# การวิเคราะห์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่มีความกระชับสูง

**ขวัญ เพียซ้าย**

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพฯ 10110
E-mail: Khawn_swu@hotmail.com

**รับบทความ: 15 กันยายน 2555 ยอมรับตีพิมพ์: 21 พฤศจิกายน 2555**

**บทคัดย่อ**

ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่ตีความหมายออกมาเป็นข้อมูลทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมากมาย เราเรียกข้อความทางคณิตศาสตร์ดังกล่าวนี้ว่า ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่มีความกระชับสูง บทความนี้ต้องการแสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อความทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย และข้อความทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน รวมทั้งการวิเคราะห์ข้อความทางคณิตศาสตร์ในเชิงของบทสนทนา

**คำสำคัญ:** ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่มีความกระชับสูง การวิเคราะห์ข้อความทางคณิตศาสตร์ การสื่อสารทางคณิตศาสตร์

# Analyzing Highly Condensed Mathematical Messages

**Khawn Piasai**

Department of Mathematics, Faculty of Science, Srinakharinwirot University, Bangkok 10110, Thailand
E-mail: Khawn_swu@hotmail.com

**Abstract**

The highly condensed mathematical messages are those interpreted by many mathematical data. In this article, examples of analysis of both simple and complex mathematical messages along with related analysis of mathematical messages in oral communication are shown.

**Keywords:** Highly condensed mathematical messages, Analysis of mathematical message, Mathematical communication

**บทนำ:**

บทความนี้สืบเนื่องมาจากผู้เขียนมีโอกาสเข้าร่วมประชุมวิชาการ The workshop and Intensive Lecture for Young Mathematics Educators in Thailand 2005 ซึ่งจัดขึ้นโดยศูนย์วิจัยคณิตศาสตรศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น เดือนพฤศจิกายน 2548 ในหัวข้อเรื่อง "Mathematical Communication" บรรยายโดย Dr. Hideyo Emori ซึ่งเป็นผู้เชี่ยวชาญทางด้านการสื่อสารทางคณิตศาสตร์จาก Gunma University ประเทศญี่ปุ่น จากการเข้าฟังการบรรยายในครั้งนั้น ผู้เขียนเห็นว่า มีหลายประเด็นที่คิดว่าเป็นข้อมูลที่เป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ดังนั้นผู้เขียนจึงขอหยิบยกบางประเด็นที่น่าสนใจมาเรียบเรียงนำเสนอในรูปของบทความเพื่อเป็นข้อมูลแก่ครู

ผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์หรือผู้ที่สนใจได้นำไปปรับใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ต่อไป

ในทศวรรษที่ 70 และ 80 มีการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามแนวคิดของกลุ่มการสร้างความรู้ด้วยตนเองโดยใช้บริบทสังคม (social constructivism) กล่าวคือ ในชั้นเรียนใช้การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนแบบร่วมมือและการเรียนแบบอภิปรายกลุ่ม ซึ่งในช่วงดังกล่าว มีงานวิจัยจำนวนมากที่ศึกษาเกี่ยวกับวิธีการจัดการเรียนแบบกลุ่มว่าการจัดกลุ่มเรียนแบบใดที่เหมาะสมที่ครูควรนำมาใช้จัดกิจกรรมการเรียนการสอนในชั้นเรียนเพื่อทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของผู้เรียนดีขึ้น การวิจัยในลักษณะดังกล่าวถูกวิพากวิจารณ์ว่า เป็นกล่องดำ (black box) เนื่องจากผู้วิจัยสนใจเพียงแค่ตัวแปรต้นที่ใช้กับกลุ่มทดลอง (ในที่นี้คือ วิธีการเรียนแบบร่วมมือและการเรียนแบบอภิปรายกลุ่ม) และตัวแปรตาม (ในที่นี้คือคะแนนที่ได้จากกลุ่มทดลอง) โดยผู้วิจัยได้ละเลยการวิเคราะห์กระบวนการสื่อสาร จึงทำให้ไม่ทราบข้อเท็จจริงว่า การสื่อสารช่วยส่งเสริมการแก้ปัญหาของเด็กแต่ละคนได้อย่างไร ในปัจจุบันนักวิจัยส่วนใหญ่ให้ความสนใจไปที่การวิเคราะห์เกี่ยวกับปฏิสัมพันธ์ทางสังคมของผู้เรียนมากกว่า โดยขาดการวิเคราะห์ที่แสดงให้เห็นว่าผู้เรียนมีการรับ – ส่ง – ตีความหมายของข้อความทางคณิตศาสตร์นี้อย่างไร

