

# การศึกษาเปรียบเทียบเชิงตัวเลขของจุดน่าจะเป็นที่สุด สำหรับการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้

## A Numerical Comparative Study on Most Probable Point for Reliability Analysis

ทวิภักดิ์ บุรณธิตี

คณะพลังงานสิ่งแวดล้อมและวัสดุ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

### บทคัดย่อ

ความเชื่อถือได้เป็นประเด็นสำคัญที่ต้องพิจารณาในระบบส่วนใหญ่เนื่องจากมีความไม่แน่นอนของระบบเกิดขึ้น ในขณะที่ยวกันการประเมินความไม่แน่นอนก็เป็นหัวข้อที่ทำหาย เนื่องจากมีขั้นตอนและต้องการทรัพยากรในการคำนวณมากกว่าการวิเคราะห์ที่ไม่นำเอาความไม่แน่นอนเข้ามาพิจารณา บทความนี้นำเสนอการศึกษาเปรียบเทียบเชิงตัวเลขของการนำเทคนิคจุดน่าจะเป็นที่สุดมาใช้ในการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้กับกรณีศึกษาจำนวน 3 กรณี จากการศึกษาพบว่าเทคนิคนี้สามารถประมาณความน่าจะเป็นที่สถานะขีดจำกัดหรือความเชื่อถือได้ได้เป็นอย่างดีเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการจำลองสถานการณ์มอนเตคาร์โล ซึ่งเป็นวิธีที่มีศักยภาพแต่ต้องการทรัพยากรในการคำนวณที่มากที่สุด แต่เทคนิคจุดน่าจะเป็นที่สุดไม่เหมาะสมสำหรับการหาฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นทั้งหมด นอกจากนี้พบว่าระดับของความไม่เชิงเส้นและความเบ้ซ้ายหรือขวาของระบบที่สนใจมีผลกระทบต่อความแม่นยำของการพยากรณ์ของเทคนิคจุดน่าจะเป็นที่สุด

**คำสำคัญ :** จุดน่าจะเป็นที่สุด, ความเชื่อถือได้, การประเมินความไม่แน่นอน, การหาค่าเหมาะสมที่สุด, ความน่าจะเป็น

### Abstract

Reliability is an important issue in most systems because of the existence of uncertainty. At the same time, the uncertainty assessment is a challenging issue since the needed effort is usually greater than that of deterministic analysis without taking uncertainty into account. This paper presents a numerical comparative study on an implementation of most probable point (MPP) for reliability analysis through three case studies. It is found that MPP can well estimate the reliability in terms of probability at the limit state when it is compared with Monte Carlo simulation, a powerful but the most expensive method. But MPP is not suitable for predicting the entire probability density function (PDF). In addition, it is found that the level of nonlinearity and skewness of the system of interest has a significant impact to the prediction accuracy of MPP.

**Keywords :** Most Probable Point; Reliability; Uncertainty Assessment; Optimization; Probability

## บทนำ (Introduction)

ความเชื่อถือได้ (Reliability) ของระบบหนึ่ง ๆ เป็นสิ่งสำคัญอย่างยิ่งในสังคมปัจจุบัน ผลิตภัณฑ์ (Product) หรือกระบวนการผลิต (Manufacturing Process) ใดๆ ต้องมีความเชื่อถือได้ที่เพียงพอที่จะทำให้มีความมั่นใจ ว่ามีโอกาสเกิดความเสียหายน้อยจนเป็นที่ยอมรับได้ โดยทั่วไปแล้วในการออกแบบนั้นถ้าทุกปัจจัยในการสร้าง ผลิตภัณฑ์หรือสร้างระบบหนึ่ง ๆ มีความสมบูรณ์แบบดั่งที่ออกแบบไว้ย่อมไม่เกิดความผิดพลาดใดๆ แต่ในความเป็นจริง ปัจจัยจำนวนมากนั้นมีความไม่แน่นอน (Uncertainty) แฝงอยู่ เช่น วัสดุชนิดหนึ่งถูกออกแบบให้มีความสามารถรับภาระกรรม (Load) ได้ 300 MPa แต่บางชิ้นส่วนที่ผลิตจากวัสดุชนิดเดียวกันบางชิ้นส่วนสามารถรับภาระกรรมได้น้อยกว่าที่ควรจะเป็น ดังนั้นเมื่อต้องรับภาระกรรมซึ่งใกล้เคียงกับสถานะขีดจำกัด (Limit State) อาจก่อให้เกิดความเสียหายได้ เป็นต้น ดังนั้น ในการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ของระบบจึงจำเป็นต้องทราบปัจจัยความไม่แน่นอนที่แฝงอยู่ในระบบอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ และการสร้างแบบจำลองเสมือนจริงสำหรับปรากฏการณ์ จริงนั้น จำเป็นต้องพิจารณาความเป็นไปได้ของความไม่แน่นอนด้วย [Ross, 1993; Law and Kelton, 2000]

การวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ (Reliability Analysis) มีความท้าทายอย่างยิ่ง เนื่องจากต้องนำความไม่แน่นอนของปัจจัยต่างๆ มาพิจารณา [Robinson, 1989; Oberkampf *et al.*, 2002] ทั้งนี้วิธีการประเมินความ ไม่แน่นอน (Uncertainty Assessment) ซึ่งเป็นที่ยอมรับมาอย่างยาวนาน คือ Monte Carlo Simulation หรือ MCS โดยอาศัยหลักการของตัวแปรสุ่ม (Random Variable) และกฎจำนวนมาก (Strong Law of Large Number) ซึ่งปัจจุบันสามารถทำได้ด้วยคอมพิวเตอร์ประสิทธิภาพสูง อย่างไรก็ตามเทคนิคนี้มีปัญหามากในกรณีที่มีตัวแปรจำนวนมาก โดยที่ต้องการจำนวนตัวแปรสุ่มจำนวนมากขึ้นตามตัวแปรของระบบซึ่งมีการเพิ่มขึ้น

เป็นแบบ Exponential ลักษณะปัญหานี้เรียกได้ว่าเป็น Curse of Dimensionality ซึ่งต้องการการคำนวณเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีที่สิ้นสุดอย่างรวดเร็วในอัตรายกกำลังตามขนาดของระบบ จึงจำเป็นต้องพิจารณาเทคนิคการประเมินความไม่แน่นอนที่มีประสิทธิภาพ (Efficient) มากกว่าวิธี MCS วิธีการประมาณที่นิยมใช้คือ เทคนิค Moment-Matching ซึ่งเน้นการประมาณค่าคาดหวัง (Expected Value) และค่าความแปรปรวน (Variance) ด้วยเทคนิคที่มีประสิทธิภาพต่างๆ เช่น First-Order Approximation และ Weighted Three-Point-Based Method ใน Buranathiti *et al.* (2006)

ลักษณะเด่นในการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ คือ เน้นการหาจุดที่มักจะมีค่าความน่าจะเป็นที่จุดปลาย (Tail) ด้านใดด้านหนึ่ง เช่น ความน่าจะเป็นที่โครงสร้างหนึ่งจะรับภาระกรรมได้น้อยกว่าค่าค่าหนึ่ง เป็นต้น ดังนั้นการใช้วิธี MCS ซึ่งเป็นการหาฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability Density Function หรือ PDF) ทั้งหมดจึงไม่คุ้มค่า เช่น ที่ความเชื่อถือได้ 99.99% สำหรับการสุ่ม 100,000 ตัวอย่าง ในอุดมคติจะมีตัวอย่างซึ่งไม่ผ่านการประเมิน 10 ตัวอย่าง และมีตัวอย่างที่ผ่านการประเมินอยู่ถึง 99,990 ตัวอย่าง ทำให้ความแม่นยำโดยวิธี MCS ไม่ดีนักโดยเฉพาะกับระบบที่ต้องวิเคราะห์หาค่าความเชื่อถือได้สูงๆ เช่น 99.999% 99.9999% เป็นต้น และมีตัวแปรในระบบเป็นจำนวนมาก ส่วนเทคนิคหนึ่งที่เน้นหาความน่าจะเป็นที่จุดปลาย คือ เทคนิคจุดน่าจะเป็นที่สุด (Most Probable Technique หรือ MPP) โดย MPP เป็นเทคนิคที่เน้นการหาสถานะขีดจำกัดซึ่งสอดคล้องกับค่าความเชื่อถือได้หรือความน่าจะเป็นหนึ่งๆ ทำให้ลดภาระในการคำนวณหา PDF ทั้งหมด [Robinson, 1998; Du and Chen, 2001]

บทความนี้ได้นำเสนอเทคนิคการประเมินความไม่แน่นอนสำหรับการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ โดยเทคนิค MPP พร้อมกับแสดงตัวอย่างประกอบเป็นกรณีศึกษา โดยพิจารณาจากความสามารถใน

