ความผิดพลาดในการแก้ปัญหาโจทย์ เรื่อง ลิมิต ในวิชาแคลคูลัสของนิสิตระดับปริญญาตรี

ขวัญ เพียซ้าย

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วัฒนา กรุงเทพฯ 10110
E-mail: Khawn_swu@hotmail.com

รับบทความ: 12 เมษายน 2556 ยอมรับตีพิมพ์: 2 พฤษภาคม 2556

บทคัดย่อ

นิสิตหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิตและหลักสูตรการศึกษาบัณฑิต คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ต้องเรียนวิชาแคลคูลัสเป็นรายวิชาบังคับและลิมิตเป็นหัวข้อหนึ่งในวิชาแคลคูลัส จากการสอบถามนิสิตเบื้องต้นเกี่ยวกับการเรียน เรื่อง ลิมิต นิสิตบางส่วนมีความเห็นว่า ลิมิตเป็นเรื่องที่ยากเพราะต้องใช้ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบของพหุนามและบางส่วนไม่ชอบเรื่องลิมิต เนื่องจากต้องใช้ทักษะการคำนวณและต้องจำสูตร รวมถึงไม่เห็นประโยชน์ในการนำเรื่องลิมิตไปใช้ในชีวิตประจำวัน จากนั้นวิเคราะห์ความผิดพลาดของนิสิตที่เกิดจากการแก้ปัญหาโจทย์เรื่องลิมิตของฟังก์ชันเศษส่วนเมื่อลิมิตของตัวเศษและตัวส่วนเท่ากับศูนย์ พบว่า ความผิดพลาดในการแก้ปัญหาโจทย์เรื่องลิมิตในข้อสอบของนิสิตมี 5 ลักษณะ

คำสำคัญ: ลิมิต แคลคูลัส ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

Mistake on Solving Problems of Limit in the Calculus for Undergraduates

Khawn Piasai

Department of Mathematics, Faculty of Science, Srinakharinwirot University, Wattana, Bangkok 10110, Thailand
E-mail: Khawn_swu@hotmail.com

Abstract

Students of Bachelor Degree of Science (B.Sc.) and Bachelor Degree of Education (B.Ed.) of Faculty of Science, Srinakharinwirot University, have to learn Calculus, a required course, and the Limit is one topic of this subject. From undergraduates' preliminary interviewing on learning the Limit, some students commented that Limit is a difficult topic because it had to use the basic concepts of factoring of polynomials. Some students did not like the Limit because it had to use the calculation skills and remember formulas. In addition, they did not see the use of Limit in their everyday life. From analyzing of students' mistake on solving problems in Limit of rational function when the limits of numerator and denominator equal to zero, the finding revealed that 5-type mistake in the Limit were found in the students' paper exam.

Keywords: Limit, Calculus, Mistake

บทนำ:

แนวคิดของแคลคูลัส (Calculus) ถือกำเนิดมาจากความพยายามในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต (Geometry) ซึ่งใช้เวลานับพันปีในการหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งและการหาพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง จนถึงศตวรรษที่ 14 ยังไม่มีนักคณิตศาสตร์ท่านใดสามารถแก้ปัญหาเหล่านี้ได้ และยังมีปัญหาเรื่องอื่น ๆ เกิดขึ้น เช่น ปัญหาเกี่ยวกับการหาความเร็ว ณ ขณะเวลาหนึ่งในการเคลื่อนที่ของวัตถุที่อัตราเร็วไม่คงที่ ผู้ที่ได้รับการยอมรับว่า เกิดแนวคิดเรื่องแคลคูลัสก่อนใครในศตวรรษที่ 17 ประมาณปี ค.ศ. 1667 คือ เซอร์ไอแซก นิวตัน (Sir Isaac Newton, ค.ศ. 1643–1727) เป็นนักฟิสิกส์ชาวอังกฤษสนใจเรื่องคณิตศาสตร์ของการเคลื่อนที่ ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา กฎเกณฑ์ของการเปลี่ยนแปลงนี้เอง ทำให้เป็นที่มาของแคลคูลัสในเรื่องอนุพันธ์ (Derivatives) และอินทิกรัล (Integral)

ในขณะเวลาเดียวกันมีนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันชื่อ กอทท์ฟรีด วิลเฮล์ม ไลบ์นิทซ์ (Gottfried Wilhelm Leibnitz, ค.ศ. 1646–1716) ได้เกิดแนวคิดในลักษณะเดียวกัน และมีการแลกเปลี่ยนทัศนะกันอย่างต่อเนื่อง จนสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยใช้อนุพันธ์ช่วยในการหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งและความเร็ว และใช้อินทิกรัลช่วยในการหาพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งและสมการการเคลื่อนที่ได้ (วัฒนา เถาว์ทิพย์, 2554)

การจัดการเรียนการสอนในระดับอุดมศึกษานั้นมุ่งให้ผู้เรียนเสริมสร้างความรู้ ความสามารถเฉพาะสาขาวิชา ในมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ นิสิตชั้นปีที่ 1 ที่ศึกษาในหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิตและหลักสูตรการศึกษาบัณฑิต เช่น สาขาวิชาคณิตศาสตร์ เคมี ฟิสิกส์ ชีววิทยา วิทยาศาสตร์ทั่วไป จำเป็นต้องเรียนวิชาแคลคูลัส ซึ่งมีชื่อตามหลักสูตรที่มหาวิทยาลัยกำหนด คือ วิชาคณิตศาสตร์ 1 รหัสวิชา คณ 111 โดยในคำอธิบายรายวิชานิสิตจะต้องศึกษาเกี่ยวกับเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์ การอินทิเกรตฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรและการประยุกต์ (คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2555; วิชาญ ลิ่วกีรติยุตกุล, 2547)

จากคำอธิบายรายวิชาจะพบว่าลิมิตเป็นหัวข้อหนึ่งในแคลคูลัสที่นิสิตต้องศึกษา ด้วยประสบการณ์สอนวิชาแคลคูลัสเป็นระยะเวลา 3 ปี พบลักษณะความผิดพลาดที่เกิดจากการแก้ปัญหาเกี่ยวกับลิมิตของนิสิตซึ่งมีความผิดพลาดในหลาย ๆ ลักษณะแตกต่างกันออกไป เช่น การแยกตัวประกอบพหุนามผิด หรือเมื่อค่าลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\left(\frac{0}{0}\right)$ นิสิตไม่ได้แยกตัวประกอบของพหุนาม แต่นิสิตหาค่าลิมิตด้วยการแทนจำนวนจริง a ลงในฟังก์ชัน f(x) และจากการสอบถามนิสิตเบื้องต้นเกี่ยวกับการเรียนเรื่องลิมิตในวิชาแคลคูลัส ทราบว่า นิสิตบางส่วนมีความเห็นว่า ลิมิตเป็นเรื่องที่ยาก เนื่องจากต้องใช้ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบของพหุนามและบางส่วนไม่ชอบเรื่องลิมิต เนื่องจากต้องใช้ทักษะการคำนวณและต้องจำสูตร รวมทั้งไม่เห็นประโยชน์ในการนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน

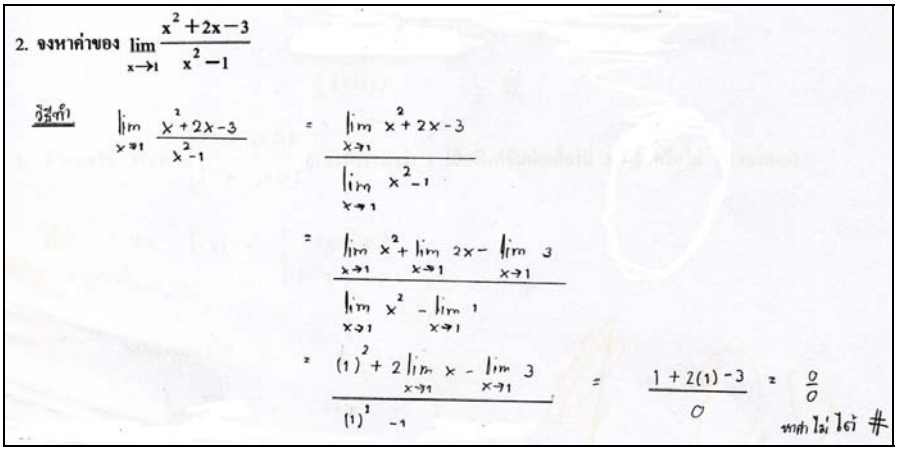
ขอบเขตของเนื้อหาเรื่องลิมิตที่นิสิตเกิดความผิดพลาดจะกล่าวถึงเฉพาะเนื้อหาเกี่ยวกับการหาลิมิตของฟังก์ชันเศษส่วนเมื่อลิมิตของตัวเศษและตัวส่วนเท่ากับศูนย์ หรือการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อลิมิตของ p(x) และ q(x) เท่ากับ 0 ขณะที่ $x \to a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง และ p(x) และ q(x) เป็นฟังก์ชันพหุนาม โดยทั่วไปการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ดังกล่าวไม่สามารถใช้ทฤษฎีบทของลิมิตช่วยในการหาค่าได้ เนื่องจากค่าลิมิตที่ได้ไม่ใช่จำนวนจริงหรือค่าลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\left(\frac{0}{0}\right)$ วิธีการหนึ่งในการหาค่าลิมิตดังกล่าวอาจใช้หลักความรู้ทางพีชคณิต เช่น การแยกตัวประกอบของพหุนามในรูป $x^2 + bx + c$ หรือการแยกตัวประกอบของพหุนามในรูป $x^2 - a^2$ หรือใช้วิธีคูณทั้งตัวเศษและตัวส่วนด้วยจำนวนเดียวกันที่ไม่เป็นศูนย์ (กมล เอกไทยเจริญ, 2537; Lee, 2006; Neuhauser, 2000; Smith and Minton, 2007)

บทความนี้ได้วิเคราะห์ความผิดพลาดในการแก้ปัญหาโจทย์เรื่องลิมิตของฟังก์ชันเศษส่วนของนิสิตที่ใช้วิธีการแยกตัวประกอบพหุนามในรูป $x^2 + bx + c$ และใช้การแยกตัวประกอบของพหุนามในรูป $x^2 - a^2$ ซึ่งแบ่งได้ 5 ลักษณะ ดังนี้

ลักษณะที่ 1

เป็นความผิดพลาดที่เกิดจากความเข้าใจคลาดเคลื่อนในการแก้ปัญหาโจทย์เรื่องลิมิต เมื่อค่าลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\left(\frac{0}{0}\right)$ นิสิตไม่ได้แยกตัวประกอบของพหุนาม แต่นิสิตหาค่าของลิมิตด้วยการแทน x ด้วยจำนวนจริง a (ภาพที่ 1) และจากบรรทัดที่ 4 ในภาพที่ 1 นิสิตไม่ได้ตระหนักว่าเมื่อค่าลิมิตให้ผลออกมาในรูป $\frac{0}{0}$ นิสิตจะต้องใช้หลักการทางคณิตศาสตร์อย่างไรบ้าง เช่น การแยกตัวประกอบ เพื่อเปลี่ยนรูป

ของฟังก์ชันไม่ให้อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ แต่นิสิตตอบว่า $\frac{0}{0}$ คือ หาค่าไม่ได้ จากการวิเคราะห์มีความเป็นไปได้ที่นิสิตแยกตัวประกอบทั้งตัวเศษและตัวส่วนไม่เป็นหรืออาจจะแยกตัวประกอบเป็นแต่ขาดความตระหนักถึงค่าลิมิต อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\left(\frac{0}{0}\right)$ วิธีทำที่ถูกต้องแสดงในภาพที่ 2