ในปัจจุบันมีการตระหนักถึงการใช้ประโยชน์ของวิชาคณิตศาสตร์ในศาสตร์แขนงอื่นๆ เพิ่มมากขึ้น ทำให้การเป็นผู้ที่มีทักษะและความสามารถในการนำเสนอ อธิบาย และสื่อสารแนวความคิดทางคณิตศาสตร์ที่กระชับและถูกต้องเป็นเรื่องที่สำคัญ ดังนั้นคณิตศาสตร์จึงถูกมองเป็นภาษาอย่างหนึ่งในฐานะที่ต้องมีกิจกรรมเกี่ยวข้องกับฟัง พูด อ่าน และเขียน ซึ่งทักษะเหล่านี้เป็นทักษะที่มีความสำคัญอย่างมากในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (Pugalee, 2004)

สเคมป์ (Skemp, 1982) กล่าวว่า การสื่อสารประกอบด้วยการกระทำ 2 อย่างคู่กัน คือ การส่งข้อความ และการรับข้อความ ซึ่งข้อความทางคณิตศาสตร์นั้นตัวข้อความเองไม่ได้สื่อความหมายใดเลย แต่การที่ตัวบุคคลกำลังทำความเข้าใจและตีความหมายของข้อความนั้นจะทำให้สื่อถึงข้อมูลบางอย่างที่เป็นรูปธรรมมากขึ้น

สำหรับบทความนี้ผู้เขียนขอนำเสนอตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อความทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายและการวิเคราะห์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน รวมทั้งการวิเคราะห์ข้อความทางคณิตศาสตร์ในเชิงของบทสนทนา ดังรายละเอียดต่อไปนี้

**การวิเคราะห์ข้อความทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย**

ในที่นี้เป็นการวิเคราะห์ข้อความทางคณิตศาสตร์ซึ่งถูกตีความหมายออกมาในแง่ของโครงสร้างเชิงลึกและโครงสร้างอย่างง่าย เพื่อให้เกิดความสะดวกในที่นี้ จึงกำหนดให้โครงสร้างอย่างง่ายแทนด้วยตัวอักษร S ส่วนโครงสร้างเชิงลึกแทนด้วยตัวอักษร D ให้พิจารณาข้อความทางคณิตศาสตร์ต่อไปนี้ คือ “572”

ที่ระดับ S เป็นการมอง “572” เป็นเพียงแค่ตัวเลข 3 ตัวที่เรียงกันอย่างง่าย

ที่ระดับ D เป็นการมองลึกกว่าระดับ S กล่าวคือ

(1) มีจำนวน 3 จำนวน คือ 5 7 2

(2) สิบยกกำลังมี 3 จำนวน คือ $10^2$ $10^1$ $10^0$

(3) ดำเนินการด้วยการคูณด้วยตำแหน่งของตัวเลขที่ค่าประจำตำแหน่งเดียวกัน โดยเรียงลำดับจากซ้ายไปขวาจะได้ว่า $5 \times 10^2$ $7 \times 10^1$ $2 \times 10^0$

(4) นำจำนวนทั้งสามในข้อ (3) มาบวกกันจะได้ $(5 \times 10^2) + (7 \times 10^1) + (2 \times 10^0)$

