การให้เหตุผลเชิงสัดส่วน

ขวัญ เพียซ้าย[1*] และภิญญาพันธ์ ร่วมชาติ[2]

[1]ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร 10110
[2]ภาควิชาจิตวิทยา คณะมนุษยศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร 10110
*E-mail: Khawn_swu@hotmail.com

รับบทความ: 23 กุมภาพันธ์ 2554 ยอมรับตีพิมพ์: 6 พฤษภาคม 2554

บทคัดย่อ

การให้เหตุผลเชิงสัดส่วนเป็นเรื่องที่สำคัญ เพราะว่าเนื้อหาของหลายๆ วิชาโดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ล้วนมีความเชื่อมโยงและใช้แนวคิดของเรื่องดังกล่าว นอกจากนี้การให้เหตุผลเชิงสัดส่วนนี้ยังเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวัน รวมทั้งถูกนำไปประยุกต์ใช้กับศาสตร์หลายๆ สาขา เช่น สถาปัตยกรรม ศิลปะ ดนตรี วิศวกรรมศาสตร์ และอีกทั้งบนโลกของเรามีปรากฏการณ์หลายๆ อย่างที่ดำเนินการไปตามกฎของสัดส่วน ดังนั้นการพัฒนาผู้เรียนให้มีความสามารถทางด้านการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนนับว่าเป็นสิ่งจำเป็นอย่างยิ่ง องค์ประกอบหนึ่งที่มีอิทธิพลต่อการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงสัดส่วน คือ โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการให้เหตุผลเชิงสัดส่วน รวมถึงการเน้นให้ผู้เรียนคิดหายุทธวิธีที่หลากหลายในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสัดส่วน เช่น การใช้รูปภาพ การบวกเพิ่ม การใช้อัตราต่อหนึ่งหน่วย การเปลี่ยนตัวประกอบ หรือการคูณไขว้ ทั้งนี้เมื่อเริ่มต้นสอนครูไม่ควรแนะนำวิธีการคูณไขว้แก่นักเรียนก่อน ควรให้นักเรียนได้ค้นพบวิธีดังกล่าวด้วยตนเอง ซึ่งจะทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีความหมาย

คำสำคัญ: สัดส่วน การให้เหตุผลเชิงสัดส่วน ความสามารถทางด้านการให้เหตุผลเชิงสัดส่วน

Proportional Reasoning

Khwan Piasai[1*] and Pinyapan Roamchart[2]

[1]Department of Mathematics, Faculty of Science, Srinakharinwirot University, Bangkok 10110, Thailand
[2]Department of Psychology, Faculty of Humanities, Srinakharinwirot University, Bangkok 10110, Thailand
*E-mail: Khawn_swu@hot mail.com

Abstract

Proportional reasoning is important because the contents in several subjects are linked and used its concepts, particularly in mathematics and science. In addition, it is linked to way of life and applied with many disciplinary. For example, architecture, art, music, engineering and the world have events concerning the process of proportional rules. The students' development to have proportional reasoning ability is also essential. One factor that has an influence on the development of proportional reasoning ability is proportional reasoning problem including the teacher focuses on the students' thinking about various strategies in solving the proportional reasoning problem, for instance, pictorial, building up, unit rate, factors of change or cross products. When the teachers start teaching, they

should not suggest student cross products strategy before the students' discovery by themselves to effect on their meaningful learning occurrence.

Keyword: proportion, proportional reasoning, proportional reasoning ability

บทนำ:

ผู้ที่เคยเรียนวิชาคณิตศาสตร์มาแล้วในชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น คงทราบนิยามของสัดส่วนว่าคือประโยคที่แสดงการเท่ากันของสองอัตราส่วน นั่นคือ a/b = c/d แม้ผู้คนส่วนใหญ่ไม่ได้ตระหนักถึงนิยามของสัดส่วน แต่ก็สามารถใช้สัดส่วนแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่คุ้นเคยได้ นอกจากนี้มีการใช้สัดส่วนอย่างแพร่หลายโดยเฉพาะในเนื้อหาวิชาวิทยาศาสตร์ เช่น ความหนาแน่น ความเข้มข้น ความดัน โมเมนตัม งานและพลังงาน คานสมดุล ความเร็ว ความเร่ง และอัตราการเจริญเติบโต เป็นต้น แม้ว่าเรื่องสัดส่วนจะสำคัญในวิชาวิทยาศาสตร์และวิชาคณิตศาสตร์ แต่เรื่องสัดส่วนนั้นก็เป็นสิ่งที่เข้าใจยาก สำหรับเด็กและผู้ใหญ่

มีการศึกษาเรื่องการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนมามากกว่า 90 ปี ในปี ค.ศ. 1913 มีรายงานเรื่องสัดส่วนที่เกี่ยวกับเลขคณิต ซึ่งศึกษากับกลุ่มนักเรียนชั้นประถมศึกษากลุ่มเล็กๆ กลุ่มหนึ่ง (Winch, 1913 cited in Singh, 1998) ค.ศ. 1951 มีการศึกษาเรื่องการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนที่เกี่ยวข้องกับเรื่องความน่าจะเป็น (Piaget and Inhelder, 1951 cited in Noelting, 1980) และ ค.ศ. 1955 มีการศึกษาเรื่องการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนที่เกี่ยวข้องกับกฎทางฟิสิกส์เรื่องคานสมดุล พบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนจะปรากฏเมื่อพัฒนาการทางสติปัญญาเข้าสู่ขั้นคิดปฏิบัติการแบบนามธรรม ซึ่งอยู่ในช่วงอายุ 11 – 15 ปี (Lesh. et al., 1988)

ความหมายและความสำคัญของการให้เหตุผลเชิงสัดส่วน

สัดส่วน และการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนเป็นคำที่มีความเกี่ยวข้องกันอย่างใกล้ชิด คำว่า สัดส่วน กล่าวถึงในลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์ที่สามารถเขียนได้ในรูปของการเท่ากันของสองอัตราส่วน ส่วนคำว่า การให้เหตุผลเชิงสัดส่วน หมายถึง ความสามารถทางด้านคณิตศาสตร์ของบุคคลในการคิดแยกแยะสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับสัดส่วนและสถานการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกับสัดส่วน รวมทั้งความสามารถในการแก้สถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าที่หายไปและการเปรียบเทียบอัตราส่วน (Lanius and Williams, 2003)