การพยากรณ์ค่าความเชื่อถือได้และ PDF ที่เกิดขึ้น โดยการเปรียบเทียบกับวิธี MCS ซึ่งกรณีศึกษา นำไปสู่การอภิปรายและหมายเหตุสรุปสำหรับเทคนิค MPP ในการประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ต่อไป

### เทคนิคจุดน่าจะเป็นที่สุด (Most Probable Point Technique)

เทคนิคจุดน่าจะเป็นที่สุดมีพื้นฐานความคิดมาจากการหาสถานะขีดจำกัดที่สอดคล้องกับค่าความเชื่อถือได้หรือความน่าจะเป็นหนึ่งๆ ดังนั้นเทคนิค MPP จึงเหมาะกับการใช้เพื่อหาค่าเฉพาะค่าหนึ่ง กำหนดให้ตัวแปรผลลัพธ์หรือตัวแปรตามของระบบ (y) เป็นฟังก์ชันของเวกเตอร์ตัวแปรอิสระ (x) ดังต่อไปนี้

$$y=y(\mathbf{x})=y(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

โดยระบบมีตัวแปรอิสระจำนวน n ตัวแปร

ทำการแปลงเวกเตอร์ตัวแปรอิสระ (x) ไปอยู่ในปริภูมิ (Space) อื่น ในกรณีนี้ทำการแปลง x ให้ อยู่ใน ปริภูมิปกติมาตรฐาน (Standard Normal Space) u (u → x) ด้วยการอ้างอิงฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น สะสม (Cumulative Distribution Function หรือ CDF) ดังนี้

$$\mathbf{u}=\Phi^{-1}[F(\mathbf{x})] \quad (2)$$

โดยที่ F(x) เป็น CDF ของ x และ  $\Phi^{-1}[F]$  เป็นฟังก์ชันย้อนกลับของ F ทั้งนี้ ฟังก์ชัน F(x) สามารถเป็นฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบต่างๆ เช่น แบบสม่ำเสมอ (Uniform) หรือแบบปกติ (Normal) เป็นต้น สำหรับการประยุกต์เพื่อนำไปสร้าง PDF หรือ CDF นั้น จำเป็นต้องหาค่าความน่าจะเป็นสะสม ณ ค่าตัวแปรผลลัพธ์ของระบบ y ทุกๆ ค่า

ระยะทางสั้นที่สุด (β) เป็นฟังก์ชันของ u เป็นตัวแปรที่ต้องทำการคำนวณ โดยระยะทางสั้นที่สุด (β)

นี้จำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการสถานะขีดจำกัดดังนี้

$$y(\mathbf{x}(\mathbf{u}))-Y = 0 \quad (3)$$

จากแนวคิดที่กล่าวมาแล้วนั้น ทำให้สามารถเขียนเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบจำลองหาค่าเหมาะสมที่สุด (Optimization Model) ในรูปแบบปัญหาค่าน้อยที่สุดที่มีข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นได้ดังต่อไปนี้

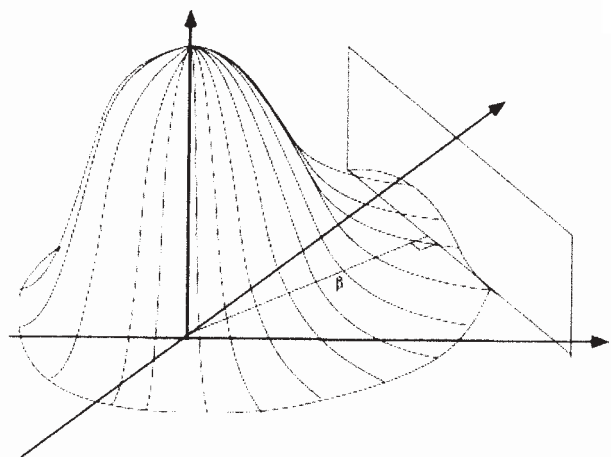
$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & \beta = \min \|\mathbf{u}\| \\ \text{Subjected to} \quad & y(\mathbf{x}(\mathbf{u}))-Y= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ขอบเขตที่เป็นไปได้ของตัวแปร u นี้มักจะอยู่ในช่วงสั้นๆ กล่าวคือ ระหว่าง [-5,5]

เมื่อสามารถหาระยะทางสั้นที่สุด (β) ได้แล้ว ค่าความน่าจะเป็นสะสมที่ตัวแปรผลลัพธ์ของระบบ y จะน้อยกว่าค่าที่กำหนดไว้ Y หรือ  $y < Y$  ซึ่งสามารถกำหนดด้วยความสัมพันธ์ ดังต่อไปนี้

$$P(y(\mathbf{x}(\mathbf{u})) < Y) \begin{cases} = 1 - \Phi(\beta), P < 0.5 \\ \Phi(\beta), P \geq 0.5 \end{cases} \quad (5)$$