ข้างต้นเป็นตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อความทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย แต่ในกรณีที่ข้อความทางคณิตศาสตร์มีความซับซ้อนมากขึ้น แนวคิดในการวิเคราะห์ดังกล่าวอาจไม่เพียงพอในการทำความเข้าใจข้อความทางคณิตศาสตร์ที่ให้มา เนื่องจากบางครั้งมีการพบข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับข้อความทางคณิตศาสตร์ แต่ไม่สัมพันธ์กับร่องรอยหรือความหมายเดิมของข้อความทางคณิตศาสตร์

**การวิเคราะห์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน**

ตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อน เช่น

“จงแก้อสมการ $\log_a(2x - 4)^2 > 2\log_a(x + 1)$ โดยที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$” .....(1)

ความเข้าใจข้อความทางคณิตศาสตร์ดังกล่าว นอกจากจะต้องรู้ความสัมพันธ์ระหว่างสัญลักษณ์แล้ว ต้องเข้าใจความหมายของสัญลักษณ์ด้วย สำหรับการแก้ปัญหานี้ต้องแปลงนิพจน์ที่กำหนดมาให้โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับสมบัติของลอการิทึมซึ่งทำให้ได้นิพจน์ใหม่ดังนี้ $\log_a(2x - 4)^2 > \log_a(x + 1)^2$

โดยที่ $(2x-4)^2 > 0$, $(x+1) > 0$ ทำให้ได้ว่า $x \neq 2$ และ $x > -1$ นอกจากนี้จะต้องรู้จักสมบัติของลอการิทึมที่ว่า

ถ้า $a > 1$ และ $\log_a A > \log_a B$ แล้ว $A > B$

ถ้า $a < 1$ และ $\log_a A > \log_a B$ แล้ว $A < B$

นอกจากนี้หลังจากการแปลงนิพจน์ $2\log_a (x+1)$ เป็นนิพจน์ $\log_a (x+1)^2$ เมื่อพิจารณาอย่างรอบคอบ จะพบว่านิพจน์ $2\log_a (x+1)$ ไม่เท่ากับนิพจน์ $\log_a (x+1)^2$ เนื่องจากนิพจน์ $2\log_a (x+1)$ มีเงื่อนสำคัญคือ $x > -1$ แต่นิพจน์ $\log_a (x+1)^2$ มีเงื่อนสำคัญคือ $x \neq -1$

จากที่กล่าวมาข้างต้น สามารถเขียนข้อความทางคณิตศาสตร์ในรูปของอสมการดังกล่าวได้ 2 อสมการโดยแบ่งเป็น 2 กรณีดังนี้

$$\text{กรณีที่ } a > 1 \text{ แล้ว} \begin{cases} (2x-4)^2 > (x+1)^2 \\ (2x-4)^2 > 0 \\ (x+1) > 0 \end{cases} \quad \text{กรณีที่ } 0 < a < 1 \text{ แล้ว} \begin{cases} (2x-4)^2 > (x+1)^2 \\ (2x-4)^2 < 0 \\ (x+1) < 0 \end{cases} \quad \text{.....(2)}$$

และจากข้อความ (2) สามารถเขียนข้อความทางคณิตศาสตร์ในรูปของคำตอบได้เป็น

$$\begin{cases} \text{ถ้า } a > 1 \text{ แล้ว} & -1 < x < 1 \text{ และ } x > 5 \\ \text{ถ้า } 0 < a < 1 \text{ แล้ว} & 1 < x < 2 \text{ และ } 2 < x < 5 \end{cases} \quad \text{.....(3)}$$

จากการเปรียบเทียบข้อความทางคณิตศาสตร์ทั้งสามข้อความข้างต้น ได้แก่ ข้อความ (1), (2) และ (3) สรุปได้ว่าข้อความ (1) สามารถตีความหมายออกมาเป็นข้อมูลทางคณิตศาสตร์มากกว่าข้อความ (2) และข้อความ (3) และข้อความ (1) เป็นข้อความทางคณิตศาสตร์ที่สั้นกว่า (2) และข้อความ (3) ขณะเดียวกันข้อความ (1) ยังเป็นการรวมข้อมูลทางคณิตศาสตร์ของข้อความ (2) และข้อความ (3) ไว้ด้วยกัน ในลักษณะนี้กล่าวได้ว่าข้อความ (1) เป็นข้อความทางคณิตศาสตร์ที่มีความกระชับสูง

