การวิเคราะห์ความน่าเชื่อถือของระบบแบบหลายขั้นตอนกรณีที่มีการซ่อมแซมภายใต้การแจกแจงไวบูลล์แบบฟัซซี

RELIABILITY ANALYSIS FOR REPAIRABLE MULTI-STATE SYSTEM UNDER FUZZY WEIBULL DISTRIBUTION

วิมลมาศ บำรุงเศรษฐพงษ์[1]* *ปราโมทช์ ฉลองรัตนสกุล[2]*

Wimonmas Bamrungsetthapong[1]*, *Pramote Charongratthanasakul[2]*

[1]สาขาวิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

[1]Division of Applied Statistics, Faculty of Science and Technology, Rajamangala University of Technology Thanyaburi.

[2]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

[2]Division of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Rajamangala University of Technology Krungthep.

***Corresponding author, e-mail:** *wimonmas_b@rmutt.ac.th*

Received:** 5 February 2019;* ***Revised: *23 April 2019;* ***Accepted:*** *7 May 2019*

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้ คือ นำเสนอวิธีการเพื่อวิเคราะห์ความน่าเชื่อถือของระบบแบบหลายขั้นตอนกรณีที่มีการซ่อมแซม (RMSS) ซึ่งมีอัตราการเสียและอัตราการซ่อมแซมเป็นการแจกแจงแบบไวบูลล์ภายใต้สภาวะเวลาที่คลุมเครือ โดยนำค่าสัมประสิทธิ์ความคลุมเครือที่มีฟังก์ชันความเป็นสมาชิกรูปสามเหลี่ยมมาประยุกต์ใช้เพื่อวิเคราะห์หารูปแบบฟังก์ชันอัตราการเสียและอัตราการซ่อมแซมที่เหมาะสมสำหรับความน่าเชื่อถือของระบบแบบหลายขั้นตอนกรณีที่มีการซ่อมแซม ผลการศึกษาพบว่า ระบบแบบหลายขั้นตอนกรณีที่มีการซ่อมแซมจะมีค่าความน่าเชื่อถือที่เหมาะสมที่สุดเมื่ออัตราการเสียและอัตราการซ่อมแซมของแต่ละสถานะในระบบเป็นฟังก์ชันลดภายใต้การแจกแจงไวลล์บูลแบบฟัซซี

คำสำคัญ: ระบบแบบหลายขั้นตอนกรณีที่มีการซ่อมแซม การแจกแจงแบบไวบูลล์ ความน่าเชื่อถือของระบบแบบฟัซซี ค่าสัมประสิทธิ์ความคลุมเครือ

Abstract

The purpose of this research is to present a method for analyzing the system reliability of the repairable multi-state system (RMSS) which the failure rate and repair rate are Weibull distribution with uncertain time. The vagueness coefficient with a triangular membership function is used to analyze the appropriate function of failure rate and repair rate for RMSS problems. The results showed that RMSS model had the most appropriate fuzzy system reliability when the failure rate and the repair rate of each state in the system are decreasing function under fuzzy Weibull distribution.

Keywords: Repairable multi-state system, Weibull distribution, Fuzzy system reliability, Vagueness coefficient

บทนำ

ความน่าเชื่อถือเป็นตัวชี้วัดที่สำคัญในการประเมินคุณภาพผลิตภัณฑ์ ซึ่งในปัจจุบันระดับความน่าเชื่อถือของการผลิตนั้น เป็นตัวบ่งชี้ที่สำคัญให้กับรากฐานอุตสาหกรรมในประเทศ การวิเคราะห์ความน่าเชื่อถือ ตั้งอยู่บนพื้นฐานของทฤษฎีความน่าจะเป็น สถิติ และคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ยังพบว่าความน่าเชื่อถือได้กลายเป็นแนวคิดที่สำคัญอย่างมากในการวิจัยทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม อย่างไรก็ตามในบางครั้งค่าสังเกตที่ต้องการนั้นไม่สามารถวัดและบันทึกอย่างแม่นยำได้ จึงทำให้นักวิจัยหลายท่านให้ความสนใจที่จะใช้ทฤษฎีฟัซซีในการวิเคราะห์ความน่าเชื่อถือ โดย Zadeh [1] ได้เป็นผู้ริเริ่มคิดค้นทฤษฎี ฟัซซีเพื่อที่จะจัดการกับความไม่แน่ชัดในโลกแห่งความจริง และ เริ่มมีการนำมาใช้วิเคราะห์ความน่าเชื่อถือ ตั้งแต่นั้นมาทฤษฎีของเขาได้ถูกนำมาใช้ในงานวิจัยหลาย ๆ ด้านเกี่ยวกับความน่าเชื่อถือ นักวิจัยบางท่านมุ่งเน้นที่วิธีการคำนวณค่าความน่าเชื่อถือแบบฟัซซีขององค์ประกอบเดี่ยว อาทิ Wu [2] ชี้ให้เห็นว่าความน่าเชื่อถือของระบบแบบฟัซซีมีประสิทธิภาพดีขึ้นกว่าปกติ โดยทำการปรับปรุงความน่าเชื่อถือแบบฟัซซีของแต่ละองค์ประกอบ ซึ่งก็เป็นที่ทราบกันอยู่แล้วว่าความน่าเชื่อถือของระบบขึ้นอยู่กับความน่าเชื่อถือของแต่ละองค์ประกอบ ต่อมา Li และคณะ [3] ได้นำเสนอวิธีการทางวิศวกรรมในทางปฏิบัติสำหรับการวิเคราะห์ความน่าเชื่อแบบฟัซซีของโครงสร้างเครื่องจักรกล โดยการทดสอบความเค้นและความแข็งโดยใช้การสุ่ม ที่มีข้อมูลแบบฟัซซี พวกเขาได้เสนอขั้นตอนการคำนวณโดยใช้วิธีการถดถอยเชิงเส้นแบบฟัซซี และใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์เป็นเครื่องมือในการทดลองเชิงตัวเลขอีกด้วย Kuo และ Zuo [4] เสนอระบบแบบหลายขั้นตอน (Multi-State System) Levitin และคณะ [5] นำเสนอตัวแบบการหาค่าที่เหมาะสมสำหรับระบบอนุกรม-ขนานแบบหลายขั้นตอน เพื่อหาองค์ประกอบที่ดีที่สุด และต่อมา Ramirez-Marquez และ Coit [6] ได้เสนอวิธีการแบบฮิวริสติกเพื่อแก้ปัญหาความซ้ำซ้อนในงานวิจัยของ Tian และ Zuo [7] ใช้วิธีการเขียนโปรแกรมทางกายภาพ เพื่อการแก้ปัญหาความซ้ำซ้อน สำหรับระบบอนุกรม-ขนานแบบหลายขั้นตอน และแสดงให้เห็นว่ามันมีประสิทธิภาพมากขึ้น นอกจากนี้ยังใช้วิธีทางพันธุกรรม มาช่วยให้โปรแกรมที่เสนอนั้นมีประสิทธิภาพมากขึ้น Liu และคณะ [8] ได้เสนอวิธีการประมาณด้วย โครงข่ายประสาทเทียมสำหรับการออกแบบที่เหมาะสมที่สุดของระบบอนุกรมขนานแบบหลายขั้นตอนอย่างต่อเนื่องเพื่อลดความซับซ้อนของการทำงานของคอมพิวเตอร์ Lisnianski [9] นำเสนอวิธีการใหม่ในการประเมินความน่าเชื่อถือของระบบแบบหลายขั้นตอนที่ซับซ้อน ซึ่งสามารถช่วยลดความซับซ้อนของระบบแบบหลายขั้นตอนที่สร้างขึ้น และลดความซับซ้อนของกระบวนการในการแก้ระบบสมการ Tian และคณะ [10] ได้พิจารณาวิธีการปฏิบัติเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของความน่าเชื่อถือของระบบแบบหลายขั้นตอนที่ซับซ้อน โดยใช้วิธีการมาร์คอฟเพื่อคำนวณหาการแจกแจงของสถานะ โดยเสนอแนวทางในการกำหนดรุ่นที่เหมาะสม และเพื่อลดค่าใช้จ่ายในการดำเนินงานของระบบ ต่อมา Chellappan และ Vijayalakshmi [11] พิจารณาสมการมาร์คอฟสำหรับระบบผสมที่ซ้ำซ้อนภายใต้สภาพแวดล้อมแบบฟัซซี ซึ่งผลลัพธ์แสดงให้เห็นว่าความน่าเชื่อถือแบบฟัซซี โดยภาพรวมแล้วดีกว่าความ

