที่เข้าร่วมกิจกรรม บอกว่าได้รับความรู้ทางด้านภูมิศาสตร์มากขึ้น นักเรียนร้อยละ 70 บอกว่า เมื่อเปรียบเทียบบทเรียนนี้กับการเรียนในชั้นเรียนแบบเดิม กิจกรรมที่ได้ทำในบทเรียนนี้ ช่วยให้เข้าใจได้ง่าย เมื่อมีการใช้ปัญหาจริง และยังมีการใช้สื่อการเรียนรู้ที่หลากหลายอีกด้วย และยังมีความรู้เพิ่มเติมในส่วนของวิชาภูมิศาสตร์ ไม่ว่าจะเป็นมุมหรือระนาบของทั้งเส้นรุ้งและเส้นแวง นักเรียนส่วนใหญ่ (ร้อยละ 77.8) ยังบอกอีกว่า บทเรียนนี้ช่วยให้พวกเขาประยุกต์ตรีโกณมิติกับวิชาอื่น ๆ ได้

นอกจากนี้ เมื่อให้นักเรียนประเมินความเข้าใจของตนเองต่อบทเรียนนี้ พบว่านักเรียนเพียงร้อยละ 3.7 บอกว่า มีความเข้าใจเนื้อหาของบทเรียนนี้ทั้งหมด ร้อยละ 40 บอกว่า เข้าใจเนื้อหาส่วนใหญ่ ขณะที่นักเรียนร้อยละ 50 บอกว่า เข้าใจบ้าง ไม่เข้าใจบ้าง ในด้านการใช้สื่อการเรียนรู้ พบว่านักเรียนส่วนใหญ่ (ร้อยละ 81.5) เห็นว่า สื่อการเรียนรู้ทั้งแบบจำลองและแบบรูปวาด ได้ช่วยให้เกิดความเข้าใจเป็นอย่างมาก

และเป็นสื่อที่จำเป็นต่อการเรียนในหัวข้อดังกล่าว

2.2 ผลการประเมินความพึงพอใจของนักเรียนต่อบทเรียนเรื่อง "โลกของเราและตรีโกณมิติ"

ผลการประเมินความพึงพอใจของนักเรียนภายหลังการเรียน บทเรียนเรื่อง "โลกของเราและตรีโกณมิติ" พบว่า ร้อยละ 90 ของนักเรียนพึงพอใจการทำกิจกรรมในบทเรียนนี้

ในขณะที่มีนักเรียนร้อยละ 10 ยังคงชอบการเรียนแบบเก่ามากกว่า นอกจากนั้นนักเรียนส่วนใหญ่ (ร้อยละ 74) บอกว่า จากที่เคยเรียนมาแบบดั้งเดิม ไม่ค่อยได้ทำงานกลุ่มเหมือนของบทเรียนนี้ ซึ่งร้อยละ 35 ของนักเรียนบอกว่า การเรียนแบบนี้ทำให้มีปฏิสัมพันธ์ทั้งกับเพื่อนนักเรียนเองและกับครู ทำให้ได้แลกเปลี่ยนเรียนรู้ซึ่งกันและกัน บางส่วนบอกว่าได้ทำกิจกรรมแล้วรู้สึกสนุก ไม่เกิดความเบื่อหน่าย อย่างไรก็ตาม นักเรียนร้อยละ 37 บอกว่า บทเรียน นี้มีความยากอยู่ที่ต้องมองภาพสามมิติให้เป็นสองมิติ ซึ่งต้องใช้จินตนาการอย่างมาก

อภิปรายผลการวิจัย

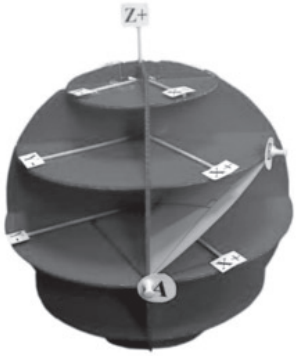
ผลจากการวิจัยพบว่า บทเรียนเรื่อง "โลกของเราและตรีโกณมิติ"ที่ได้พัฒนาขึ้น โดยใช้สื่อทั้งแบบจำลองและแบบรูปวาดในการทำกิจกรรม ทำให้นักเรียนสามารถพัฒนามโนทัศน์ในเรื่องดังกล่าว ดังจะเห็นว่า นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ดีขึ้น ดูได้จากคะแนนเฉลี่ยความคิดรวบยอดหลังเรียนสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยความคิดรวบยอดก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญ และจากคะแนนที่ค่อนข้างสูงของใบงานกลุ่มและดังสนับสนุนจากแบบสะท้อนความคิดเกี่ยวกับสิ่งที่ได้เรียนรู้ และการนำไปใช้ประโยชน์