**การวิเคราะห์ข้อความทางคณิตศาสตร์ในเชิงของบทสนทนา**

หัวข้อข้างต้นเป็นการวิเคราะห์ข้อความทางคณิตศาสตร์โดยอาศัยความรู้เรื่องสมบัติบางประการทางคณิตศาสตร์และความเข้าใจสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในเชิงของบทสนทนา

พิจารณาสถานการณ์ของการสนทนากันของครู 3 คน คือ ครู A ครู B และครู C ซึ่งสนทนากันเกี่ยวกับเรื่องการออกข้อสอบดังนี้

A : คุณคิดอย่างไรกับโจทย์ปัญหาข้อต่อไปนี้ที่จะนำมาใช้เป็นข้อสอบ

"จงพิสูจน์อสมการนี้ $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$"

B : ปัญหาข้อนี้เราเพียงแค่พิสูจน์โดยเขียนให้อยู่ในรูปผลรวมของกำลังสองสมบูรณ์ใช่หรือไม่? มันง่ายเกินไปมั้ง ฉันเสนอให้นักเรียนพิสูจน์ว่าสมการ 3 สมการที่กำหนดให้ คือ $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$ และ $cx^2 + 2ax + b = 0$ เมื่อ $a$ , $b$ , $c$ เป็นจำนวนจริง ต้องมีอย่างน้อย 1 สมการที่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง ซึ่งฉันคิดว่าน่าจะดีกว่า

C : ใช่แค่คุณหาตัวกำหนด (discriminants) ออกมาแล้วนำตัวกำหนดมาบวกกันใช่หรือเปล่า?

A : ผลรวมของตัวกำหนด ?????

**การวิเคราะห์บทสนทนา**

เริ่มการวิเคราะห์ข้อความ

**ข้อความ A1** : คุณคิดอย่างไรกับโจทย์ปัญหาข้อต่อไปนี้ที่จะนำมาใช้เป็นข้อสอบ

"จงพิสูจน์อสมการนี้ $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$"

จากข้อความ A1 ครู A คาดหวังว่า ครู B และครู C ยังคงจำเอกลักษณ์ทางพีชคณิตที่ว่า นี้ $2[a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca] = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ ได้ และจากเอกลักษณ์นี้ครู A หวังว่า จะทำให้ครู B และครู C เข้าใจโครงสร้างของโจทย์ปัญหาข้อนี้

**ข้อความ B1** : โจทย์ปัญหาข้อนี้เราเพียงแค่พิสูจน์โดยเขียนให้อยู่ในรูปผลรวมของกำลังสองสมบูรณ์ใช่หรือไม่? มันง่ายเกินไปมั้ง

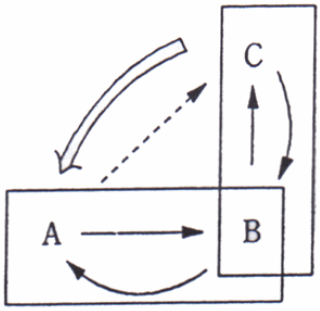
จากข้อความ B1 ครู B บอกว่าโจทย์ปัญหาที่ครู A เสนอขึ้นมานั้นง่าย

**ข้อความ B2** : ฉันเสนอว่า ลองให้นักเรียนพิสูจน์ว่าสมการ 3 สมการที่กำหนดให้ คือ $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$ และ $cx^2 + 2ax + b = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง ต้องมีอย่างน้อย 1 สมการที่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง ซึ่งฉันคิดว่าน่าจะดีกว่า