น่าเชื่อถือจากวิธีการเดิมของสมการมาร์คอฟ Liu และ Huang [12] ได้เสนอระบบแบบหลายขั้นตอนแบบฟัซซี โดยมีการขยายงานวิจัย ระบบแบบหลายขั้นตอนแบบฟัซซีไปสู่กรณีที่ประสิทธิภาพการทำงานของแต่ละสถานะเป็นแบบไม่แน่นอน

การแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลนิยมนำมาใช้เพื่อประเมินความน่าเชื่อถือของระบบ โดยจะใช้เมื่อกำหนดว่าอัตราการเสียของระบบคงที่ ซึ่งพบว่างานวิจัยจำนวนมากที่ศึกษาระบบแบบหลายขั้นตอนเลือกใช้การแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล อาทิเช่น Lisnianski และ Levitin [13] ศึกษาระบบแบบหลายขั้นที่กำหนดให้ค่า เวลาที่ระบบเสียมีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล Lisnianski [9] วิเคราะห์ความน่าเชื่อถือของ block diagram โดยนำไปใช้กับระบบแบบหลายขั้นตอนกรณีที่มีการซ่อมแซม ด้วยสมมติฐานที่ว่า เวลาที่เสียและเวลาที่ซ่อมแซม มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ต่อมา Tian, Levitin และ Zuo [10] เสนอวิธีการเพื่อหาค่าที่เหมาะสมสำหรับความน่าเชื่อถือที่มีความซับซ้อนสำหรับระบบอนุกรมขนานแบบหลายขั้นตอน โดยสมมติว่าเวลาที่เสีย และเวลาที่ซ่อมแซม มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล Bamrungsetthapong. W. และ Pongpullponsak, A. [14] ได้เสนอวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับประมาณค่าความน่าเชื่อถือของระบบแบบหลายขั้นตอนภายใต้ข้อมูลแบบฟัซซี และทดสอบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าโดยความน่าจะเป็นครอบบคลุม ต่อมา Bamrungsetthapong. W. และ Pongpullponsak, A. [15] ได้เสนอวิธีการประมาณค่าแบบจุดโดยประยุกต์วิธีของเบย์เซียนกับทฤษฎีฟัซซี เพื่อประมาณค่าแบบจุดของความน่าเชื่อถือของระบบแบบหลายขั้นตอนภายใต้ข้อกำหนดว่าอัตราการเสียมีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล จากหลายงานวิจัยที่กล่าวมาข้างต้นพบว่าอัตราการเสียของระบบถูกกำหนดให้มีลักษณะคงที่แม้เวลาเปลี่ยนไป แต่หากพิจารณาว่าค่าพารามิเตอร์มีการเปลี่ยนแปลงเมื่อเวลาเปลี่ยนไป ดังนั้นผู้วิจัยจึงเล็งเห็นว่าแท้จริงแล้วอัตราการเสียควรเป็นการแจกแจงแบบไวบูลล์

งานวิจัยนี้จึงต้องการนำทฤษฎีฟัซซีเซตมาประยุกต์ใช้กับการหาค่าความน่าเชื่อถือของระบบแบบหลายขั้นตอนโดยใช้กระบวนการมาร์คอฟ เพื่อสร้างตัวแบบความน่าเชื่อถือของระบบแบบหลายขั้นตอนกรณีที่มีการซ่อมแซม เมื่อกำหนดให้อายุการใช้งานของแต่ละสถานะในระบบ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงไวบูลล์ และอัตราการเสีย อัตราการซ่อมแซม ของแต่ละสถานะถูกพิจารณาภายใต้ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงไวบูลล์ด้วย โดยทำการศึกษาถึงสมบัติต่าง ๆ และการประยุกต์ใช้ตัวแบบความน่าเชื่อถือที่กำหนดขึ้นอีกด้วย