2. จงหาค่าของ $\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

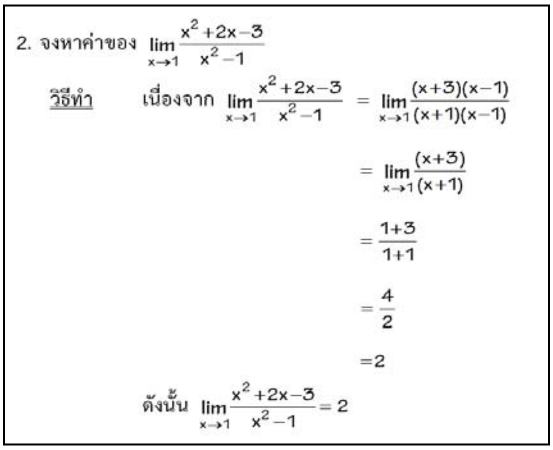
วิธีทำ $\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \frac{\lim_{x\to1} x^2+2x-3}{\lim_{x\to1} x^2-1}$

$= \frac{\lim_{x\to1}x^2+\lim_{x\to1}2x-\lim_{x\to1}3}{\lim_{x\to1}x^2-\lim_{x\to1}1}$

$= \frac{(1)^2+2\lim_{x\to1}x-\lim_{x\to1}3}{(1)^2-1} = \frac{1+2(1)-3}{0} = \frac{0}{0}$

หาค่าไม่ได้ #

ภาพที่ 1 ตัวอย่างความผิดพลาดลักษณะที่ 1 เกิดจากความเข้าใจคลาดเคลื่อน



2. จงหาค่าของ $\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$= \lim_{x\to1}\frac{(x+3)}{(x+1)}$

$= \frac{1+3}{1+1}$

$= \frac{4}{2}$

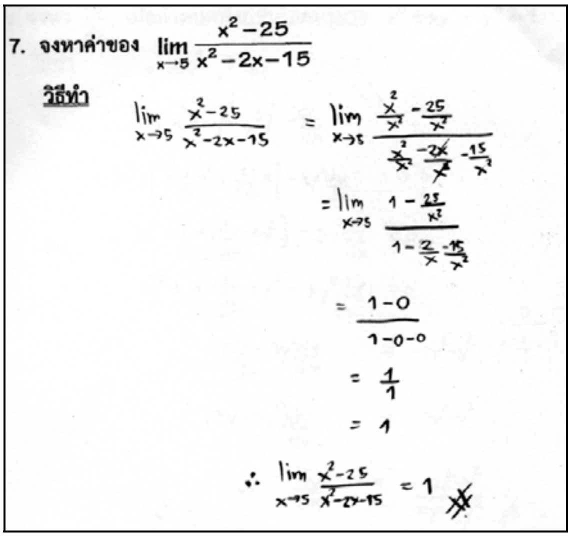
$=2$

ดังนั้น $\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = 2$

ภาพที่ 2 การแสดงวิธีทำที่ถูกต้องจากความผิดพลาดในลักษณะที่ 1 และลักษณะที่ 3

ลักษณะที่ 2

เป็นความผิดพลาดที่เกิดจากความเข้าใจคลาดเคลื่อนในการแก้ปัญหาโจทย์เรื่องลิมิต เมื่อค่าลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\left(\frac{0}{0}\right)$ นิสิตไม่ได้แยกตัวประกอบของพหุนาม แต่ใช้วิธีการหาลิมิตที่อนันต์ โดยการนำตัวแปรที่มีดีกรีสูงสุดมาหารทั้งตัวเศษและตัวส่วนเพื่อหาค่าลิมิตดังภาพที่ 3 บรรทัดที่ 2 ซึ่งความจริงแล้ว นิสิตเข้าใจผิดหรือสับสนระหว่างวิธีการหาลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้จำนวนจริง a กับวิธีการหาลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ จากการวิเคราะห์ไม่สามารถสรุปได้ชัดเจนว่านิสิตขาดความตระหนักถึงค่าลิมิต อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\left(\frac{0}{0}\right)$ หรือไม่ เนื่องจากนิสิตใช้วิธีการผิดในการแก้ปัญหา หากนิสิตแทน x = 5 ในฟังก์ชันแล้ว ให้ผลออกมาในรูป $\frac{0}{0}$ แล้วนิสิตแยกตัวประกอบ ลักษณะนี้แสดงว่า นิสิตตระหนักถึงค่าลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\left(\frac{0}{0}\right)$ แต่หากแทน x = 5 ในฟังก์ชันแล้วให้ผลออกมาในรูป $\frac{0}{0}$ แล้วนิสิตไม่แยกตัวประกอบ และนิสิตตอบว่าหาค่าไม่ได้หรือไม่นิยาม แสดงว่า นิสิตไม่ตระหนักถึงค่าลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\left(\frac{0}{0}\right)$ วิธีทำที่ถูกต้องแสดงในภาพที่ 4