จากข้อความ B2 ตอนแรกทราบโดยง่ายว่าครู B แนะนำโจทย์ปัญหาใหม่ แต่เป็นการยากที่จะรู้ว่าทำไมครู B แนะนำโจทย์ปัญหานั้น และยังสงสัยอยู่ว่าครู B คาดหวังอะไรเป็นพิเศษกับครู A และครู C

**ข้อความ C** : ใช่แค่คุณหาตัวกำหนดออกมาแล้วนำตัวกำหนดมาบวกกันใช่หรือเปล่า?

จากบทสนทนาที่กล่าวมาจะพบว่าข้อความที่ครู B พูดเป็นการให้ข้อมูลย้อนกลับ (feedback) ไปที่ครู A และข้อความที่ครู C พูดเป็นการให้ข้อมูลย้อนกลับไปที่ครู B ข้อความทั้งหลายเหล่านี้ได้ถูกเชื่อมต่อกันเป็นลูกโซ่ (chains) เพราะฉะนั้นข้อความที่ครู C พูดจะมีผลต่อครู A ซึ่งลักษณะดังกล่าวนี้แสดงให้เห็นถึงการเชื่อมต่อกันเป็นลูกโซ่ของการให้ข้อมูลย้อนกลับซึ่งเราเรียกว่า "ข้อมูลย้อนกลับแบบลูกโซ่ (chain feedback)" ดังภาพที่ 1




**ภาพที่ 1** ข้อมูลย้อนกลับแบบลูกโซ่

**ข้อความ A2** : ผลรวมของตัวกำหนด ?????

จากข้อความ A2 จากที่ครู A ได้รับข้อมูลจากที่ครู C พูด ลักษณะดังกล่าวนี้ถือว่าเป็นข้อมูลย้อนกลับแบบลูกโซ่และครู A ได้นำคำพูดที่ครู C ได้บอกเป็นนัยมาใช้แก้โจทย์แก้ ปัญหาซึ่งครู B ได้ให้ครู A แต่ครู A ไม่สามารถหาคำตอบได้อย่างทันทีทันใด

ในการสนทนานั้นจะต้องเข้าใจเจตนาหรือความมุ่งหมายของผู้พูดอย่างรวดเร็ว ถ้ามีใครคนใดคนหนึ่งล้มเหลวในเรื่องระหว่างการสนทนา ผลที่ได้อาจทำให้เกิดการสื่อสารที่ผิดพลาดขึ้น

ย้อนกลับไปที่ข้อความที่ครู C พูดว่า "ผลรวมของตัวกำหนด ????? " ก็เป็นคำสำคัญคำหนึ่งที่จะใช้เป็นแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหา และในขณะเดียวกันคำสำคัญที่ครู C พูดขึ้นเป็นการให้ข้อมูลย้อนกลับมาที่ครู B ด้วย และเมื่อครู B ได้รับข้อมูลจากที่ครู C พูดทำให้ครู B ทราบทันทีว่าครู C เข้าใจเจตนาของครู B โดยมุ่งไปที่คำสำคัญดังกล่าว ในที่นี้จะคำนวณหาตัวกำหนดของสมการ 3 สมการ คือ $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$ และ $cx^2 + 2ax + b = 0$ และถ้ารวมตัวกำหนดของแต่ละสมการ แล้วหารด้วย 4 จะได้ $(b^2 - ac) + (c^2 - ab) + (a^2 - bc)$ ซึ่งเท่ากับนิพจน์ทางด้านซ้ายมือของอสมการ $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$ จากเอกลักษณ์ทางพีชคณิตที่ว่า $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$ และจากความรู้ที่ว่า ตัวกำหนดเป็นจำนวนลบไม่ได้ทำให้ได้ว่ามีอย่างน้อย 1 สมการใน 3 สมการดังกล่าวจะต้องมีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง

จากบทสนทนาข้างต้นครู B ยังขาดความชัดเจนในโจทย์ปัญหาที่เขาได้เสนอ แต่ครู C เองเข้าใจว่าทำไมครู B ถึงเสนอโจทย์ปัญหานั้น และครู C ยังสามารถสร้างความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ระหว่างโจทย์ปัญหาของครู A และโจทย์ปัญหาของครู B ที่เสนอ และเมื่อครู B ได้ยินข้อเสนอของครู C ทำให้ครู B เข้าใจทันที ซึ่งจริงๆ แล้วครู C เข้าใจว่าครู B ต้องการสื่ออะไร กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือว่าครู A ไม่เข้าใจ ความตั้งใจหรือเจตนาของครู B ครู A เขียนผลรวมของตัวกำหนดและต่อมาก็ได้พูดว่าคำถามทั้งสองแสดงด้วยอสมการเดียวกัน และครู A ก็เข้าใจการพิสูจน์อสมการ $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$

บทสนทนาข้างต้นอาจจะเข้าใจยาก ถ้าจะให้ง่ายขึ้นอาจมีการแสดงการพิสูจน์โจทย์ปัญหาที่ครู B เสนอ และการพิสูจน์นั้นต้องเขียนให้ถูกต้องตามหลักคณิตศาสตร์ และแต่ละข้อความที่แปลงเป็นนิพจน์ใหม่จะต้องบอกได้ว่ามาได้อย่างไร นี้แหละคือการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ที่แท้จริง

## บทสรุป

ถ้าเปรียบข้อความทางคณิตศาสตร์เหมือนกับลูกฟุตบอล การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก็เหมือนกับการรับส่งลูกบอลกลับไปกลับมาระหว่างผู้ส่งและผู้รับ ซึ่งข้อความทางคณิตศาสตร์มีความหมายในตัวของมันเองอยู่แล้ว แต่ถ้าพิจารณาแต่ละข้อความทางคณิตศาสตร์ในฐานะที่เป็นข้อความที่มีความกระชับสูง การรับข้อความทางคณิตศาสตร์นั้นไม่ได้หมายความว่า ผู้รับจะได้รับข้อมูลตามเจตนาของผู้ส่งด้วย (NCTM, 2000) ดังนั้นประสบการณ์ของผู้รับข้อความทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่สำคัญที่จะช่วยให้สามารถตีความหมายของข้อความทางคณิตศาสตร์ได้ตรงกับเจตนาของผู้ส่ง เพราะฉะนั้นครูต้องสนับสนุนให้ผู้เรียนพยายามฝึกตีความหมายของข้อความทาง

คณิตศาสตร์ที่มีความกระชับสูงในชั้นเรียน ซึ่งสิ่งเหล่านี้ครูสามารถสร้างให้เกิดขึ้นได้จากการเร้าด้วยสิ่งแวดล้อมที่อยู่รอบตัวของผู้เรียน (Brahier, 2000) ยูซิสคิน (Usiskin, 1996) กล่าวว่า การสื่อสารเป็นสิ่งจำเป็นที่จะทำให้เกิดความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์ ดังนั้นความสามารถในการตีความหมายของข้อความทางคณิตศาสตร์เป็นคุณสมบัติที่จำเป็นอย่างหนึ่งสำหรับผู้ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ได้ดี

**เอกสารอ้างอิง**


Brahier, D. J. (2000). **Teaching secondary and middle school mathematics**. Boston: Allyn & Bacon.

Emori, H. (2005). ***The workshop and intensive lecture for young mathematics education in Thailand 2005***. Khon Kaen: Khon Kaen University.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: Author.

Pugalee, D. K. (2004). A comparison of verbal and written descriptions of students' problem solving processes. **Educational Studies in Mathematics** 55(1/3): 27 – 47.

Skemp, R. R. (1982). Communicating mathematics: surface structures and deep structures. ***Visible Language*** 16(3): 281 – 288.

Usiskin, Z. (1996). **Mathematics as a language. In *Communication in Mathematics: K-12 and Beyond 1996 Yearbook*** (Elliott, P.C., & Kenney, M.J. (eds.)) Reston, VA: NCTM.