ในอีกมุมมองที่คล้ายกันการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนเกี่ยวข้องกับการตระหนักถึงปัญหาที่เกี่ยวข้องกับสัดส่วนและปัญหาที่ไม่เกี่ยวข้องกับสัดส่วน และเกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาเชิงปริมาณที่เกี่ยวข้องกับสัดส่วนของบุคคล เช่น ปัญหาการเปรียบเทียบ หรือปัญหาการหาค่าที่หายไป เป็นต้น (de la Cruz, 2008) ดังนั้นสรุปได้ว่า การให้เหตุผลเชิงสัดส่วนเป็นความสามารถในการคิดแยกแยะหรือตระหนักถึงสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับสัดส่วนและสถานการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกับสัดส่วน และความสามารถในการหาค่าที่หายไป รวมทั้งความสามารถในการเปรียบเทียบอัตราส่วนของบุคคล

บนโลกของเรามีปรากฏการณ์หลายๆ อย่างที่ดำเนินการไปตามกฎของสัดส่วน (proportional rule) ดังนั้นการพัฒนาผู้เรียนให้เกิดความสามารถทางด้านการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนนับว่าเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการอธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ ที่เกิดขึ้นในโลก (Cramer et al., 1993) โดยทั่วไปแล้วการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนถือว่าเป็นองค์ประกอบที่สำคัญอันหนึ่งของการคิดอย่างเป็นแบบแผนในเด็กวัยรุ่น และความล้มเหลวในการพัฒนาเนื้อหาเกี่ยวกับเรื่องนี้ในระยะแรกๆ ของเกรด 6 – 8 จะไปทำให้เกิดการยับยั้งการเรียนรู้ในหลายๆ สาขาวิชาที่ต้องมีการคิดในเชิงปริมาณเข้ามาเกี่ยวข้อง เช่น ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา เศรษฐศาสตร์ หรือสถิติ รวมทั้งพีชคณิตและเรขาคณิตด้วย (Hoffer, 1988)

หนังสือมาตรฐานหลักสูตรและการประเมินผลคณิตศาสตร์ในโรงเรียน (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics) ที่ออกโดยสภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM. 1989) ซึ่งมีจุดประสงค์เพื่อปรับปรุงคุณภาพการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ตั้งแต่อนุบาลถึงเกรด 12 โดยในส่วนของเกรด 5 – 8 ได้กล่าวถึงความสำคัญของการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนไว้ว่า "ความสามารถทางด้านการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนควรจะพัฒนาผู้เรียนในช่วงเกรด 5 – 8 นับว่าเป็นเรื่องที่สำคัญยิ่งที่ความสามารถทางด้านการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนสมควรจะได้รับการพิจารณาทั้งในแง่ของเวลาและความพยายามเพื่อให้มั่นใจได้ว่าความสามารถ

อันนี้ถูกพัฒนาด้วยความระมัดระวัง นักเรียนหลายคนจะต้องพบกับสถานการณ์ปัญหาที่หลากหลายที่นำมาสร้างเป็นแบบจำลองแล้วแก้ปัญหานั้นผ่านการให้เหตุผลเชิงสัดส่วน" ต่อมาในปี ค.ศ. 2000 สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000) ได้ออกหนังสือหลักการและมาตรฐานคณิตศาสตร์ในโรงเรียน (Principles and Standards for School Mathematics) โดยเสนอให้การให้เหตุผลเชิงสัดส่วนเป็นสาระสำคัญในการบูรณาการเนื้อหาต่างๆ ในวิชาคณิตศาสตร์ของเกรด 6 – 8 ซึ่งมีหลายๆ เนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับสัดส่วน ได้แก่ อัตราส่วน สัดส่วน ร้อยละ ความคล้าย มาตราส่วน สมการเชิงเส้น ความชัน ความถี่สัมพัทธ์ ฮิทโทแกรม และความน่าจะเป็น นอกจากนี้นำไปประยุกต์ใช้กับศาสตร์สาขาอื่นๆ เช่น วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ สถาปัตยกรรม ศิลปะ หรือดนตรี เป็นต้น

ประเภทโจทย์ปัญหาของการให้เหตุผลเชิงสัดส่วน

ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนไม่ใช่เป็นเรื่องที่จะพัฒนากันให้เกิดขึ้นได้ในช่วงระยะเวลาเวลาใดเวลาหนึ่ง หากแต่ความสามารถดังกล่าวผู้เรียนต้องสร้างกระบวนการคิดด้วยตนเอง ซึ่งกระบวนการคิดดังกล่าวเกิดจากการสั่งสมประสบการณ์ที่หลากหลายรูปแบบโดยอาศัยระยะเวลาอันยาวนาน องค์ประกอบหนึ่งที่มีอิทธิผลต่อการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงสัดส่วน คือ โจทย์ปัญหาของการให้เหตุผลเชิงสัดส่วน

โจทย์ปัญหาของการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนแบ่งเป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ ได้แก่ โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าที่หายไป (missing value problem) และโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบ (comparison problem) (Karplus. et al., 1983) โดยโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าที่หายไป โจทย์จะกำหนดข้อมูลที่เป็นจำนวนมาให้พร้อมกับความสัมพันธ์ของจำนวน แล้วให้ผู้เรียนหาค่าของจำนวนที่โจทย์ต้องการหา ส่วนโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบ โจทย์จะกำหนดอัตราส่วนสองอัตราส่วนมาให้ แล้วให้ผู้เรียนตรวจสอบว่าอัตราส่วนสองอัตราส่วนเป็นอัตราส่วนเดียวกันหรือไม่ โดยใช้วิธีการคำนวณจากข้อมูลดังตาราง 1 แสดงตัวอย่างของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าที่หายไปและโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบ

ตาราง 1 ตัวอย่างโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าที่หายไปและโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบ (Karplus et al., 1983)

ประเภทของโจทย์ปัญหา	ตัวอย่าง
การหาค่าที่หายไป	รถยนต์คันหนึ่งวิ่งมาด้วยอัตราเร็ว 175 กิโลเมตร ต่อ 3 ชั่วโมง ณ อัตราเร็วเดียวกันนี้ ถ้ารถยนต์คันดังกล่าววิ่งมาได้เป็นเวลา 12 ชั่วโมง โดยไม่หยุด ถามว่ารถยนต์คันนี้วิ่งได้เป็นระยะทางกี่กิโลเมตร
การเปรียบเทียบ	รถยนต์ A วิ่งมาด้วยอัตราเร็ว 180 กิโลเมตร ต่อ 3 ชั่วโมง ส่วนรถยนต์ B วิ่งมาด้วยอัตราเร็ว 400 กิโลเมตร ต่อ 7 ชั่วโมง ถามว่ารถยนต์คันไหนวิ่งเร็วกว่ากัน

จากโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบข้างต้นสามารถแบ่งย่อยได้อีกเป็น 2 ประเภท ได้แก่ โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบเชิงตัวเลข (numerical comparison problem) และโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบเชิงคุณภาพ (qualitative comparison problem) (Cramer and Post, 1993) โดยลักษณะของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบเชิงคุณภาพ โจทย์ไม่ได้กำหนดข้อมูลที่เป็นตัวเลขมาให้ แต่จะกำหนดข้อมูลเป็นเชิงคุณภาพมาให้ ซึ่งจะมีคำว่า เร็วกว่า ช้ากว่า มากกว่า น้อยกว่า เท่าเดิม เข้มข้นน้อยกว่า หรือเข้มข้นมากกว่าปรากฏอยู่ในประโยค ตัวอย่างโจทย์ปัญหา เช่น แมรี่และเกรทได้มาวิ่งเล่นรอบสนาม ปรากฏว่าแมรี่วิ่งได้จำนวนรอบมากกว่าเกรท แต่แมรี่ใช้เวลาในการวิ่งน้อยกว่าเกรท ถามว่าใครวิ่งเร็วกว่ากัน นอกจากนี้ได้มีการวางกรอบงานอย่างกว้างๆ ในการจำแนกโจทย์ปัญหาของการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนออกเป็นประเภทต่างๆ ซึ่งผู้เรียนต้องเรียนรู้ และลงมือแก้โจทย์ปัญหาเหล่านั้น ซึ่งแบ่งเป็น 4 ประเภทใหญ่ๆ ได้แก่ โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการวัดที่พบได้ในชีวิตประจำวัน (Well – Known Measures) โจทย์ปัญหาที่มีลักษณะเป็น ส่วนย่อย – ส่วนย่อย – ส่วนทั้งหมด (Part – Part – Whole) โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับกลุ่มที่นำมาสัมพันธ์กัน (Associated Sets) และโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงขนาด (Growth) (Lamon, 1993) ซึ่งโจทย์ปัญหาแต่

ละประเภทมีรายละเอียดดังนี้ โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการวัดที่พบได้ในชีวิตประจำวันเป็นโจทย์ปัญหาที่แสดงความสัมพันธ์ของสองปริมาณที่เราสนใจ ที่เรารู้จักกันดี เช่น ความเร็ว ซึ่งเป็นอัตราส่วนของไมล์ต่อชั่วโมง เป็นต้น ส่วนโจทย์ปัญหาที่มีลักษณะเป็น ส่วนย่อย – ส่วนย่อย – ส่วนทั้งหมด เป็นการนำส่วนย่อยซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของส่วนทั้งหมดมาเปรียบเทียบกับส่วนเติมเต็มของมันเอง เช่น การเปรียบจำนวนเด็กผู้หญิงกับเด็กผู้ชาย หรือการเปรียบเทียบจำนวนคำตอบที่ถูกกับจำนวนคำตอบที่ผิด หรือการเปรียบเทียบส่วนย่อยกับส่วนทั้งหมดเช่น เด็กผู้ชาย 12 คนจากนักเรียน 20 คน หรือคำตอบถูกต้อง 80 ข้อจากคำถาม 100 ข้อ เป็นต้น ส่วนโจทย์ปัญหากลุ่มที่นำมาสัมพันธ์กันจะกล่าวถึงปริมาณ 2 ปริมาณที่สัมพันธ์กัน ซึ่งโดยปกติแล้ว ปริมาณทั้ง 2 ไม่ได้มีความสัมพันธ์กัน เช่น คนกับพิซซ่า หรือคุกกี้กับกล่อง เป็นต้น และโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงขนาดเป็นโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการขยายส่วนและการย่อส่วน ซึ่งปริมาณที่ให้มาต้องเป็นปริมาณที่ต่อเนื่อง เช่น ความสูง ความยาว ความกว้าง ตัวอย่างของโจทย์ปัญหาแต่ละประเภทแสดงดังตาราง 2

ตาราง 2 ตัวอย่างโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการวัดที่พบได้ในชีวิตประจำวัน โจทย์ปัญหาที่มีลักษณะเป็นส่วนย่อย – ส่วนย่อย – ส่วนทั้งหมด โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับกลุ่มที่นำมาสัมพันธ์กัน และโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงขนาด (Lamon, 1993)

ประเภทของโจทย์ปัญหา	ตัวอย่าง
ปัญหาเกี่ยวกับการวัดที่พบได้ในชีวิตประจำวัน	โทมัสขับรถได้เป็นระยะทาง 156 ไมล์ ใช้น้ำมันไปทั้งหมด 6 แกลลอน ถ้ารถของโทมัสใช้น้ำมันในอัตรานี้ ถามว่าถ้าเขาใช้น้ำมัน 21 แกลลอน รถของเขาจะขับไปได้ไกลถึง 561 ไมล์หรือไม่
ปัญหาที่มีลักษณะเป็น ส่วนย่อย – ส่วนย่อย – ส่วนทั้งหมด	ครูโจนส์แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 5 คน โดยที่แต่ละกลุ่มนั้นต้องมีนักเรียนหญิง 3 คน ถ้าในห้องเรียนของครูโจนส์มีจำนวนนักเรียนทั้งหมด 25 คน อยากทราบว่า ในชั้นเรียนนั้นมีนักเรียนหญิงกี่คน และนักเรียนชายกี่คน
ปัญหาเกี่ยวกับกลุ่มที่นำมาสัมพันธ์กัน	เอลเลน จิม และสตีฟ ซื้อลูกโป่ง 3 ลูกในราคา 2 ดอลลาร์ พวกเขาตัดสินใจจะกลับไปที่ร้านอีกครั้ง และซื้อลูกโป่งให้พอกับจำนวนของนักเรียนในชั้น พวกเขาจะต้องจ่ายเงินเท่าไหร่เพื่อซื้อลูกโป่ง 24 ลูก
ปัญหาเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงขนาด	รูปขนาด 6 x 8 นิ้วใบหนึ่งถูกอัดขยายให้ใหญ่จนด้านยาวมีความยาวเพิ่มขึ้นจาก 8 นิ้ว เป็น 12 นิ้ว อยากทราบว่าด้านกว้างของรูปที่ขยายใหม่นี้จะยาวเท่าไร ถึงจะได้สัดส่วนกันพอดี

ยุทธวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการให้เหตุผลเชิงสัดส่วน

ปัจจุบันหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของมัธยมศึกษา ถ้าพิจารณายุทธวิธีที่ใช้แก้ปัญหาเรื่องอัตราส่วนและสัดส่วน พบว่า บางครั้งแต่ละยุทธวิธีก็อยู่อย่างกระจัดกระจายไม่ได้ถูกรวบรวมไว้อย่างเป็นหมวดหมู่และไม่ได้แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ในแต่ละยุทธวิธีอย่างชัดเจน ยุทธวิธีในหนังสือแบบเรียนส่วนใหญ่ที่ใช้แก้ปัญหาเรื่องอัตราส่วนและสัดส่วน คือ การคูณไขว้ ซึ่งไม่ใช่เฉพาะในหนังสือเท่านั้น ครูผู้สอนเองส่วนใหญ่ก็ใช้การคูณไขว้สอนนักเรียน Lesh et al., 1988) เชื่อว่า การใช้วิธีการคูณไขว้ในการแก้ปัญหาเพื่อเป็นตัวบ่งชี้ถึงความสามารถในการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนยังมีข้อจำกัดอยู่มาก เพราะว่าคำตอบที่นักเรียนได้จากการแก้ปัญหาโดยใช้วิธีการคูณไขว้นั้นนักเรียนได้มาจากขั้นตอนวิธีการล้วนๆ (purely algorithm) และเป็นไปได้ที่ว่านักเรียนอาจใช้วิธีการท่องจำขั้นตอนในการหาคำตอบ และจากการวิจัยพวกเขาได้สรุปผลเสียที่เกิดจากการใช้วิธีการคูณไขว้ไว้ 3 ข้อ คือ 1) ทำให้ผู้เรียนขาดความเข้าใจแนวคิดพื้นฐานเรื่องของสัดส่วน 2) ทำให้ผู้เรียนขาดการสร้างวิธีการคิดแก้ปัญหาอย่างเป็นธรรมชาติ และ 3) ทำให้ผู้เรียนหลีกเลี่ยงการให้เหตุผลเชิงสัดส่วน

มีการศึกษาและรวบรวมเอกสารและงานวิจัยเกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลเชิงสัดส่วน โดยในส่วนของยุทธวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้แบ่งเป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ คือ

ยุทธวิธีการคูณ และยุทธวิธีการบวก (Tourniaire and Pulos, 1985) ซึ่งมีรายละเอียดดังตาราง 3 พิจารณาโจทย์ปัญหาต่อไปนี้ประกอบ "ร้านค้าแห่งหนึ่งขายลูกกวาด 2 ชิ้นในราคา 4 เซนต์ ถ้าต้องการซื้อลูกกวาด 8 ชิ้นจะต้องจ่ายเงินเท่าใด"

ตาราง 3 ตัวอย่างยุทธวิธีการคูณ และยุทธวิธีการบวก (Tourniaire and Pulos, 1985)

ยุทธวิธี	ตัวอย่าง
การคูณ	เพราะว่าลูกกวาด 2 ชิ้นราคา 4 บาท ต้องการลูกกวาด 8 ชิ้นซึ่งมีจำนวนเป็นสี่เท่าของลูกกวาด 2 ชิ้น ดังนั้นลูกกวาด 8 ชิ้น มีราคาเท่ากับ 4 x 4 = 16 บาท
การบวก	เพราะว่าลูกกวาด 2 ชิ้น ราคา 4 บาท ดังนั้นลูกกวาด 4 ชิ้นราคา 8 บาท ลูกกวาด 6 ชิ้นราคา 12 บาท และลูกกวาด 8 ชิ้นราคา 16 บาท

นอกจากสองยุทธวิธีดังกล่าวแล้ว ยังมีการแบ่งยุทธวิธีการแก้ปัญหาเกี่ยวกับสัดส่วนออกเป็น 5 ยุทธวิธี (Ruchti, 2005) ได้แก่ 1) การใช้รูปภาพ 2) การบวกเพิ่ม 3) การใช้อัตราต่อหนึ่งหน่วย 4) การเปลี่ยนตัวประกอบ และ 5) การคูณไขว้ แต่ละยุทธวิธีแสดงดังตาราง 4 พิจารณาโจทย์-ปัญหาต่อไปนี้ประกอบตัวอย่างในตาราง 4

"ณ ค่ายพักแรมลูกเสือแห่งหนึ่ง เต็นท์ที่ใช้นอนสำหรับลูกเสือ 2 เต้นจะนอนได้ 4 คน ถ้าค่ายพักแรมเตรียมเต็นท์ไว้ทั้งหมด 12 เต็นท์ จะมีลูกเสือมาค่ายพักแรมแห่งนี้ทั้งหมดจำนวนกี่คน"

จากยุทธวิธีที่กล่าวข้างต้น มีงานวิจัยได้ศึกษาการใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาเกี่ยวสัดส่วน ซึ่งมี 4 ยุทธวิธีหลักๆ ที่สำคัญได้แก่ การบวกเพิ่ม การใช้อัตราต่อหนึ่งหน่วย การเปลี่ยนตัวประกอบ การคูณไขว้

ตาราง 4 ตัวอย่างยุทธวิธีการใช้รูปภาพ ยุทธวิธีการบวกเพิ่ม ยุทธวิธีการใช้อัตราต่อหนึ่งหน่วย ยุทธวิธีการเปลี่ยนตัวประกอบ และยุทธวิธีการคูณไขว้ (Ruchti, 2005)

ยุทธวิธี	ตัวอย่าง
การใช้รูปภาพ (pictorial)	△△ △△ △△ △△ △△ △△ ○○ ○○ ○○ ○○ ○○ ○○ ○○ ○○ ○○ ○○ ○○ ○○
การบวกเพิ่ม (building up)	เพราะว่า 2 เต็นท์นอนได้ 4 คน ดังนั้น ถ้าเต็นท์ 12 เต็นท์ จะนอนได้ 4 คน + 4 คน + 4 คน + 4 คน + 4 คน + 4 คน = 24 คน
การใช้อัตราต่อหนึ่งหน่วย (unit rate)	จากโจทย์ปัญหาที่กล่าวว่า "เต็นท์ที่ใช้นอนสำหรับลูกเสือ 2 เต็นท์จะนอนได้ 4 คน" เขียนเป็นอัตราได้เป็น 2 เต็นท์ ต่อ 4 คน หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า 4/2 คน ต่อ 1 เต็นท์ ตัวประกอบคงตัว (constant factor) ในที่นี้คือ 4/2 ที่บรรยายในลักษณะจำนวนของคนต่อหนึ่งเต็นท์ เราจะเรียกอัตราดังกล่าวนี้ว่า อัตราต่อหนึ่งหน่วย (unit rate) จากโจทย์ปัญหาดังกล่าว เราสามารถหาคำตอบได้เป็น (4/2)×12 = 24
การเปลี่ยนตัวประกอบ (factors of change)	การใช้วิธีการเปลี่ยนตัวประกอบเป็นการค้นหาว่า "เป็นกี่เท่า" เช่น จากโจทย์ปัญหาข้างต้น เนื่องจากเต็นท์จำนวน 12 เต็นท์ เป็น 6 เท่าของเต็นท์จำนวน 2 เต็นท์ ดังนั้นจำนวนลูกเสือจะต้องเป็น 6 เท่าด้วย คำตอบที่ได้คือ 6 x 4 = 24 คน ในการใช้วิธีการดังกล่าวนี้ ถ้าตัวประกอบไม่ใช่จำนวนเต็ม วิธีการนี้อาจจะไม่เหมาะสมที่จะใช้ในการแก้ปัญหา
การคูณไขว้ (cross products)	$\frac{2}{4}=\frac{12}{x} \Rightarrow 2\cdot x=12\cdot 4 \Rightarrow x=\frac{12\cdot 4}{2} \Rightarrow x=24$