7. จงหาค่าของ $\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^2-2x-15}$

วิธีทำ $\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^2-2x-15} = \lim_{x\to5}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{25}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}-\frac{15}{x^2}}$

$=\lim_{x\to5}\frac{1-\frac{25}{x^2}}{1-\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}}$

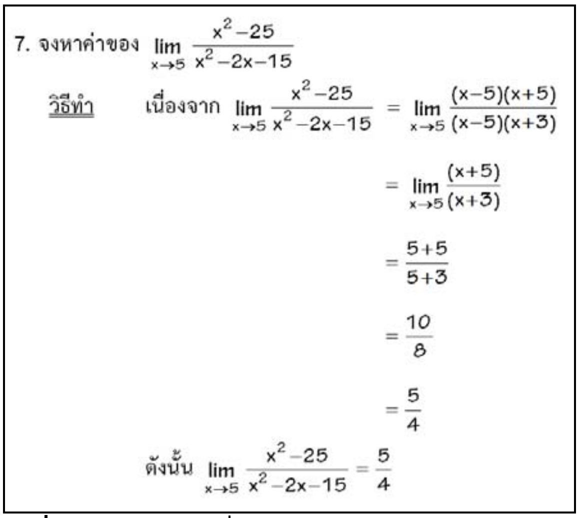
$= \frac{1-0}{1-0-0}$

$= \frac{1}{1}$

$= 1$

$\therefore \lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^2-2x-15} = 1$

ภาพที่ 3 ตัวอย่างความผิดพลาดลักษณะที่ 2 ซึ่งเกิดจากความเข้าใจคลาดเคลื่อน



7. จงหาค่าของ $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x^2-2x-15}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x^2-2x-15} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(x+3)}$

$= \lim_{x \to 5} \frac{(x+5)}{(x+3)}$

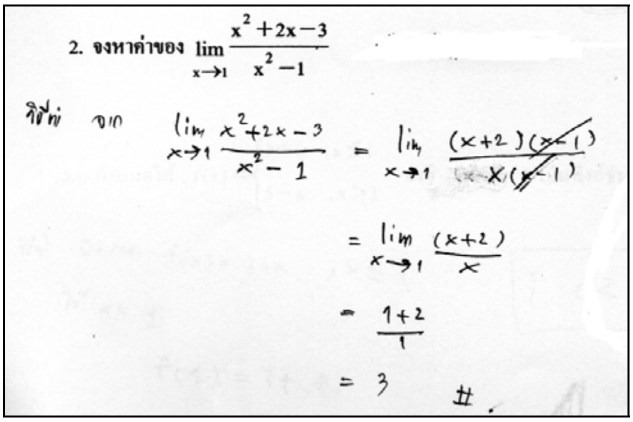
$= \frac{5+5}{5+3}$

$= \frac{10}{8}$

$= \frac{5}{4}$

ดังนั้น $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x^2-2x-15} = \frac{5}{4}$

ภาพที่ 4 การแสดงวิธีทำที่ถูกต้องจากความผิดพลาดตามลักษณะที่ 2 ลักษณะที่ 4 และลักษณะที่ 5