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อกำหนดตัวแบบและวิเคราะห์ความน่าเชื่อถือของระบบแบบหลายขั้นตอนกรณีที่ระบบมีการซ่อมแซม (RMSS) ซึ่งมีอัตราการเสียและอัตราการซ่อมแซมเป็นการแจกแจงแบบไวบูลล์ภายใต้อายุการใช้งานแบบคลุมเครือ

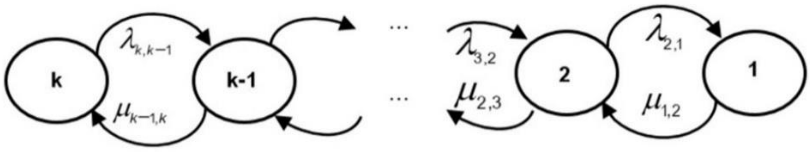
วิธีดำเนินการวิจัย

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีที่นำมาประยุกต์เพื่อสร้างตัวแบบความน่าเชื่อถือของระบบแบบหลายขั้นตอนกรณีที่มีการซ่อมแซมภายใต้การแจกแจงแบบไวบูลล์ฟัซซีโดยมีรายละเอียดดังนี้

1. ระบบแบบหลายขั้นตอนกรณีที่มีการซ่อมแซม (Repairable Multi-State System, RMSS)

ในงานวิจัยนี้จะพิจารณาระบบแบบหลายขั้นตอนกรณีที่เมื่อเกิดการเสียจะเกิดการซ่อมแซมขึ้น ซึ่งเป็นการเสียของระบบเพียงบางส่วน (Minor Failure) โดยมีลักษณะคือเมื่อเกิดการเสียแล้วระบบจะเปลี่ยนสถานะการทำงานจากสถานะที่ i ไปยังสถานะที่ j เมื่อ $j \leq i-1$ โดยอัตราการเสียที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนจากสถานะ

ที่ i ไปยังสถานะที่ j เขียนแทนด้วย λ_{ij} โดยที่ $j \in \{i-1, i-2, ..., 1\}$ และ ภายหลังจากเกิดการเสียขึ้น ระบบจะเกิดการซ่อมแซมเพียงบางส่วน (Minor Repair) ซึ่งเมื่อเกิดการซ่อมแซมแล้วระบบจะเปลี่ยนสถานะการทำงานจากสถานะที่ $i-1$ กลับไปยังสถานะที่ i โดยอัตราของการซ่อมแซมเขียนแทนด้วย μ_{ij} ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 ระบบแบบหลายขั้นตอนกรณีที่มีการซ่อมแซมซึ่งการเสียแบบ Minor Failure และ Major Failure [13]

จากภาพที่ 1 สามารถเขียนในรูปสมการ Chapman-Kolmogorov Equation แสดงดังสมการที่ 1

$$\begin{aligned}
\frac{dP_1(t)}{dt} &= -\mu_{1,2}P_1(t) + \lambda_{2,1}P_2(t), \\
\frac{dP_2(t)}{dt} &= \mu_{1,2}P_1(t) - \left(\lambda_{2,1} + \mu_{2,3}\right)P_2(t) + \lambda_{3,2}P_3(t), \\
... &= ... \\
\frac{dP_k(t)}{dt} &= \mu_{k-1,k}P_{k-1}(t) - \lambda_{k,k-1}P_k(t).
\end{aligned} \tag{1}$$

กำหนดให้สถานะที่ k เป็นสถานะเริ่มต้น ในสถานะนี้ระบบจะทำงานได้เต็มสมรรถนะ ซึ่งสามารถหาความน่าจะเป็นที่ระบบแต่ละสถานะจะทำงาน โดยใช้วิธีระบบสมการเชิงเส้นเพื่อแก้สมการหาคำตอบ มีเงื่อนไขเริ่มต้น คือ $P_k(0)=1$ และ $P_{k-1}(0)=P_{k-2}(0)=...=P_1(0)=0$ ตามลำดับ

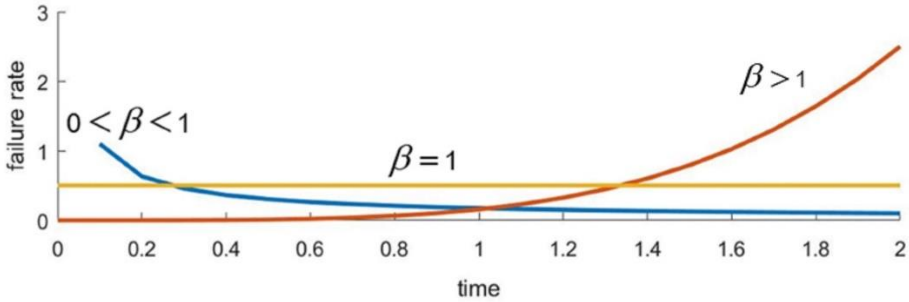
2. ตัวแปรสุ่มแบบฟัซซีที่มีการแจกแจงแบบไวบูลล์ (Weibull Distribution With Fuzzy Random Variable)

การแจกแจงแบบไวบูลล์ถูกนำไปใช้ในการสร้างตัวแบบความน่าเชื่อถืออย่างแพร่หลาย โดยมีพฤติกรรมของอัตราการเสียที่เปลี่ยนแปลงแบบลดลงหรือเพิ่มขึ้นตามเวลา ในงานวิจัยนี้พิจารณาคุณสมบัติดังกล่าวของการแจกแจงแบบไวบูลล์ภายใต้พารามิเตอร์ 2 ค่า และค่าฟังก์ชันแจกแจงความน่าจะเป็น (p.d.f.) ของการแจกแจงแบบไวบูลล์กำหนดโดย