งานวิจัยที่กล่าวถึงยุทธวิธีการบวกเพิ่ม

ยุทธวิธีการบวกเพิ่มหรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า ยุทธวิธีก่อนการใช้การคูณ (pre-multiplicative Strategy) (Harel and Behr, 1995) เป็นยุทธวิธีหนึ่งที่ใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับสัดส่วน ซึ่งพบว่า ยุทธวิธีดังกล่าวนี้มีการใช้กันบ่อยในเด็กระดับประถมศึกษา ซึ่งมีการใช้ถึงร้อยละ 30 ของจำนวนเด็กที่ศึกษาในเกรด 3 ถึงเกรด 5 โดยเฉพาะอย่างยิ่งในเด็กที่ศึกษาในเกรด 3 มีการใช้ยุทธวิธีการบวกเพิ่มถึงร้อยละ 50 ของจำนวนเด็กเกรด 3 ทั้งหมด (Tourniaire, 1986) มีการตั้งข้อสังเกตว่าเด็กยังคงใช้ยุทธวิธีการบวกเพิ่มต่อไป แม้ว่าเด็กจะอายุมากขึ้นก็ตาม (Ruchti, 2005) การใช้ยุทธวิธีการบวกเพิ่มนี้เป็นก้าวแรกที่จะมุ่งไปสู่การให้เหตุผลในเชิงการคูณสำหรับการแก้ปัญหาเกี่ยวกับสัดส่วน เพราะว่าการคูณก็คือการบวกซ้ำนั่นเอง (Parker, 1999)

งานวิจัยที่กล่าวถึงยุทธวิธีการใช้อัตราต่อหนึ่งหน่วย

จากงานวิจัยที่กล่าวถึงยุทธวิธีการบวกเพิ่มเราทราบว่าเด็กในระดับประถมศึกษาส่วนใหญ่ยังใช้ยุทธวิธีการบวกเพิ่มอยู่ เมื่อพวกเขาโตขึ้นอีกอายุหนึ่ง พวกเขาอาจเปลี่ยนยุทธวิธี ซึ่งมียุทธวิธีหนึ่งที่พวกเขานำมาใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับสัดส่วน นั้นคือ ยุทธวิธีการใช้อัตราต่อหนึ่งหน่วย (Bezuk, 1988; Cramer et al., 1993; Lamon, 1993) จากการให้นักเรียนเกรด 6 แก้ปัญหาเกี่ยวกับสัดส่วน พบว่า ร้อยละ 96 ของจำนวนนักเรียนเกรด 6 ใช้ยุทธวิธีอัตราต่อหนึ่งหน่วย (Lamon, 1993) มีการวิเคราะห์ยุทธวิธีที่นักเรียนเกรด 7 และเกรด 8 จำนวน 900 คน ใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับสัดส่วน พบว่า ยุทธวิธีที่นักเรียนใช้แล้วส่วนใหญ่ได้คำตอบถูกต้อง คือ ยุทธวิธีอัตราต่อหนึ่งหน่วย (Cramer et al., 1993) นอกจากนี้ยุทธวิธีดังกล่าวนี้ยังเป็นยุทธวิธีที่นิยมใช้ทั้ง นักศึกษาครูและครูประจำการ (Bezuk, 1988)

งานวิจัยที่กล่าวถึงยุทธวิธีการเปลี่ยนตัวประกอบ

ครูหลายคนที่ใช้ยุทธวิธีการเปลี่ยนตัวประกอบซึ่งเหมาะกับโจทย์ปัญหาที่มีอัตราส่วนที่เป็นจำนวนเต็ม สมาชิกที่สมนัยกันระหว่างอัตราส่วนแรกกับอัตราส่วนที่สองต้องมีความสัมพันธ์เชิงการคูณ นั่นคือ สมาชิกตัวหนึ่งเป็นพหุคูณของสมาชิกอีกตัวหนึ่ง (Bezuk. 1988) สำหรับความเข้าใจถึงยุทธวิธีการเปลี่ยนตัวประกอบจะทำให้นักเรียนได้รู้ว่าทำไมถึงใช้วิธีการคูณไขว้ในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสัดส่วน เพราะฉะนั้นจึงเสนอว่าก่อนจะแนะนำวิธีการคูณไขว้ควรให้นักเรียนได้พัฒนาและรู้จักใช้ยุทธวิธีการเปลี่ยนตัวประกอบก่อน ต่อไปเมื่อจะสอนโดยใช้วิธีการคูณไขว้ควรแนะนำในลักษณะที่ให้เห็นถึงความเชื่อมโยงกับยุทธวิธีการเปลี่ยนตัวประกอบ (Boston et al., 2003)

งานวิจัยที่กล่าวถึงยุทธวิธีการคูณไขว้

ยุทธวิธีการคูณไขว้เป็นยุทธวิธีที่ถูกนำมาใช้สอนแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสัดส่วนมากที่สุด อย่างไรก็ตาม มีหลายยุทธวิธีเหมือนกันที่นำไปใช้แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสัดส่วน ซึ่งบางครั้งก็เป็นยุทธวิธีที่คิดขึ้นเอาเองในใจ (intuitive) ยุทธวิธีการคูณไขว้เป็นยุทธวิธีที่เน้นขั้นตอนวิธีการมากกว่าเข้าความใจ และถ้าเป็นไปได้ผู้เรียนต้องรู้จักใช้หลายๆ ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับสัดส่วน ไม่ควรเน้นไปที่การใช้ยุทธวิธีการคูณไขว้เพียงอย่างเดียว (Lanius and Williams, 2003) นักเรียนที่ไม่รู้จักการใช้ยุทธวิธีการคูณไขว้ควรให้เขาได้ค้นพบยุทธวิธีดังกล่าวด้วยตัวเขาเอง ซึ่งการที่ครูไปแนะนำยุทธวิธีการคูณไขว้ก่อนอาจจะทำให้มีผลกระทบต่อการให้เหตุผลเชิงสัดส่วน นอกจากนี้เมื่อนักเรียนรู้จักยุทธวิธีการคูณไขว้แล้วจะส่งผลทำให้ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสัดส่วนลดลงด้วย ถึงแม้ว่าการคูณไขว้จะเป็นยุทธวิธีที่ใช้แก้ปัญหาได้ก็ตาม แต่บ่อยครั้งที่พบว่านักเรียนเอาไปใช้แก้ปัญหาโดยขาดความรอบคอบและความเข้าใจอย่างแท้จริง เพราะฉะนั้นควรให้นักเรียนได้เข้าใจความหมายของสัดส่วนก่อนที่จะสอนโดยใช้ยุทธวิธีการคูณไขว้ (Fleener et al., 1993)

แนวทางในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงสัดส่วน

มีนักคณิตศาสตรศึกษาหลายท่าน เช่น Karplus et al. (1983) Lamon (1993) Lo and Watanabe (1997) Noelting (1980) และ Lesh et al. (1988) ได้ศึกษาเรื่องการให้เหตุผลเชิงสัดส่วน แล้วได้เสนอแนวทางในการพัฒนาความสามารถให้เหตุผลเชิงสัดส่วน ดังต่อไปนี้

1. จัดเตรียมกิจกรรมที่เกี่ยวกับอัตราส่วนและสัดส่วนในบริบทที่หลากหลาย กิจกรรมที่หลากหลายเหล่านี้ควรมีสถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการวัด เรขาคณิต การซื้อขายสินค้า หรืออัตราในลักษณะต่างๆ ที่พบเห็นได้ชีวิตประจำวัน

2. สนับสนุนให้มีการอภิปรายแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับการพยากรณ์ และการเปรียบเทียบอัตราส่วน ฝึกให้นักเรียนแยกแยะระหว่างสถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับสัดส่วนและสถานการณ์ปัญหาที่ไม่เกี่ยวข้องกับสัดส่วน โดยการยกตัวอย่างสถานการณ์แต่ละสถานการณ์ประกอบแล้วให้นักเรียนได้อภิปรายแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับสถานการณ์ทั้งสอง

3. เปิดโอกาสให้นักเรียนได้เผชิญกับกระบวนการที่เกิดขึ้นในสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับสัดส่วน มีงานวิจัยจำนวนมากที่แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีการใช้อัตราต่อหนึ่งหน่วยในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับสัดส่วนและการเปรียบเทียบอัตราส่วน โดยเฉพาะนักเรียนเกรด 7 – 9 แม้ว่านักเรียนเหล่านี้จะเคยเรียนวิธีการคูณไขว้มาแล้วก็ตาม

4. การสอนที่มุ่งไปที่การใช้ขั้นตอนวิธีการในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับสัดส่วน เช่น การใช้วิธีการคูณไขว้จะทำให้นักเรียนไม่เกิดการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงสัดส่วน และไม่ควรนำมาใช้สอนจนกว่าครูแน่ใจว่านักเรียนมีประสบการณ์มากพอที่ทำให้พวกเขาเข้าใจเรื่องสัดส่วนได้ดี พร้อมกับมีแนวคิดในการแก้ปัญหาที่หลากหลายเกี่ยวกับสัดส่วน

มีความคิดเห็นเกี่ยวกับการเรียนการสอนเรื่องการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนไว้ว่า ตำราเรียนส่วนใหญ่ที่ใช้กันอยู่ทั่วไปมักเน้นไปที่การพัฒนาทักษะทางกระบวนการมากกว่าความเข้าใจในแนวคิด นอกจากนี้ในตำราเรียนยังได้กล่าวถึงการหาคำตอบโดยใช้วิธีการคูณไขว้เร็วเกินไป โดยไม่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ลองหาวิธีแก้ปัญหาด้วยตนเองก่อน ซึ่งอาจจะใช้รูปภาพ หรือสื่อสัมผัสเป็นสิ่งที่ช่วยในการทำความเข้าใจปัญหา หรือกล่าวได้ว่า การเริ่มต้นสอนเพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนจะต้องเริ่มจากสถานการณ์ปัญหาที่ผู้เรียนสามารถมองเห็นเป็นรูปธรรมได้ ซึ่งอาจจะใช้รูปภาพ หรือสื่อสัมผัสช่วยประกอบในการสอน จนไปสู่สถานการณ์ปัญหาที่มีความซับซ้อนซึ่งต้องใช้เทคนิคหรือยุทธวิธีต่าง ๆ มาช่วยในการแก้ปัญหา สำหรับการส่งเสริมหรือช่วยให้ผู้เรียนเกิดแนวคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ปัญหาซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงของปริมาณสองปริมาณที่สัมพันธ์กันในเชิงสัดส่วนนั้น ผู้สอนจะต้องแนะนำให้ผู้เรียนรู้จักคิดแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่เกี่ยวกับการเปรียบเทียบเชิงคุณภาพก่อนที่จะแนะนำให้ผู้เรียนคิดแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่เกี่ยวกับการเปรียบเทียบเชิงตัวเลขหรือคิดแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าที่หายไป และในการเริ่มต้นการสอนนั้นควรเน้นไปที่การให้เหตุผลอย่างไม่เป็นทางการก่อน จากนั้นก็ค่อยๆ พัฒนาไปสู่การให้เหตุผลที่เป็นทางการมากขึ้น โดยผู้สอนเริ่มแนะนำยุทธวิธีเกี่ยวกับการแก้ปัญหาสัดส่วน เช่น การใช้ตารางเพื่อค้นหาแบบรูปของจำนวน การใช้อัตราต่อหนึ่งหน่วย การเปลี่ยนตัวประกอบหรือการใช้ความรู้เรื่องการเท่ากันของเศษส่วน ในระยะเริ่มต้นของการพัฒนา ผู้สอนไม่ควรแนะนำวิธีการคูณไขว้ เพราะว่าจะเป็นไปการปิดกั้นโอกาสของผู้เรียนที่กำลังจะสร้างความรู้แบบไม่เป็นทางการด้วยตนเอง การใช้วิธีการคูณไขว้ในการแก้ปัญหานั้น ควรใช้หลังจากผู้เรียนเกิดความชำนาญ เข้าใจแนวคิดเรื่องสัดส่วนเป็นอย่างดีแล้ว (Langrall and Swafford, 2000)