ความหมายทางเรขาคณิตของระยะทางสั้นที่สุด (β) และสถานะขีดจำกัด (Limit State) สามารถดูได้จากรูปที่ 1 โดยที่ PDF ตัดกับฟังก์ชันสถานะขีดจำกัดที่ β



รูปที่ 1 ความสัมพันธ์ในลักษณะเรขาคณิตของ PDF และฟังก์ชันสถานะขีดจำกัด จาก Robinson (1998)

### กรณีศึกษา (Case Study)

เพื่อทำการศึกษานำเทคนิค MPP มาใช้ ในการประเมินความเชื่อถือได้ จะกำหนดกรณีศึกษา เป็นฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์แทนระบบทั่วไป โดย กำหนดให้ตัวแปรอิสระทุกตัวในที่นี่มีการแจกแจง ความน่าจะเป็นแบบปกติ (Normal Distribution) ที่มี ค่าเฉลี่ย ( $\mu_x$ ) และ ความแปรปรวน ( $\sigma_x^2$ ) ของ ตัวแปรสุ่มเท่ากับ 1 เพื่อให้ง่ายต่อการเปรียบเทียบ รูปแบบของ PDF และCDF โดยวิธี MPP จะถูก เปรียบเทียบกับวิธี MCS ด้วยจำนวนการสุ่ม 500,000 ชุดตัวอย่าง ซึ่งถือเป็นค่าอ้างอิงต่อไป

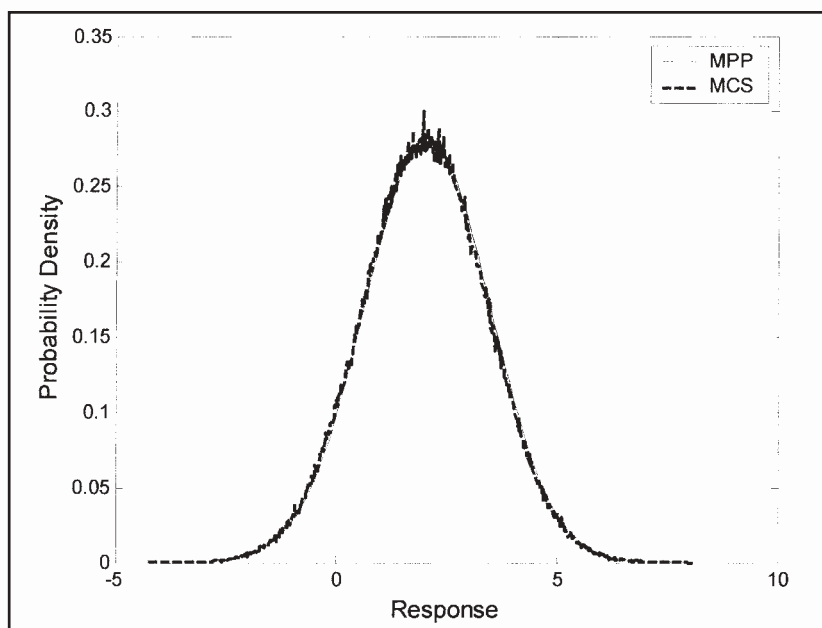
กรณีที่ 1 กำหนดให้ระบบมีผลลัพธ์ตามความ สัมพันธ์ในรูปแบบเชิงเส้น ดังนี้