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} \quad ,\beta > 0 \; ,\eta > 0 \tag{2}$$

เมื่อกำหนดให้ η แทนค่าพารามิเตอร์ขนาด (Scale Parameter) และ β แทนค่าพารามิเตอร์รูปร่าง (Shape Parameter) ตามลำดับ จะได้ว่าฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบสะสม (c.d.f.) ของการแจกแจงแบบ

ไวบูลล์ คือ $F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$ ส่วนความน่าเชื่อถือของการแจกแจงแบบไวบูลล์ คือ $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$ นอกจากนี้ อัตราการเสีย คือ $\lambda(t) = \dfrac{f(t)}{R(t)}$ และอัตราการซ่อมแซม คือ $\mu(t) = \dfrac{f(t)}{F(t)}$ ตามลำดับ หากพิจารณาถึงความสัมพันธ์ของอัตราการเสียกับพารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงแบบไวบูลล์พบว่า $0 < \beta < 1$ ทำให้อัตราการเสียลดลง แต่ถ้า $\beta > 1$ ทำให้อัตราการเสียเพิ่มขึ้น และหาก $\beta = 1$ ทำให้อัตราการเสียคงที่ ซึ่งนั่นหมายถึงการแจกแจงไวบูลล์เปลี่ยนรูปไปเป็นการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล แสดงดังภาพที่ 2

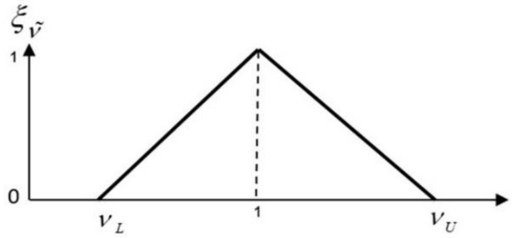


ภาพที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงแบบไวบูลล์กับอัตราการเสีย

จากแนวคิดของ Karpisek [16] หากกำหนด $\tilde{T}$ แทนตัวแปรสุ่มแบบฟัซซี โดยมี $\tilde{t} = \left([0,\infty), \xi_{\tilde{t}}\right)$ และ $\tilde{t} = \tilde{v}t$ เมื่อกำหนดให้ t แทนค่าสังเกตของ T ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มแบบดั้งเดิมและ $\tilde{v}$ แทนค่าสัมประสิทธิ์ความคลุมเครือตามลำดับ จะได้ว่า $\tilde{v}$ คือ จำนวนฟัซซีแบบสามเหลี่ยม และมีฟังก์ชันความเป็นสมาชิก$\left(\xi_{\tilde{v}}(v)\right)$คือ

$$\xi_{\tilde{v}}(v) = \begin{cases} \dfrac{v - v_L}{1 - v_L} & \text{if } v_L \leq v \leq 1 \\ \dfrac{v - v_U}{1 - v_U} & \text{if } 1 \leq v \leq v_U \end{cases} \tag{3}$$

ให้ v_L แทนค่าที่ต่ำที่สุดของค่าสัมประสิทธิ์ความคลุมเครือ และ v_U แทนค่าที่สูงสุดของค่าสัมประสิทธิ์ความคลุมเครือ เมื่อ $0 \leq v_L \leq 1 \leq v_U$ ตามลำดับ ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์ความคลุมเครือจึงถูกกำหนดในรูปการณ์กระจายของค่าดั้งเดิม (Crisp Value) ดังแสดงในภาพที่ 3



ภาพที่ 3 ค่าฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของค่าสัมประสิทธิ์ความคลุมเครือ

ดังนั้นช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความคลุมเครือ กำหนดโดยค่า $\alpha-$cut สามารถเขียนได้ดังสมการที่ 4

$$\tilde{v}_{\alpha}=\left[v_{L}+\alpha\left(1-v_{L}\right),v_{U}+\alpha\left(1-v_{U}\right)\right],\ 0\leq\alpha\leq 1. \tag{4}$$

ในงานวิจัยนี้ กำหนดให้อัตราการเสียจากสถานะที่ i ไปยังสถานะที่ j มีการแจกแจงแบบไวบูลล์ภายใต้ตัวแปรสุ่มแบบฟัซซี จากแนวคิดที่กล่าวมาข้างต้นนั้น จะได้ว่าฟังก์ชันอัตราการเสียแบบฟัซซีคือ $\tilde{\lambda}\left(\tilde{t}\right)=\dfrac{\beta\left(\tilde{t}\right)^{\beta-1}}{\left(\eta\right)^{\beta}}$

และอัตราการซ่อมแซมแบบฟัซซีคือ $\tilde{\mu}\left(\tilde{t}\right)=\dfrac{f\left(\tilde{t}\right)}{F\left(\tilde{t}\right)}=\dfrac{\beta\left(\tilde{t}\right)^{\beta-1}}{\eta^{\beta}}\left(\dfrac{e^{-\left(\frac{\tilde{t}}{\eta}\right)^{\beta}}}{1-e^{-\left(\frac{\tilde{t}}{\eta}\right)^{\beta}}}\right)$ ดังนั้นค่า $\alpha-$cut ของอัตราการเสียแบบฟัซซีกำหนดโดย $\tilde{\lambda}_{\alpha}\left(\tilde{t}\right)=\left[\tilde{\lambda}_{L\alpha}\left(\tilde{t}\right),\tilde{\lambda}_{U\alpha}\left(\tilde{t}\right)\right]$ ในทำนองเดียวกัน ค่า $\alpha-$cut ของอัตราการซ่อมแซมแบบฟัซซีกำหนดโดย $\tilde{\mu}_{\alpha}\left(\tilde{t}\right)=\left[\tilde{\mu}_{L\alpha}\left(\tilde{t}\right),\tilde{\mu}_{U\alpha}\left(\tilde{t}\right)\right]$ ตามลำดับ

3.ระบบแบบหลายขั้นตอนกรณีที่มีการซ่อมแซมภายใต้การแจกแจงไวบูลล์แบบฟัซซี (Repairable Multi-State Elements with Fuzzy Weibull Distribution)