นอกจากนี้ สภาวิจัยแห่งชาติของสหรัฐอเมริกาได้กล่าวถึงข้อสำคัญ 3 ประการที่ครูควรส่งเสริมในเรื่องการให้เหตุผลเชิงสัดส่วน (National Research Council, 2000) ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. ส่งเสริมให้นักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับการเปรียบเทียบที่ยึดหลักของการคูณมากกว่าการบวก ตัวอย่างเช่น ต้นไม้ A สูง 8 ฟุต ต้นไม้ B สูง 12 ฟุต หลังจากเวลาผ่านไป 2 ปี มาวัดต้นไม้ทั้งสองต้นอีกครั้งหนึ่ง พบว่า ต้นไม้ A วัดความสูงได้ 11 ฟุต ส่วนต้นไม้ B วัดความสูงได้ 15 ฟุต ต้นไม้ต้นใดมีการเจริญเติบเร็วกว่ากัน จากสถานการณ์ปัญหาดังกล่าวนี้มี 2 คำตอบที่ถูกต้อง กล่าวคือ ถ้ามองการเปรียบเทียบในเชิงการบวกหรือการเปรียบเทียบเชิงสมบูรณ์ (absolute comparisons) จะตอบว่า ต้นไม้ทั้งสองต้นมีการเจริญเติบเท่ากัน กล่าวคือ ต้นไม้ A สูงขึ้น 11 – 8 = 3 ฟุต ส่วนต้นไม้ B สูงขึ้น 15 – 12 = 3 ฟุต ถ้ามองการเปรียบเทียบในเชิงการคูณหรือการเปรียบเทียบเชิงสัมพัทธ์ (relative comparisons) จะตอบว่า ต้นไม้ A มีการเจริญเติบเร็วกว่า เพราะว่า ต้นไม้ A สูงขึ้น 3/8 ของความสูงเดิม ขณะที่ต้นไม้ B สูงขึ้น 3/12 ของความสูงเดิม เห็นได้ว่าคำตอบจะที่ถูกต้องหรือไม่นั้นขึ้นอยู่กับการตีความหมายของคำว่า การเจริญเติบโต ว่าจะมองการเปรียบเทียบในแง่ของเชิงการบวกหรือในแง่ของเชิงการคูณ ความสามารถในการเปรียบเทียบดังกล่าวเกี่ยวข้องกันอย่างใกล้ชิดกับการให้เหตุผลเชิงสัดส่วน

2. ส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักตระหนักถึงสถานการณ์ที่ใช้อัตราส่วนอย่างสมเหตุสมผลก่อนที่นักเรียนจะลงมือแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าที่หายไปในสัดส่วน พวกเขาต้องคิดให้ดีก่อนว่าอัตราส่วนที่ให้มามีการเปรียบเทียบอย่างเหมาะสม

หรือไม่ พิจารณาประโยคข้างล่างต่อไปนี้ว่ามีความสมเหตุสมผลหรือไม่เกี่ยวกับการใช้อัตราส่วน

1) ถ้าเด็กนักเรียนหญิงคนหนึ่งสามารถเดินไปโรงเรียนได้ในเวลา 10 นาที แล้ว นักเรียนหญิง 2 คน สามารถเดินไปโรงเรียนได้ในเวลา 20 นาที

2) ถ้าขนมกล่องหนึ่งราคา 2.80 ดอลลาร์ แล้ว ขนม 2 กล่องราคา 5.60 ดอลลาร์

3) โทมัสประดิษฐ์รถจำลองคันหนึ่งใช้เวลา 2 ชั่วโมง ดังนั้นถ้ารถจำลอง 3 คัน เขาต้องสามารถประดิษฐ์ได้ในเวลา 6 ชั่วโมง

4) ถ้าปีเตอร์ทาสีรั้วเสร็จภายในเวลา 2 วัน ดังนั้น ปีเตอร์ ทอม และเด็กอีกคนหนึ่งจะต้องพากันทาสีรั้วเสร็จภายในเวลา 6 วัน

5) ถ้าเด็กหญิงคนหนึ่งมีแมว 2 ตัว ดังนั้น เด็กหญิง 4 คนจะต้องมีแมว 8 ตัว

3. ส่งเสริมให้นักเรียนเข้าใจถึงลักษณะสำคัญของสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับสัดส่วนว่าปริมาณสองปริมาณที่ประกอบกันขึ้นเป็นอัตราส่วนซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงค่าไป พร้อมกันนั้นความสัมพันธ์ระหว่างสองปริมาณดังกล่าวยังเป็นความสัมพันธ์เดิมอยู่ไม่แปรเปลี่ยน (invariance) นั่นคือ สองปริมาณที่เปลี่ยนแปลงไปนั้นยังคงประกอบกันขึ้นเป็นอัตราส่วนเดิมอยู่ ตัวอย่างเช่น ลูกโป่ง 3 ลูกต่อเงิน 2 เหรียญเป็นความสัมพันธ์เดียวกันกับลูกโป่ง 6 ลูกต่อเงิน 4 เหรียญ จากปัญหาดังกล่าวจะพบว่า จำนวนของลูกโป่งและจำนวนเงินเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่า แต่ความสัมพันธ์เชิงการคูณระหว่างจำนวนบอลลูนและจำนวนเงินยังเป็นความสัมพันธ์เดิมอยู่

บทสรุป

การให้เหตุผลเชิงสัดส่วนถือว่าเป็นสิ่งทุกคนต้องมีความรู้ความเข้าใจ โดยเฉพาะอย่างยิ่งนักเรียนที่ศึกษาเกรด 6 ถึงเกรด 8 (ประถมศึกษาปีที่ 6 – มัธยมศึกษาปีที่ 2) เพราะว่าการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับสูงขึ้นหรือวิทยาศาสตร์หลายๆ แขนง เช่น ฟิสิกส์ เคมี ล้วนต้องอาศัยความเข้าใจเกี่ยวกับแนวคิดเรื่องสัดส่วนเป็นพื้นฐานทั้งสิ้น ในทางตรงกันข้ามถ้านักเรียนเกรด 6 ถึงเกรด 8 ขาดความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องสัดส่วน หรือในระยะแรกๆ เกิดความล้มเหลวในการพัฒนา อาจทำให้เกิดการไปยับยั้งการเรียนรู้ในหลายๆ สาขาวิชาที่ต้องมีการคิดในเชิงปริมาณเข้ามาเกี่ยวข้อง เช่น ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา เศรษฐศาสตร์ หรือสถิติ รวมทั้งพีชคณิตและเรขาคณิตด้วย ส่วนความสำคัญในแง่ของการจัดหลักสูตร การจัดหลักสูตรคณิตศาสตร์ควรยึดเรื่องดังกล่าวนี้เป็นแกนของหลักสูตร เนื่องจากหลายๆ เนื้อหา เช่น อัตราส่วน สัดส่วน ร้อยละ ความคล้าย มาตราส่วน สมการเชิงเส้น ความชัน ความถี่สัมพัทธ์ ฮิทโทแกรม และความน่าจะเป็น พบว่า มีความเชื่อมโยงกับเรื่องสัดส่วนทั้งนั้น

การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงสัดส่วน เริ่มต้นครูควรใช้วิธีการสอนที่เน้นให้นักเรียนหาวิธีการแก้ปัญหาที่อยู่บนพื้นฐานของการคิดของตนเองก่อน ส่วนการใช้วิธีการคูณไขว้จะมีความหมายหรือเป็นประโยชน์แก่ผู้เรียนเมื่อผู้เรียนได้ค้นพบวิธีการดังกล่าวด้วยตนเองจากการได้ฝึกแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสัดส่วน แต่การใช้วิธีการคูณไขว้จะเกิดผลเสียถ้าผู้เรียนขาดความเข้าใจที่เพียงพอในการนำไปใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับสัดส่วน ผู้สอนควรมีการนำเสนอสถานการณ์ที่เกี่ยวกับสัดส่วนในรูปแบบที่หลากหลาย เช่น มีการใช้ตาราง กราฟ ทั้งนี้เพื่อให้ผู้เรียนได้คิดเกี่ยวกับปริมาณและได้เห็นความเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่สัมพันธ์กันในเชิงสัดส่วน นอกจากนี้เพื่อให้ผู้เรียนได้ขยายความเข้าใจเพิ่มขึ้น ผู้สอนควรส่งเสริมให้ผู้เรียนรู้จักการแยกแยะระหว่างสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับสัดส่วนและสถานการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกับสัดส่วน ในส่วนของตัวโจทย์หรือสถานการณ์ปัญหานั้น ผู้สอนควรให้ผู้เรียนได้เผชิญกับปัญหาที่เกี่ยวข้องกับสัดส่วนในหลายๆ บริบทผ่านสถานการณ์ในชีวิตประจำวัน เช่น ปัญหาเกี่ยวกับการใช้มาตราส่วนของแผนที่เพื่อหาระยะทางจริง ปัญหาการเปรียบเทียบอัตราเร็วของนักวิ่งสองคนว่าใครวิ่งเร็วกว่ากัน ปัญหาเกี่ยวกับการซื้อของว่าควรจะตัดสินใจเลือกซื้อของที่มีราคาต่อหน่วยเท่าใดถึงจะซื้อได้ถูกที่สุด เป็นต้น นอกจากสถานการณ์ปัญหาในชีวิตประจำวันแล้ว นักเรียนในเกรด 6 – 8 ควรได้สำรวจสถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวข้องสัดส่วนในวิชาคณิตศาสตร์ด้วย เช่น ความคล้ายของรูปเรขาคณิต อัตราส่วนตรีโกณมิติ ความน่าจะเป็น ร้อยละ ความชัน ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นรอบวงและเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม เป็นต้น และในส่วนยุทธวิธีแก้ปัญหาผู้สอนควรช่วยให้ผู้เรียนเกิดมุมมองในการแก้ปัญหาหลายๆ มุมมอง และควรใช้ยุทธวิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา เช่น การบวกเพิ่ม การใช้อัตราต่อหนึ่งหน่วย การเปลี่ยนตัวประกอบ การใช้ความรู้เรื่องการเท่ากันของสัดส่วน การใช้ตาราง หรือการใช้รูปภาพ เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

Bezuk, N. (1988). Type of Numeric Ratio on Strategies Used by Preservice and Inservice Elementary Teachers on Proportional Reasoning Word Problems. **Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** 22(8): 72-78.

Boston, M. D., Smith, M.S., and Hillen, A.F. (2003). Building on Students' Intuitive Strategies to Make Sense of Cross Multiplication. **Mathematics Teaching in the Middle School.** Reston, VA: NCTM.

Cramer, K. A., and Post, T. R. (1993). Making connection: A case of proportionality. **Arithmetic Teacher** 60(6): 342-346.

Cramer, K. A., Currier, S. and Post, T. R. (1993). Learning and Teaching Ratio and Proportion: Research Implications. In **Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics**, edited by Douglas Owens. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics and Macmillan.

de la Cruz, J.A. (2008). **A look at middle school mathematics teachers' instruction related to proportional reasoning: A cognitively guided perspective.** Doctoral Dissertation. Virginia: University of Virginia.

Fleener, M. J., Westbrook, S. L., and Rogers, L. (1993). Why are we doing math in science? : Integrating mathematics and science curricula. **Paper presentation at the Annual Meeting of the National Science Teacher Association (NSTA)**, MO: Kansas City.

Harel, G., and Behr, M. (1995). Teachers' solutions for multiplicative problems. **Hiroshima J. Math. Educ.** 3: 31-51.

Hoffer, A. R. (1988). Ratios and Proportional Thinking. In **Teaching Mathematics in Grades K–8: Research Based Methods.** Boston: Allyn and Bacon.

Karplus, R., Pulos, S., and Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on rate Problems. **Educ. Studies Math**.14: 219-233.

Lamon, S.J. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. **J. Res. Math. Educ.** 24(1): 41-46.

Langrall, C. W., and Swafford, J. O. (2000). Three balloons for two dollars: Developing proportional reasoning. **Math. Teach. Middle School** 6: 254-261.

Lanius, C. S., and Williams, S. E. (2003). Proportionality: A Unifying Theme for the Middle Grades. **Mathematics Teaching in the Middle School** Reston, VA: NCTM.

Lesh, R., Post, T. R., and Behr, M. (1988). **Proportional reasoning, Number Concepts and Operations in the Middle Grades.** Reston, VA: NCTM.

Lo, J. J., and Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. **J. Res. Math. Educ.** 28(2): 216-236.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). **Curriculum and evaluation standards for school mathematics.** Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). **Principles and Standards for School Mathematics.** Reston, VA: NCTM.

National Research Council. (2000). **Adding it up: Helping children learn mathematics.** Washington, DC: National Academies Press.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part1 Differentiation of stages. **Educ. Studies Math.** 11: 217-253.

Parker, M. (1999). Building on 'Building-up': Proportional reasoning activities for future teachers. **Math. Teachi. Middle School** 4(5): 286-289.

Ruchti, W. P. (2005). **Middle school students' use of pictorial models and discourse in the development and assessment of proportional reasoning.** Doctoral Dissertation. Idaho: University of Idaho.

Singh, P. (1998). **Understanding the Concepts of Proportion and Ratio among Students in Malaysia.** Doctoral Dissertation. Florida: The Florida State University.

Tourniaire, F. (1986). Proportion in elementary school. **Educ. Studies Math.** 17(4): 401-412.

Tourniaire, F., and Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. **Educ. Studies Math.** 16: 181-204.