$$g(x) = x_1 + x_2 \quad (6)$$

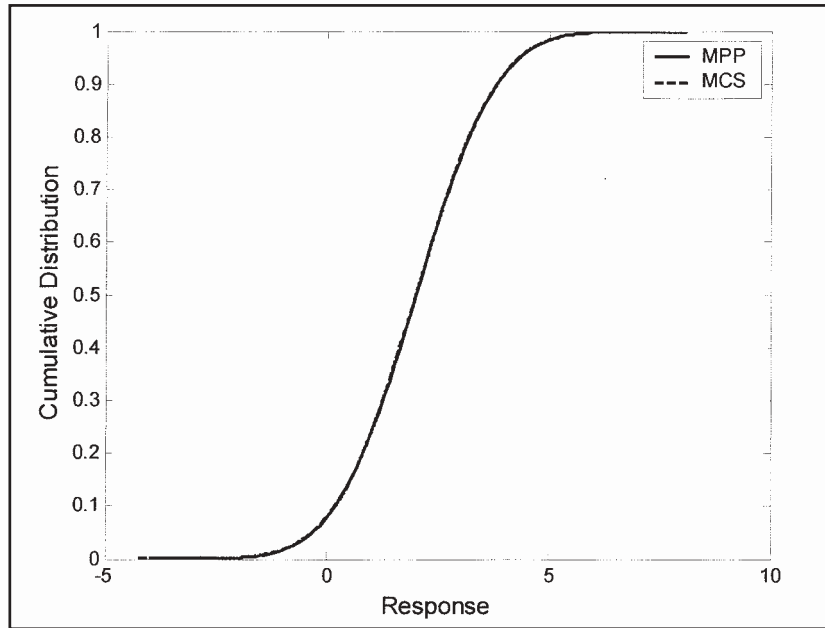
ค่าความเชื่อถือได้ของระบบ  $P(y < Y)$  เมื่อผลลัพธ์ น้อยกว่าค่าที่กำหนดไว้โดยวิธี MPP และ MCS แสดง ในตารางที่ 1 ส่วน PDF และ CDF ของระบบแสดง ในรูปที่ 2 และ 3 ตามลำดับ

ตารางที่ 1 ความเชื่อถือได้ของระบบโดยวิธี MPP และ MCS ที่ 500,000 ชุดตัวอย่าง

Y	$P(y < Y)$ from MPP	$P(y < Y)$ from MCS
0	7.8650E-02	7.9154E-02
-1	1.6947E-02	1.7130E-02
-2	2.3389E-03	2.2720E-03
-3	2.0348E-04	2.2400E-04
-4	1.1045E-05	1.0000E-05
-5	3.7155E-07	0.0000E+00



รูปที่ 2 ค่าพยากรณ์ PDF โดยวิธี MPP และ MCS



รูปที่ 3 ค่าพยากรณ์ CDF โดยวิธี MPP และ MCS

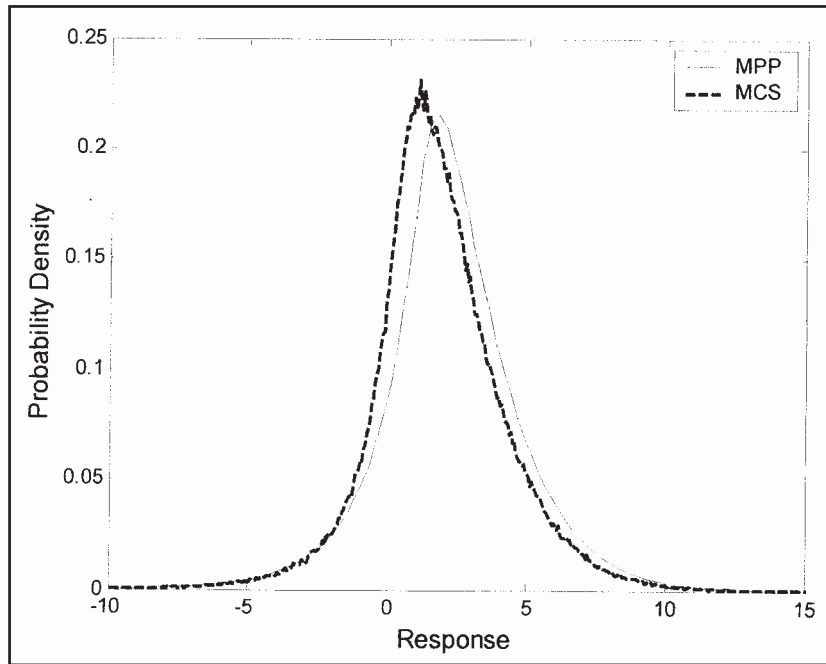
กรณีที่ 2 กำหนดให้ระบบมีผลลัพธ์ตามความสัมพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ดังนี้