จากภาพที่ 1 ความน่าจะเป็นที่ระบบจะดำเนินอยู่ในสถานะที่ i ที่เวลา $\tilde{t}$ สามารถเขียนแทนด้วย $\tilde{P}_{i}\left(\tilde{t}\right)$ แล้วจะได้ว่าค่าอัตราการเสียระหว่างสถานะที่ i และสถานะที่ j สามารถเขียนแทนด้วย $\tilde{\lambda}_{ij}\left(\tilde{t}\right)$ นอกจากนี้ระบบจะมีการซ่อมแซมภายหลังจากเกิดการเสีย ซึ่งเป็นการซ่อมแซมเพียงบางส่วน (Minor Repair) ซึ่งเมื่อเกิดการซ่อมแล้วระบบจะเปลี่ยนสถานะจากสถานะที่ $i-1$ ไปยังสถานะที่ i เขียนแทนด้วย $\tilde{\mu}_{ij}\left(\tilde{t}\right)$ ตามลำดับ ดังนั้นจากสมการที่ 1 สมการเชิงอนุพันธ์ของความน่าจะเป็นที่ระบบจะอยู่ในแต่ละสถานะ แสดงดังสมการที่ 5

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{P}_{k}(\tilde{t})}{dt}&=-\tilde{\lambda}_{k,k-1}\tilde{P}_{k}(\tilde{t}),...,\\
\frac{d\tilde{P}_{i}(\tilde{t})}{dt}&=\tilde{\lambda}_{i+1,i}\tilde{P}_{i+1}(\tilde{t})-\tilde{\lambda}_{i,i-1}\tilde{P}_{i}(\tilde{t}),...,\\
\frac{d\tilde{P}_{1}(\tilde{t})}{dt}&=\tilde{\lambda}_{2,1}\tilde{P}_{2}(\tilde{t}),\ i=2,3,...,k-1.
\end{aligned} \tag{5}$$

มีเงื่อนไขเริ่มต้นของค่าแบบฟัซซี คือ $\tilde{P}_{k}(0)=1$ และ $\tilde{P}_{k-1}(0)=\tilde{P}_{k-2}(0)=...=\tilde{P}_{1}(0)=0$ ในการแก้สมการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์นั้นสามารถเลือกใช้วิธีการได้หลายแบบ งานวิจัยนี้เลือกวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีระบบสมการเชิงเส้น เพื่อแก้สมการหาค่า $\tilde{P}_{i}\left(\tilde{t}\right)$ ในเทอมของค่า $\tilde{\lambda}$ และ $\tilde{\mu}$ จะได้ว่าค่าความน่าจะเป็นแบบฟัซซีของแต่ละสถานะ $\tilde{P}_{i}(\tilde{\lambda},\tilde{\mu},\tilde{t})$ สามารถเขียนอยู่ในเทอมของค่า $\alpha-$cut ได้ดังสมการต่อไปนี้

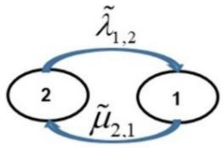
$$\tilde{P}_{i\alpha}\left(\tilde{\lambda},\tilde{\mu},\tilde{t}\right)=\left[\tilde{P}_{i\alpha}^{L}\left(\tilde{\lambda},\tilde{\mu},\tilde{t}\right),\tilde{P}_{i\alpha}^{U}\left(\tilde{\lambda},\tilde{\mu},\tilde{t}\right)\right]\ ;0\leq\alpha\leq 1. \tag{6}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันความน่าเชื่อถือแบบฟัซซีของระบบ RMSS แบบฟัซซี ในเทอมของ α - cut แสดงดังสมการที่ 7

$$\left[\tilde{R}^{L}_{s\alpha}\left(\tilde{\lambda},\tilde{\mu},\tilde{t}\right),\tilde{R}^{U}_{s\alpha}\left(\tilde{\lambda},\tilde{\mu},\tilde{t}\right)\right]=\left[1-\sum_{j=1}^{i}\tilde{P}^{U}_{j\alpha}\left(\tilde{\lambda},\tilde{\mu},\tilde{t}\right),1-\sum_{j=1}^{i}\tilde{P}^{L}_{j\alpha}\left(\tilde{\lambda},\tilde{\mu},\tilde{t}\right)\right] \quad (7)$$

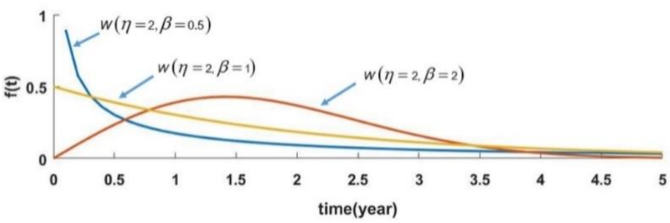
ผลการวิจัย

ในส่วนนี้จะนำเสนอตัวอย่างการวิเคราะห์หาค่าความน่าเชื่อถือของระบบ RMSS แบบฟัซซี เมื่อกำหนดให้อัตราการเสีย และอัตราการซ่อมแซม ดำเนินอยู่ภายใต้เวลาที่มีความไม่แน่นอน โดยมีสาเหตุจากความผิดพลาดของคน และ จากความผิดพลาดของเครื่องจักร เป็นต้น กำหนดให้อัตราการเสีย $\left(\tilde{\lambda}(\tilde{t})\right)$ และอัตราการซ่อมแซม $\left(\tilde{\mu}(\tilde{t})\right)$ ของแต่ละสถานะเกิดขึ้นภายใต้เวลา $\tilde{t}$ โดยมีการแจกแจงแบบไวบูลล์ ดังแสดงในภาพที่ 4