2. จงหาค่าของ $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

วิธีทำ จาก $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)}{x}$

$= \frac{1+2}{1}$

$= 3$ #

ภาพที่ 5 ตัวอย่างความผิดพลาดลักษณะที่ 3 เกิดจากขาดความรู้พื้นฐานเรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนาม

ลักษณะที่ 3

เป็นความผิดพลาดที่เกิดจากการขาดความรู้พื้นฐานเรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามในการแก้ปัญหาโจทย์เรื่องลิมิต เมื่อค่าลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\left(\frac{0}{0}\right)$ นิสิตได้แยกตัวประกอบของพหุนามทั้งตัวเศษและตัวส่วน แต่แยกตัวประกอบของพหุนามผิด (ภาพที่ 5) จากบรรทัดที่ 2 ในภาพที่ 3 พบว่านิสิตแยกตัวประกอบของ $x^2 + 2x - 3$ ได้เป็น $(x + 2)(x - 1)$ ซึ่งเป็นการแยกตัวประกอบผิด การแยกตัวประกอบของ $x^2 + 2x - 3$ นิสิตต้องใช้ความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามในรูป $x^2 + bx + c$ ซึ่งมีหลักการ คือ ต้องหาจำนวนสองจำนวนที่มีผลคูณเท่ากับ c และมีผลบวกเท่ากับ b สมมติว่าสองจำนวนดังกล่าวคือจำนวน d และจำนวน e ซึ่ง $c = de$ และ $b = d + e$ จะได้ $x^2 + bx + c = (x + d)(x + e)$ และทำให้แยกตัวประกอบของ $x^2 + 2x - 3$ ได้เป็น $(x + 3)(x - 1)$ นอกจากนี้นิสิตยังแยกตัวประกอบของ $x^2 - 1$ เป็น $x(x - 1)$ ซึ่งเป็นการแยกตัวประกอบผิด การแยกตัวประกอบของ $x^2 - 1$ นิสิตต้องใช้ความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนาม โดยการทำเป็นผลต่างกำลังสอง ซึ่งมีหลักการคือ หากพหุนามอยู่ในรูป $x^2 - a^2$ แยกตัวประกอบได้เป็น $(x - a)(x + a)$ ทำให้แยกตัวประกอบของ $x^2 - 1$ เป็น $(x - 1)(x + 1)$ เนื่องจาก $x^2 - 1 = x^2 - 1^2$ จากการวิเคราะห์พบว่า นิสิตขาดความรู้เกี่ยวกับเรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนาม แต่นิสิตยังตระหนักถึงค่าลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\left(\frac{0}{0}\right)$ เห็นได้จากการแยกตัวประกอบของพหุนามทั้งตัวเศษและตัวส่วน วิธีทำที่ถูกต้องแสดงในภาพที่ 2

ลักษณะที่ 4

เป็นความผิดพลาดที่เกิดจากความไม่รอบคอบในการแก้ปัญหาโจทย์เรื่องลิมิต เมื่อค่าลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\left(\frac{0}{0}\right)$ นิสิตแยกตัวประกอบของพหุนามได้ถูกต้อง (ภาพที่ 6) แสดงว่า นิสิตมีความตระหนักถึงค่าลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\left(\frac{0}{0}\right)$ แต่วิธีการเขียนไม่ถูกต้อง ขาดความรอบคอบ ไม่ระมัดระวัง และไม่มีการตรวจทานความถูกต้อง เช่น บรรทัดที่ 2 ในภาพที่ 6(ก) นิสิตไม่ได้เขียน $\lim_{x \to 5}$ ข้างหน้าของฟังก์ชันที่ต้องการหาค่า บรรทัดที่ 3 ในภาพที่ 6(ข) นิสิตไม่ได้เขียนตัวส่วนในที่นี้ คือ $(x + 3)$ วิธีทำที่ถูกต้องแสดงในภาพที่ 4