$$g(\mathbf{x}) = 0.5X_1^2 + 0.25X_1X_2 + 1.5X_3X_4 - 0.5X^2 \quad (7)$$

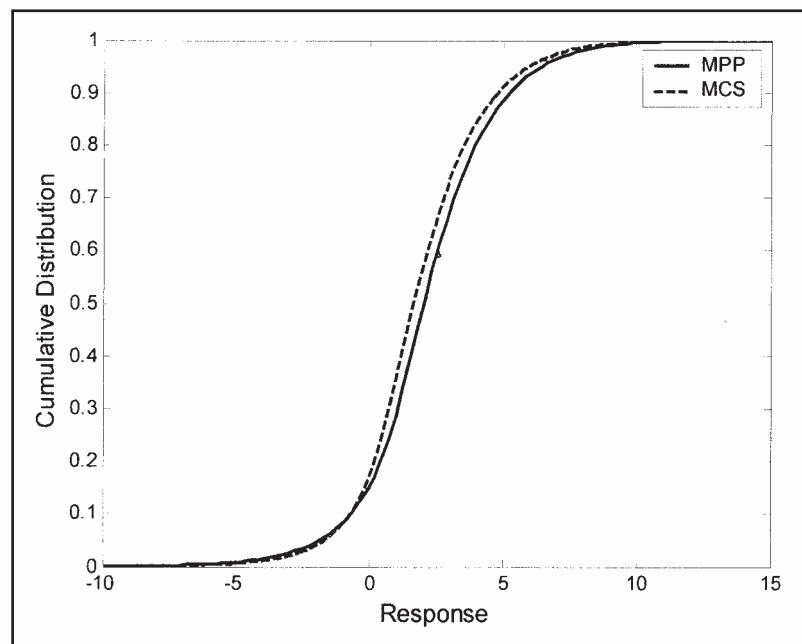
ค่าความเชื่อถือได้ของระบบ  $P(y < Y)$  เมื่อผลลัพธ์น้อยกว่าค่าที่กำหนดไว้โดยวิธี MPP และ MCS แสดงในตารางที่ 2 ส่วน PDF และ CDF ของระบบแสดงในรูปที่ 4 และ 5 ตามลำดับ

ตารางที่ 2 ความเชื่อถือได้ของระบบโดยวิธี MPP และ MCS

Y	$P(y < Y)$ from MPP	$P(y < Y)$ from MCS	$P(y < Y)$ from MCS	$P(y < Y)$ from MCS
0	1.5401E-01	1.6826E-01	1.6874E-01	1.6877E-01
-4	1.5091E-02	1.1198E-02	1.1226E-02	1.1243E-02
-6	4.9906E-03	3.3520E-03	3.3100E-03	3.3238E-03
-8	1.6734E-03	1.0180E-03	1.0220E-03	1.0026E-03
-10	5.6589E-04	2.6400E-04	2.9150E-04	3.0020E-04
-15	3.8415E-05	1.0000E-05	1.5500E-05	1.5200E-05
		By 500k samples	By 2M samples	By 10M samples



รูปที่ 4 ค่าพยากรณ์ PDF โดยวิธี MPP และ MCS



รูปที่ 5 ค่าพยากรณ์ CDF โดยวิธี MPP และ MCS

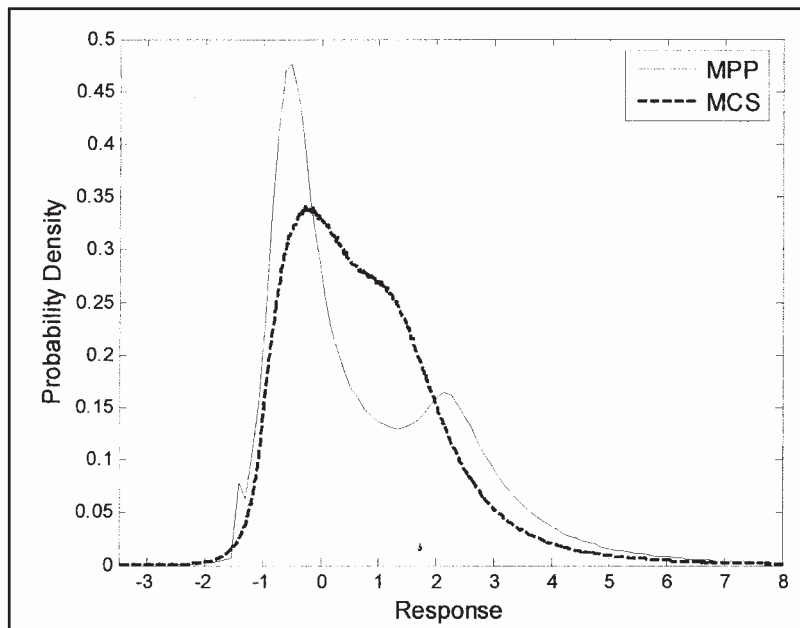
กรณีที่ 3 กำหนดให้ระบบมีผลลัพธ์ตามความสัมพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ดังนี้