สิ่งสำคัญที่ทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีขึ้นคือ การใช้สื่อที่เหมาะสม ทั้งสื่อที่จับต้องได้และสื่อแบบรูปวาด ดังเช่นงานวิจัยของ Quinlan (2006) ที่บอกว่า การใช้สื่อการเรียนรู้ ทำให้ผู้เรียนมองเห็นภาพจากสามมิติเป็นสองมิติได้ชัดเจนยิ่งขึ้น และวิธีการเรียนการสอนแบบสืบเสาะหาความรู้ ที่นักเรียนได้ทำความเข้าใจและสร้างองค์ความรู้บางอย่างได้เองจากการลงมือทำ โดยมีครูเป็นผู้ชี้แนะและช่วยเหลือ ซึ่งสอดคล้องกับนักวิจัยหลายท่าน เช่น Diezmann (2004) และ Brown, Wilson และ Fitzallen (2007) ที่ได้นำวิธีการจัดการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ มาสนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียนโดยเฉพาะอย่างยิ่งวิชาคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ งานวิจัยชิ้นนี้ ยังได้ผลคล้ายคลึงกับงานของ Gialamas และคณะ (2000) ซึ่งแนะนำให้ใช้วิธีการจัดการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ในการส่งเสริมให้นักเรียนเข้าใจวิชาคณิตศาสตร์ด้วยการจัดกิจกรรมอีกด้วย

อีกทั้งการสรุปก่อนจบกิจกรรมแต่ละครั้งก็เป็นส่วนหนึ่งที่ทำให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหา ที่เป็นประเด็นสำคัญของการทำกิจกรรมที่จัดขึ้น ดังเช่นผลงานวิจัยของ Steinwachs (1992) และ Towers และ Simmt (2007) โดยครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงกิจกรรมที่ได้ทำมาช่วยกันสรุปและแสดงความคิดเห็น เนื่องจากนักเรียนบางคนอาจจะพลาดประเด็นสำคัญบางประเด็นไป

ผลการวิจัยนี้ แสดงให้เห็นว่า สื่อการเรียนรู้ที่ได้พัฒนาขึ้น ช่วยให้นักเรียนทั้งที่มีผลการเรียนวิชาตรีโกณมิติที่ต่ำ เมื่อได้ผ่านกิจกรรมที่ได้พัฒนาขึ้น คะแนนเฉลี่ยความคิดรวบยอดเพิ่มมากขึ้น ทั้งสื่อที่จับต้องได้และสื่อแบบรูปวาด มีส่วนผลักดันให้นักเรียนมองเห็นภาพได้ดียิ่งขึ้น เป็นส่วนหนึ่งที่ทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ดีขึ้นด้วย ซึ่งได้ผลเช่นเดียวกับงานวิจัยของ Sowell (1989) Bayram (2004) และ Wongapiwatkul และคณะ (2011) นอกจากนี้ เมื่อดูผลคะแนนเฉลี่ยของใบงานกลุ่ม พบว่า นักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยในหัวข้อที่ 1-3 และคะแนนรวมอยู่ในระดับที่ค่อนข้างสูง แสดงให้เห็นว่า ถึงแม้นักเรียนเดิมจะมีผลการเรียนต่ำ แต่สื่อที่พัฒนายังคงใช้ได้ดีอยู่

อย่างไรก็ตาม บทเรียนนี้ในหัวข้อที่ 4 เรื่อง “การหาระยะทางที่สั้นที่สุด” (ระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิวโลก) นักเรียนส่วนมากยังทำไม่ได้ เพราะไม่สามารถมองภาพสามมิติเป็นภาพสองมิติได้ ดังนั้น หลังจากการวิจัยนี้ คณะผู้วิจัยจึงได้พัฒนาทั้งบทเรียนและสื่อการเรียนรู้ต่อ โดยมุ่งหวังที่จะทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจมากขึ้น อย่างเช่นในกรณีที่นักเรียนยังมองไม่ออกว่าจะนำตรีโกณมิติมาแปลงค่ามุมของเส้นรุ้งและเส้นแวงมาเป็นค่า x, y และ z จากรูปที่ 6 ได้อย่างไร อาจนำแบบจำลองลูกโลกของ Quinlan (2006) (รูปที่ 2) มารวมกับรูปที่ 9 ส่วนของวงกลมที่ตัดออกโดยเส้นรัศมีสองเส้นที่มีมุมที่จุดศูนย์กลางรองรับระยะทางระหว่างจุด A และ B ดังรูปที่ 10