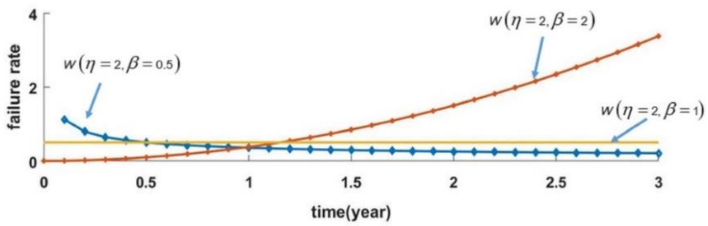


ภาพที่ 4 ระบบแบบหลายขั้นตอนกรณีที่มีการซ่อมแซมภายใต้เวลาแบบฟัซซี

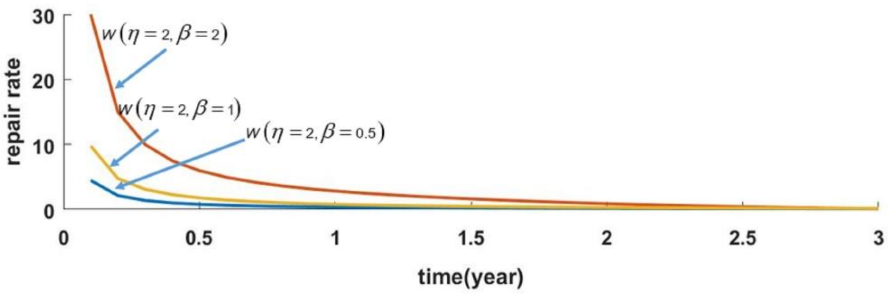
ในส่วนนี้จะพิจารณาถึงผลลัพธ์ของค่าความน่าเชื่อถือของระบบ RMSS เมื่อกำหนดค่าพารามิเตอร์ขนาดของการแจกแจงแบบไวบูลล์เป็น $\eta = 2$ ส่วนค่าพารามิเตอร์รูปร่างจะพิจารณา 3 กรณี คือ $0<\beta<1$, $\beta=1$ และ $\beta>1$ ตามลำดับ กำหนดให้ $\beta=0.5$ แทนตัวอย่างกรณีที่ $0<\beta<1$ และกำหนดให้ $\beta=2$ แทนตัวอย่างกรณีที่ $\beta>1$ จะได้ฟังก์ชันแจกแจงความน่าจะเป็นภายใต้การแจกแจงแบบไวบูลล์ดังแสดงในภาพที่ 5 นอกจากนี้ระบบจะมีฟังก์ชันอัตราการเสียและฟังก์ชันอัตราการซ่อมแซมดังแสดงในภาพที่ 6 และ 7 ตามลำดับ



ภาพที่ 5 ฟังก์ชันแจกแจงความน่าจะเป็น (p.d.f.) ของการแจกแจงแบบไวบูลล์



ภาพที่ 6 ฟังก์ชันอัตราการเสียของการแจกแจงแบบไวบูลล์



ภาพที่ 7 ฟังก์ชันอัตราการซ่อมแซมของการแจกแจงแบบไวบูลล์

ในงานวิจัยนี้กำหนดให้ข้อมูลเกิดขึ้นภายใต้ความไม่แน่นอนของอายุการใช้งานซึ่งมีค่าการกระจายของข้อมูล (Spread) เป็น 5% โดยการแทนค่าสัมประสิทธิ์ความคลุมเครือเป็น $\tilde{v}_\alpha = [0.95 + 0.05\alpha, 1.05 - 0.05\alpha]$ ในตัวแบบข้างต้น จากแนวคิดการสร้างตัวแบบในงานวิจัยนี้ สามารถกำหนดรายละเอียดของความน่าจะเป็นแบบฟัซซีในแต่ละสถานะได้ดังนี้ $\tilde{P}_1(\tilde{t})$ แทนค่าความน่าจะเป็นแบบฟัซซีของสถานะที่ไม่สามารถทำงานได้ และ $\tilde{P}_2(\tilde{t})$ แทนค่าความน่าจะเป็นแบบฟัซซีของสถานะที่ทำงานได้ดีเยี่ยม ดังนั้นสามารถเขียนแสดงสมการเชิงอนุพันธ์ของความน่าจะเป็นแบบฟัซซีในแต่ละสถานะได้ดังสมการที่ 8

$$\frac{d\tilde{P}_1(\tilde{t})}{dt} = -\tilde{\mu}_{1,2}\tilde{P}_1(\tilde{t}) + \tilde{\lambda}_{2,1}\tilde{P}_2(\tilde{t}), \quad \frac{d\tilde{P}_2(\tilde{t})}{dt} = \tilde{\mu}_{1,2}\tilde{P}_1(\tilde{t}) - \tilde{\lambda}_{2,1}\tilde{P}_2(\tilde{t}). \tag{8}$$

ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เพื่อหาคำตอบของความน่าจะเป็นแบบฟัซซี $\tilde{P}_1(\tilde{t})$ และ $\tilde{P}_2(\tilde{t})$ จะใช้วิธีระบบสมการเชิงเส้นมาประยุกต์ใช้เพื่อหาคำตอบ ผลลัพธ์ที่ได้แสดงดังสมการที่ 9

$$\tilde{P}_1(\tilde{t}) = \frac{\tilde{\lambda}_{2,1}}{\tilde{\lambda}_{2,1} + \tilde{\mu}_{1,2}}\left(e^{-\left(\tilde{\lambda}_{2,1}+\tilde{\mu}_{1,2}\right)\cdot\tilde{t}} - 1\right), \tilde{P}_2(\tilde{t}) = \frac{\tilde{\mu}_{1,2}}{\tilde{\lambda}_{2,1} + \tilde{\mu}_{1,2}} + \frac{\tilde{\lambda}_{2,1}}{\tilde{\lambda}_{2,1} + \tilde{\mu}_{1,2}} e^{-\left(\tilde{\lambda}_{2,1}+\tilde{\mu}_{1,2}\right)\cdot\tilde{t}} \tag{9}$$

ดังนั้นค่าความน่าเชื่อถือของระบบ RMSS แบบฟัซซี สามารถเขียนในรูปของค่า $\alpha -$cut ได้ดังสมการที่ 10

$$\left[\tilde{R}^L_{s\alpha}(\tilde{t}), \tilde{R}^U_{s\alpha}(\tilde{t})\right] = \left[1 - \tilde{P}^U_{1\alpha}(\tilde{t}), 1 - \tilde{P}^L_{1\alpha}(\tilde{t})\right] \tag{10}$$