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{8} x_1^3 + \frac{1}{5} x_2 x_5 + \sin\left(\frac{x_1 x_3}{9}\right) - \cos(x_4^2) + \frac{1}{9} x_3 x_4 + \sin\left(\frac{x_5}{5}\right) \quad (8)$$

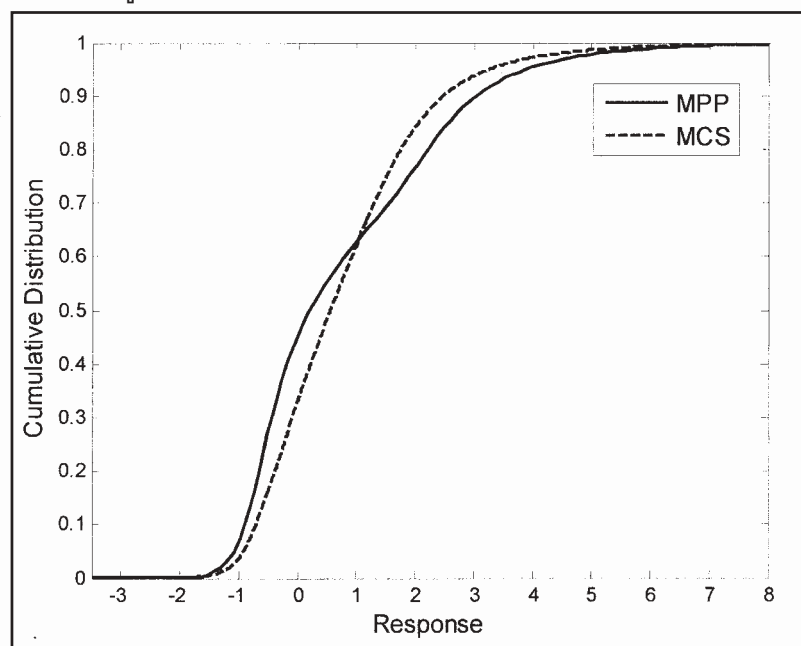
ค่าความเชื่อถือได้ของระบบ  $P(y < Y)$  เมื่อผลลัพธ์น้อยกว่าค่าที่กำหนดไว้โดยวิธี MPP และ MCS แสดงในตารางที่ 3 ส่วน PDF และ CDF ของระบบแสดงในรูปที่ 6 และ 7 ตามลำดับ

ตารางที่ 3 ความเชื่อถือได้ของระบบโดยวิธี MPP และ MCS

Y	$P(y < Y)$ from MPP	$P(y < Y)$ from MCS	$P(y < Y)$ from MCS	$P(y < Y)$ from MCS
0.0	4.5266E-01	3.2783E-01	3.2808E-01	3.2853E-01
-1.0	6.7585E-02	3.6242E-02	3.5499E-02	3.5662E-02
-2.0	9.8744E-04	1.0440E-03	1.0200E-03	1.0892E-03
-2.5	3.8641E-04	3.4400E-04	3.2050E-04	3.2660E-04
-3.0	1.7249E-04	1.5400E-04	1.3750E-04	1.3220E-04
-3.5	8.3691E-05	8.2000E-05	6.5000E-05	6.3000E-05
		By 500k samples	By 2M samples	By 10M samples