รูปที่ 10 แบบจำลองลูกโลกของ Quinlan (2006) ที่ปรับปรุงแล้ว

อีกประการหนึ่งคือ อาจจะเพิ่มกิจกรรมโดยการให้ครู และ/หรือนักเรียนนำเส้นลวดมารัดรอบแบบจำลองลูกโลกที่เส้นศูนย์สูตร ทั้งนี้เพราะไม่ว่าจะเส้นลวดนี้ผ่านสองเมืองใด ๆ ในโลก (วางให้กระชับกับตัวลูกโลก) ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างสองเมืองนั้น ๆ จะอยู่บนเส้นลวดนี้

ข้อเสนอแนะ

ในการศึกษาขั้นต่อไป ควรใช้บทเรียนและสื่อการเรียนรู้ที่ปรับปรุงใหม่ไปทดลองใช้กับครูและนักเรียนกลุ่มเป้าหมายอีกครั้ง โดยอาจให้เฉพาะครูในระดับมัธยมศึกษาลองทำกิจกรรมทั้งสามเอง หรืออาจจะให้ครูที่รับผิดชอบในชั้นเรียนและนักเรียนทำกิจกรรมร่วมกัน โดยจูงใจทุกคนในชั้นเรียน ให้นึกถึงการเดินทางไปประเทศที่ตัวเองอยากไป แล้วให้ผู้เรียนตั้งสมมติฐานและลงมือทำไปเลยว่าจะนำความรู้ทั้งวิชาภูมิศาสตร์และวิชาคณิตศาสตร์มาบูรณาการกันอย่างไรเพื่อหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวโลกระหว่างประเทศไทยและประเทศที่ต้องการไป ทั้งนี้ผู้เรียนจะประเมินระยะทางและเวลาการ

เดินทางได้ดีขึ้น หากรู้ถึงความเร็วของพาหนะ นอกจากนี้ บทเรียนนี้ยังมีศักยภาพในการทำให้การเรียนการสอนแบบบูรณาการมากขึ้น และท้าทายให้ผู้เรียนสืบเสาะหาความรู้ได้ดีขึ้นอีกด้วย

ผู้วิจัยหวังว่า บทเรียนนี้คงเป็นประโยชน์สำหรับครูที่สอนโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายที่อาจนำบทเรียนนี้ไปใช้ ทั้งโดยตรงหรือดัดแปลงให้เหมาะสมกับกลุ่มเป้าหมาย รวมทั้งครูอาจใช้เป็นแนวทางเพื่อพัฒนาวิชาคณิตศาสตร์ในหัวข้ออื่นๆ ที่ยากต่อความเข้าใจของนักเรียน

เอกสารอ้างอิง

Bayram, S. (2004). *The effect of instruction with concrete models on eighth grade students' geometry achievement and attitude towards geometry*. Master's Thesis (Secondary Science and Mathematics Education). Turkish: Middle East Technical University.

Brown, N., Wilson, K., & Fitzallen, N. (2007). *Using an inquiry approach to develop mathematical thinking*. Paper presented at the AARE 2007 International Educational Research Conference, Fremantle, Australia.

Diezmann, C. M. (2004). Assessing learning from mathematics inquiry: Challenges for students, teacher and researchers. In *Proceedings Mathematical Association of Victoria Conference*. Melbourne: Mathematical Association of Victoria, 15(2), p.80-85.

Gialamas, S., Cherif, A., Keller, S., & Hansen, A. (2000). Using guided inquiry in teaching mathematical concepts. *The Illinois Mathematics Teacher Journal*, 51(1), p.30-40.

Marascuilo, L.A. & McSweency, M. (1997). *Nonparametric and distribution-free methods for the social sciences. California: Wadsworth.*

Quinlan, C. (2006). At last-the geometry of our sphere! *Australian Senior Mathematics Journal*, 20(2), p.45-50.

Steinwachs, B. (1992). How to facilitate a debriefing. *Simulation & Gaming*, 23(2), p.186-195.

Sowell, E. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(5), p.498-505.

Towers, J., & Simmt, E. (2007). The teacher's responsibility in whole-class debriefing of mathematical activitiy. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education.* 7(2/3), p.231-255.

Wongapiwatkul, P., Laosinchai, P., & Panijpan, B. (2011). Enhancing conceptual understanding of trigonometry using Earth geometry and the great circle. *Australian Senior Mathematics journal*, 25(1), p.54-63.

Wongapiwatkul, P., Laosinchai, P., Ruenwongsa, P., & Panijpan, B. (2011). Enhancing high-school students' conceptual understanding of the linkages between the earth and trigonometry through an inquiry-based learning unit. *The International Journal of Learning*, 18 (2), p.1-22.