ภาพที่ 6 แสดงฟังก์ชันอัตราการเสียเมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้นพบว่า $\beta = 0.5(0 < \beta < 1)$ ทำให้อัตราการเสียลดลง แต่ถ้า $\beta = 2(\beta > 1)$ ทำให้อัตราการเสียเพิ่มขึ้น และหาก $\beta = 1$ ทำให้อัตราการเสียคงที่ซึ่งเป็นแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลตามลำดับ หากพิจารณาภาพที่ 7 พบว่าเมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้นค่าพารามิเตอร์รูปร่างที่แตกต่างกันทั้ง 3 กรณีต่างก็ส่งผลให้อัตราการซ่อมแซมลดลง ส่วนที่เวลาเดียวกันพบว่ากรณีที่ $0 < \beta < 1$ ทำให้ระบบมีอัตราการซ่อมแซมต่ำกว่ากรณีที่ $\beta \geq 1$ จากตารางที่ 1 แสดงค่าความน่าเชื่อถือของระบบ RMSS แบบฟัซซีในรูปของ α - cut ที่เวลา t = 0.5 ปี โดยพบว่ากรณีที่อัตราการเสียลดลง $(0 < \beta < 1)$ ให้ค่าความน่าเชื่อถือของระบบ RMSS แบบฟัซซีมีค่าสูงกว่ากรณีที่อัตราการเสียคงที่หรือเพิ่มขึ้น $(\beta \geq 1)$ และยังพบว่าค่า β ที่เพิ่มมากขึ้นทำให้ค่าความน่าเชื่อถือของระบบลดลงอีกด้วย จากตารางที่ 2 เมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไป

หากพิจารณากำหนดค่าพารามิเตอร์ขนาดเป็น $\eta = 1,2$ และ 3 โดยมีค่าพารามิเตอร์รูปร่าง 3 กรณี คือ $0 < \beta < 1$, $\beta = 1$ และ $\beta > 1$ ตามลำดับ ที่ค่า α - cut =1 พบว่าเมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้นสำหรับทุก ๆ ค่าพารามิเตอร์ขนาดค่าความน่าเชื่อถือของระบบ RMSS แบบฟัซซีในกรณีที่ $0 < \beta < 1$ มีค่าสูงกว่าความน่าเชื่อถือของระบบ RMSS แบบฟัซซีในกรณีที่ $\beta = 1$ และ $\beta > 1$ ตามลำดับ และเมื่อพิจารณาที่เวลาเดียวกัน พบว่า ค่าพารามิเตอร์ขนาดที่มีค่าลดลงมีผลทำให้ความน่าเชื่อถือของระบบ RMSS แบบฟัซซีเพิ่มสูงขึ้นด้วย

ตารางที่ 1 แสดงค่าความน่าเชื่อถือของระบบ RMSS แบบฟัซซี ในรูปของค่า α - cut ที่ t = 0.5 ปี

α - cut	$\tilde{w}(\eta = 2, \beta = 0.5)$	$\tilde{w}(\eta = 2, \beta = 1)$	$\tilde{w}(\eta = 2, \beta = 2)$
0	[0.7493,0.7554]	[0.4678,0.4776]	[0.2874,0.3179]
0.1	[0.7496,0.7551]	[0.4683,0.4771]	[0.2889,0.3163]
0.2	[0.7499,0.7548]	[0.4688,0.4766]	[0.2904,0.3148]
0.3	[0.7503,0.7545]	[0.4693,0.4761]	[0.2919,0.3132]
0.4	[0.7506,0.7542]	[0.4698,0.4757]	[0.2934,0.3117]
0.5	[0.7509,0.7539]	[0.4703,0.4752]	[0.2949,0.3101]
0.6	[0.7512,0.7536]	[0.4708,0.4747]	[0.2964,0.3086]
0.7	[0.7515,0.7533]	[0.4713,0.4742]	[0.2979,0.3070]
0.8	[0.7518,0.7530]	[0.4717,0.4737]	[0.2994,0.3055]
0.9	[0.7521,0.7527]	[0.4722,0.4732]	[0.3009,0.3040]
1	[0.7524,0.7524]	[0.4727,0.4727]	[0.3024,0.3024]

ตารางที่ 2 แสดงความน่าเชื่อถือของระบบ RMSS แบบฟัซซีในรูปของค่า α - cut =1 เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น

อายุการใช้งาน(ปี)	$\eta = 1$			$\eta = 2$			$\eta = 3$		
	$\beta = 0.5$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 0.5$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 0.5$	$\beta = 1$	$\beta = 2$
1/12	0.9817	0.8781	0.8524	0.7989	0.7077	0.6477	0.7707	0.6170	0.4127
1/2	0.8953	0.8296	0.8092	0.7786	0.6416	0.4719	0.7524	0.5637	0.3024
1	0.7989	0.7077	0.6477	0.7524	0.5637	0.3024	0.7293	0.5045	0.2133
3/2	0.7524	0.5637	0.3024	0.7148	0.4727	0.1799	0.6968	0.4394	0.1554
2	0.6721	0.4044	0.1404	0.6538	0.3864	0.1366	0.6454	0.3802	0.1359

สรุปและอภิปรายผล

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาและสร้างฟังก์ชันความน่าเชื่อถือของระบบ RMSS โดยการนำทฤษฎีฟัซซีเซตและค่าสัมประสิทธิ์ความคลุมเครือ มาประยุกต์ใช้เพื่อสร้างตัวแบบความน่าเชื่อถือของระบบ RMSS กำหนดให้อัตราการเสียและอัตราการซ่อมแซมของระบบมีการแจกแจงแบบไวบูลล์โดยมีแนวคิดว่าในความเป็นจริงแล้วอัตราการเสียและอัตราการซ่อมแซมในแต่ละสถานะควรเปลี่ยนแปลงเมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้นโดยพิจารณาค่าพารามิเตอร์รูปร่างและค่าพารามิเตอร์ขนาดที่สัมพันธ์กับอัตราการเสียและอัตราการซ่อมแซมตามลำดับ จากผลการศึกษาพบว่าที่เวลาเดียวกันสำหรับทุก ๆ ค่า α - cut เมื่อกำหนดอัตราการเสียลดลงจะส่งผลให้ค่าความน่าเชื่อถือของ