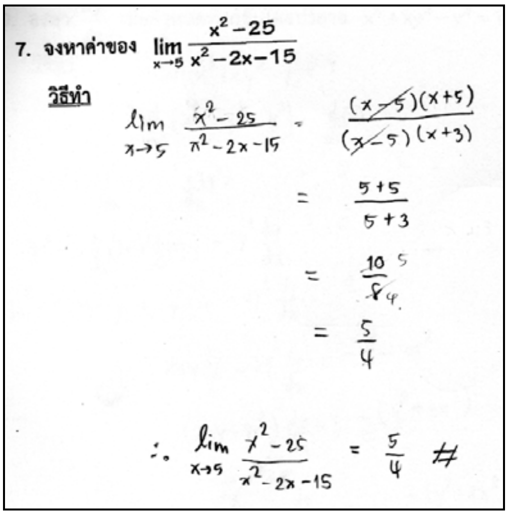
ลักษณะที่ 5

เป็นความผิดพลาดที่เกิดจากความไม่รอบคอบในการแก้ปัญหาโจทย์เรื่องลิมิต เมื่อค่าลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\left(\frac{0}{0}\right)$ นิสิตแยกตัวประกอบของพหุนามได้ถูกต้องและเขียนแสดงวิธีทำถูกต้อง แสดงว่า นิสิตมีการตระหนักถึงค่าลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\left(\frac{0}{0}\right)$ เพียงแต่มีการคำนวณที่ผิดพลาด เช่น บรรทัดที่ 4 ในภาพที่ 7(ก) นิสิตใช้เครื่องหมายบวกเป็นเครื่องหมายคูณ บรรทัดที่ 5 ในภาพที่ 7(ข) นิสิตบวกเลขผิด จากภาพที่ 7(ก) และภาพที่ 7(ข) แสดงว่า นิสิตมีความเข้าใจในการหาค่าลิมิต เพียงแต่ขาดความรอบคอบ ไม่ระมัดระวัง และไม่มีการตรวจทานความถูกต้อง วิธีทำที่ถูกต้องแสดงในภาพที่ 4

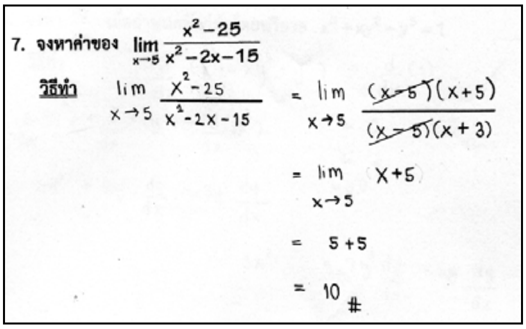
บทสรุป

จากความผิดพลาดทั้ง 5 ลักษณะข้างต้นจะพบว่า ลักษณะที่ 1 และลักษณะที่ 2 เป็นความผิดพลาดที่เกิดจากความเข้าใจคลาดเคลื่อน ลักษณะที่ 3 เป็นความผิดพลาดที่เกิดจากการขาดความรู้พื้นฐานเรื่องการแยกตัวประกอบของ