รูปที่ 6 ค่าพยากรณ์ PDF โดยวิธี MPP และ MCS



รูปที่ 7 ค่าพยากรณ์ CDF โดยวิธี MPP และ MCS



## อภิปรายและหมายเหตุสรุป (Discussions and Concluding Remarks)

การคำนวณหาความเชื่อถือได้ (Reliability) โดยวิธี MPP สามารถทำได้โดยไม่ต้องการพยากรณ์จำนวนมากในการสร้าง PDF ทั้งหมด ซึ่งเหมาะกับการนำไปประยุกต์ใช้ในการหาค่าความเชื่อถือได้ซึ่งเป็นค่าความน่าจะเป็นที่ขีดจำกัดโดยที่อาจเป็นแบบทางเดียวหรือแบบสองทางก็ได้ อย่างไรก็ตามเนื่องจากการคำนวณด้วยวิธี MPP จำเป็นต้องแก้ปัญหาในลักษณะการหาค่าเหมาะสมที่สุด (Optimization) หรือหาระยะทางสั้นที่สุด (Shortest Path) การลู่เข้าสู่คำตอบจะเร็วหรือช้าก็ขึ้นกับการกำหนดคำตอบเริ่มต้น นอกจากนี้ค่าเริ่มต้นมีความสำคัญมากต่อความแม่นยำของ MPP ซึ่งหาได้จากการหาค่าเหมาะสมที่สุดเมื่อระบบมีความไม่เชิงเส้นสูง อย่างไรก็ตามปัญหาลักษณะนี้มีข้อดี คือ ขอบเขตของคำตอบที่เป็นไปได้อยู่ในขอบเขตจำกัด ในกรณีศึกษาที่ 1 จะเห็นว่าวิธี MCS และ MPP ให้ผลการพยากรณ์ที่เกือบเป็นเส้นเดียวกันซึ่งแสดงว่าการพยากรณ์ด้วยวิธี MPP มีประสิทธิภาพ (Effective) ดีมาก ขณะที่กรณีศึกษาที่ 2 จะเห็นความแตกต่างระหว่างทั้งสองวิธี ซึ่งสาเหตุส่วนหนึ่งมาจากมีความไม่เป็นเชิงเส้นที่สูงขึ้นของระบบในกรณีศึกษาที่ 2 และเมื่อมีความไม่เป็นเชิงเส้นที่สูงขึ้น ประกอบกับมีความเบี่ยงเบนของระบบที่สูงใน

กรณีศึกษาที่ 3 ทำให้ความแม่นยำในการพยากรณ์ลดลงอีก ในกรณีที่ระบบมีความเชิงเส้นสูงดังเช่นในกรณีศึกษาที่ 1 วิธี MPP สามารถพยากรณ์ PDF ได้ใกล้เคียงผลลัพธ์จากวิธี MCS มากดังแสดงในตารางที่ 1 แต่เมื่อมีความไม่เชิงเส้นสูงขึ้นดังเช่นในกรณีศึกษาที่ 2 วิธี MPP มีความผิดพลาดสูงชัน และจะสูงมากขึ้นเมื่อระบบมีความเบี่ยงเบนหรือความที่มากขึ้นในกรณีศึกษาที่ 3 ดังแสดงในตารางที่ 2 และ 3 ตามลำดับ

สำหรับค่าฟังก์ชัน PDF ในรูปที่ 2, 4 และ 6 จะเห็นว่าวิธี MPP ให้ค่าฟังก์ชัน PDF เป็นแบบเรียบ (Smooth) ซึ่งต่างจากผลที่ได้จาก MCS ซึ่งมีลักษณะสัญญาณรบกวน (Noise) ซึ่งเป็นลักษณะปกติจากการสร้างตัวแปรสุ่มจำนวนมากและความไม่สมบูรณ์แบบของตัวแปรสุ่มที่เกิดขึ้นจากตัวกำเนิดแบบสุ่ม (Random Generator) การที่ฟังก์ชันเป็นแบบเรียบนี้ช่วยให้การนำไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบที่มีพื้นฐานมาจากความเชื่อถือได้ (Reliability -Based Design) มีความเสถียรสูงขึ้น ข้อสังเกตอีกประการหนึ่งคือ วิธี MPP เป็นวิธีซึ่งเน้นการคำนวณค่าความน่าจะเป็นเฉพาะจุด จึงไม่เหมาะที่จะนำมาใช้หา PDF หรือ CDF ดังสามารถเห็นได้จากตารางที่ 1, 2 และ 3 ว่าวิธี MPP เหมาะที่จะนำมาใช้หาค่าความน่าจะเป็นที่ส่วนปลายซึ่งสอดคล้องกับการนำไปใช้ในการประเมินความเชื่อถือได้ของระบบ

## เอกสารอ้างอิง (Reference)

- Du, X., and Chen, W. 2001, A most probable point-based method for efficient uncertainty analysis, *Design Manufacturing*, 4, 1, 47-66.
- Law, A., and Kelton, W. 2000. *Simulation Modeling and Analysis*. Boston, McGraw-Hill, 760p.
- Buranathiti, T., Cao, J., Chen, W., and Xia, Z.C. 2006. A Weighted Three-Point-Based Methodology for Variance Estimation, *Engineering Optimization*, 38, 5, 557-576.
- Oberkampf, W.L., DeLand, S.M., Rutherford, B.M., Diegert, K.V., and Alvin, K.F. 2002, Error and uncertainty in modeling and simulation, *Reliability Engineering and System Safety*, 75, 3, 333-357.
- Robinson, D.G. 1998. *A Survey of Probabilistic Methods Used in Reliability, Risk and Uncertainty Analysis: Analytical Techniques I*. Sandia Report.
- Ross, S.M. 1993. *Introduction to Probability Models*. Boston, Academic Press, 556p.