ระบบ RMSS แบบฟัซซีมีค่าสูงกว่าเมื่อกำหนดอัตราการเสียคงที่หรือเพิ่มขึ้น สามารถสรุปผลการศึกษาได้ว่าระบบ RMSS แบบฟัซซี ซึ่งมีสาเหตุของความไม่แน่นอนมาจากเวลาที่ระบบดำเนินอยู่ หากมีอัตราการเสียในสถานะลดลงเมื่อเวลาผ่านไปนั้น จะส่งผลให้ค่าความน่าเชื่อถือของระบบสูงกว่ากรณีที่มีอัตราการเสียในสถานะคงที่หรือเพิ่มขึ้น นั่นหมายถึงหากต้องการให้ระบบ RMSS ภายใต้การแจกแจงแบบไวบูลล์เกิดความน่าเชื่อถือมากต้องมีอัตราการเสียและอัตราการซ่อมแซมแบบลดลงจึงจะเหมาะสม หากพิจารณาถึงการนำฟังก์ชันความน่าเชื่อถือของระบบ RMSS ไปประยุกต์ใช้จริง ก่อนนำข้อมูลอัตราการเสียและอัตราการซ่อมแซมมาใช้จำเป็นต้องทราบถึงพฤติกรรมของระบบว่ามีอัตราการเสียและอัตราการซ่อมแซมเป็นการแจกแจงแบบใด โดยพบว่าโดยส่วนใหญ่แล้วอัตราการเสียและอัตราการซ่อมแซมของแต่ละสถานะของระบบดังกล่าวมีพฤติกรรมเป็นการแจกแจงแบบไวบูลล์

ในการศึกษาครั้งต่อไปผู้วิจัยจะศึกษาฟังก์ชันความน่าเชื่อถือของระบบแบบหลายขั้นตอน โดยการ กำหนดให้อัตราการเสียและอัตราการซ่อมแซมของระบบมีการแจกแจงแบบอื่น หรือพิจารณาใช้กระบวนการฮิวริสติกส์มาประยุกต์ใช้เพื่อหาค่าอัตราการเสีย อัตราการซ่อมแซมที่เหมาะสมกรณี เพื่อให้ได้ความน่าเชื่อถือของระบบแบบหลายขั้นตอนที่สูงที่สุด

เอกสารอ้างอิง

[1] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. *Information Control*, *8*, 338-353.

[2] Wu, H.C. (1997). Fuzzy Reliability Analysis Based on Closed Fuzzy Numbers. *Information Sciences*, *103*, 135-159.

[3] Li, B., Zhu, M., & Xu, K. (2000). A Practical Engineering Method for Fuzzy Reliability Analysis of Mechanical Structures. *Reliability Engineering & System Safety*, *67*(3), 311-315.

[4] Kuo, W., & Zuo, M.J. (2003). *Optimal Reliability Modeling: Principles and Applications.* 1st ed. New York. John Wiley and Sons, Inc. pp. 581-592.

[5] Levitin, G., Lisnianski, A., & Ben-Haim, H. (1998). Redundancy Optimization for Series-Parallel Multi State Systems. *IEEE Transactions on Reliability*, *47*(2), 165-172.

[6] Ramirez-Marquez, J.E., & Coit, D.W. (2004). A Heuristic for Solving the Redundancy Allocation Problem for Multi-State Series-Parallel Systems. *Reliability Engineering and System Safety*, *83*(3), 341-349.

[7] Tian, Z., & Zuo, M.J. (2006). Redundancy Allocation for Multi-State Systems Using Physical Programming and Genetic Algorithms. *Reliability Engineering and System Safety*, *91*(9), 1049-1056.

[8] Liu, P.X., Zuo, M.J., & Meng, Q.H. (2003). Using Neural Network Function Approximation for Optimal Design of Continuous-State Parallel-Series Systems. *Computer Operation Research*, *30*(3), 339-352.

[9] Lisnianski, A. (2007). Extended Block Diagram Method for Multi-State System Reliability Assessment. *Reliability Engineering & System Safety*, *92*(12), 1601-1607.

[10] Tian, Z., Levitin, G., & Zuo, M.J. (2009). A Joint Reliability-Redundancy Optimization Approach for Multi-State Series-Parallel Systems. *Reliability Engineering and System Safety*, *94*, 1568-1576.

[11] Chellappan, C., & Vijayalakshmi, G. (2010). Dependability Analysis of Hybrid Redundancy Systems Using Fuzzy Approach. *International Journal of reliability, Quality and Safety Engineering*, *17*(4), 331-350.

[12] Liu, Y., & Huang, H.Z. (2010). Reliability Assessment for Fuzzy Multi-State Systems. *International Journal of Systems Science*, *41*(4), 365-379.

[13] Lisnianki, A., & Levitin, G. (2003). *Multi-State System Reliability Assessment Optimization Application.* 1st ed. Singapore. World Scientific. pp. 102-134.

[14] Bamrungsetthapong. W., & Pongpullponsak, A. (2014). Parameter Interval Estimation of System Reliability for Repairable Multistate Series-Parallel System with Fuzzy Data. *The Scientific World Journal*. Retried October 13, 2018, from https://www.hindawi.com/journals/tswj/2014/275374/

[15] Bamrungsetthapong. W., & Pongpullponsak, A. (2015). System reliability for non-repairable multi-state series-parallel system using fuzzy Bayesian inference based on prior interval probabilities. *International Journal of General Systems*, *44*(4), 442-456.

[16] Zdenek Karpısek, Petr Stepanek, & Petr Jurak. (2010). Weibull Fuzzy Probability Distribution for Reliability of Concrete Structures. *Engineering Mechanics*, *17*(5), 363-372.