พหุนาม ส่วนลักษณะที่ 4 และลักษณะที่ 5 เป็นความผิดพลาดที่เกิดจากความไม่รอบคอบ เมื่อวิเคราะห์ความผิดพลาดในแต่ละลักษณะ พบว่า ลักษณะที่ 1 สะท้อนให้เห็นถึงการขาดความรู้ความเข้าใจในการหาค่าของลิมิต และขาดความตระหนักถึงค่าลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\left(\frac{0}{0}\right)$ ส่วนลักษณะที่ 2 สะท้อนให้เห็นถึงการขาดการวิเคราะห์และไตร่ตรองปัญหา หรือไม่พิจารณาตัวคำถามให้รอบคอบทำให้นำมาซึ่งใช้วิธีการผิดในการแก้ปัญหา ลักษณะที่ 3 สะท้อนให้เห็นถึงการขาดความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามแต่ยังมีความตระหนักถึงค่าลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\left(\frac{0}{0}\right)$ ส่วนลักษณะที่ 4 และลักษณะที่ 5 สะท้อนให้เห็นถึงการมีความรู้ความเข้าใจในการหาค่าของลิมิต เพียงแต่ขาดความรอบคอบไม่ระมัดระวังในการเขียนแสดงวิธีทำ รวมทั้งไม่มีการตรวจทานความถูกต้อง ดังนั้น การที่จะพัฒนาการเรียนการสอนให้นิสิตมีผลสัมฤทธิ์ทางการดีขึ้น ควรแก้ปัญหาโดยใช้การสอนเพิ่มเติมเพื่อปรับความรู้พื้นฐานในการแก้ปัญหาโจทย์เรื่องลิมิต เช่น สอนเรื่องการแยกตัวประกอบพหุนาม การบวกลบพหุนาม และหาสื่อการเรียนการสอนที่เป็นรูปธรรมเกี่ยวกับเรื่องลิมิต เพื่อให้นิสิตเข้าใจแนวคิดเรื่องลิมิตได้ง่ายขึ้น รวมถึงเน้นให้นิสิตตระหนักถึงความรอบคอบ ความระมัดระวัง และการตรวจทานความทุกต้องทุกครั้งในการเขียนแสดงวิธีทำ

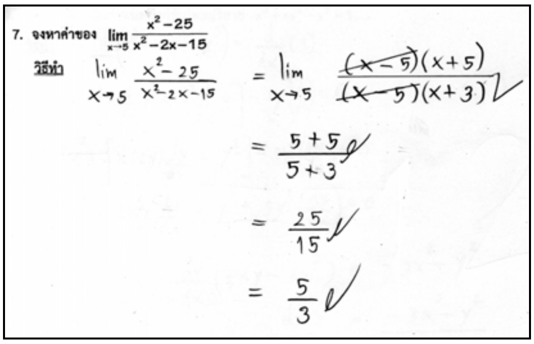


(ก)

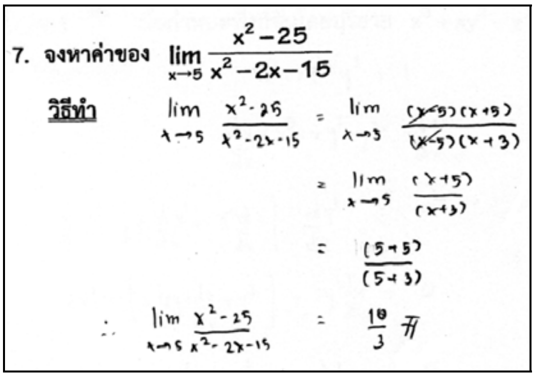


(ข)

ภาพที่ 6 ตัวอย่างความผิดพลาดลักษณะที่ 4 เกิดจากความไม่รอบคอบ



(ก)



(ข)

ภาพที่ 7 ตัวอย่างความผิดพลาดลักษณะที่ 5 เกิดจากความไม่รอบคอบ

เอกสารอ้างอิง

กมล เอกไทยเจริญ. (2537). **แคลคูลัส 1 และเทคนิคการใช้ Graphing Calculator**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. (2556). **คู่มือการศึกษาระดับปริญญาตรี ปีการศึกษา 2556 คณะวิทยาศาสตร์.** กรุงเทพฯ: คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

วัฒนา เถาว์ทิพย์. (2554). **เอกสารประกอบการบรรยายแคลคูลัส (Calculus)**. ขอนแก่น: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

วิชาญ ลิ่วกีรติยุตกุล. (2547). ปัญหาบางประการเกี่ยวกับเรื่องลิมิตและความต่อเนื่อง. **วารสารคณิตศาสตร์** 48(548-550): 39-43.

Lee, P. Y. (2006). **Teaching Secondary School Mathematics.** Singapore: McGraw-Hill.

Neuhauser, C. (2000). **Calculus for Biology and Medicine.** New Jersey: Prentice Hall.

Smith, R. T., and Minton, R. B. (2007), **Calculus: Early Transcendental Functions**. Boston: McGraw-Hill Higher Education.