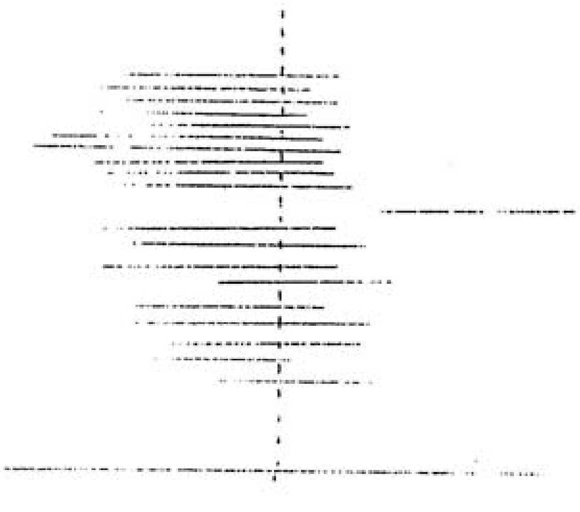
ช่วงความเชื่อมั่น

ความหมาย

ช่วงความเชื่อมั่น (Confidence Interval) หมายถึง ช่วงตัวเลขที่ครอบคลุมลักษณะที่แท้จริงของประชากร (parameter) ที่ระดับความเชื่อมั่นระดับหนึ่ง ช่วงความเชื่อมั่น ประกอบด้วย ขีดจำกัดบน (upper limit) ขีดจำกัดล่าง (lower limit) และระดับความเชื่อมั่น (confidence level) หรืออาจเรียกว่า สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (confidence coefficient)

ตัวอย่างข้างล่างนี้แสดงช่วงความเชื่อมั่นของมิว (μ) ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% จากการสุ่มตัวอย่าง 100 คน จำนวน 20 กลุ่มตัวอย่าง จะเห็นว่าเราคำนวณช่วงความเชื่อมั่นได้ 20 ช่วงความเชื่อมั่น และในจำนวนนี้มีช่วงความเชื่อมั่นหนึ่งช่วงความเชื่อมั่น (คิดเป็น 5% ของกลุ่มตัวอย่าง) ที่ไม่ครอบคลุมค่า μ



ภาพแสดง ช่วงความเชื่อมั่นของ μ

ความเป็นมา

ในการสุ่มตัวอย่างจากประชากร กลุ่มตัวอย่างที่ได้อาจมีลักษณะที่แตกต่างไปจากประชากรมากบ้างน้อยบ้าง การประมาณลักษณะที่แท้จริงของประชากรโดยใช้การประมาณค่าแบบจุด (point estimation) อาจไม่เพียงพอ กล่าวคือ ค่าประมาณแบบจุดให้ค่าประมาณเช่น ค่าเฉลี่ย ($\overline{X}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) เท่านั้น โดยที่เราไม่ทราบว่าความแม่นยำ (precision) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ว่ามีมากน้อยเพียงใด ในขณะที่การประมาณค่าแบบช่วง (interval estimation) เป็นการประมาณค่าที่ได้ค่าประมาณ เป็นช่วงตัวเลขที่ระบุความแม่นยำในรูปของความน่าจะเป็นในการที่ช่วงตัวเลขนั้นครอบคลุมค่าที่แท้จริงของประชากร ผลที่ได้จากการประมาณค่าแบบช่วงนี้เรียกว่า ช่วงความเชื่อมั่น

ลักษณะของการคำนวณช่วงความเชื่อมั่นมี 2 ประเภท คือ

1. ช่วงความเชื่อมั่นแบบมีขอบเขตสองด้าน (two-sided confidence interval) เป็นช่วงความเชื่อมั่นที่มีขีดจำกัดบนและขีดจำกัดล่าง

2. ช่วงความเชื่อมั่นแบบมีขอบเขตด้านเดียว (one-sided confidence bound) ซึ่งเป็นช่วงความเชื่อมั่นที่มีเฉพาะขีดจำกัดบน (one-sided upper confidence bound) หรือช่วงความเชื่อมั่นที่มีเฉพาะขีดจำกัดล่าง (one-sided lower confidence bound) เท่านั้น

การคำนวณช่วงความเชื่อมั่น

ขั้นตอนในการคำนวณ

1. เลือกสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น

2. เลือกการแจกแจงความน่าจะเป็น (probability distribution) ที่เหมาะกับการแจกแจงจากการสุ่มของสถิติ (sampling distribution) เช่น เลือกใช้การแจกแจงแบบไคสแควร์ กับการแจกแจงจากการสุ่มของความแปรปรวน หรือ จากการใช้การแจกแจงแบบปกติกับการแจกแจงจากการสุ่มของค่าเฉลี่ย (X) เมื่อทราบค่า ซิกม่า (σ) เป็นต้น

3. คำนวณค่าขีดจำกัดบน ค่าขีดจำกัดล่าง

ตัวอย่างการคำนวณช่วงความเชื่อมั่นแบบต่าง ๆ

1. การคำนวณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าพารามิเตอร์ เมื่อกลุ่มตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ (normal distribution) เช่น ช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ย เมื่อทราบค่าและไม่ทราบค่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ช่วงความเชื่อมั่นของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ตัวอย่าง 1.1 จากข้อมูลเกี่ยวกับระยะเวลาของการแพร่เชื้อมะเร็งในเม็ดเลือดทำให้พอจะกล่าวได้ว่า ระยะเวลาในการที่คนไข้จะมีชีวิตอยู่หลังจากได้รับการวินิจฉัยว่าเป็นมะเร็ง มีการแจกแจงแบบปกติโดยมีค่า ซิกมา = 3 เดือน นายแพทย์ผู้หนึ่งสุ่มคนไข้โรคมะเร็ง 15 คน พบว่าค่าเฉลี่ยของจำนวนเดือนก่อนคนไข้เสียชีวิต ($\overline{X}$) มีค่า 13.88 เดือน นายแพทย์ต้องการหาประมาณค่าแบบช่วงของค่าเฉลี่ยที่ความเชื่อมั่น 95%

ขั้นตอนในการคำนวณ

1. สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นมีค่าเท่ากับ .95 ดังนั้น α = .05

2. ใช้การแจกแจงแบบปกติ

3. คำนวณขีดจำกัดล่าง ขีดจำกัดบน

ช่วงความเชื่อมั่นแบบมีขอบเขตสองด้านของค่าเฉลี่ย (μ) ที่ความเชื่อมั่น 95% คือ

$$[\underset{\sim}{\mu}, \tilde{\mu}] = \overline{X} \pm Z_{(1-\alpha/2)} (\sigma/\sqrt{n})$$

เมื่อ $\overline{X}$ คือ ค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่าง

$Z_{(1-\alpha/2)}$ คือ ค่าสถิติจากการแจกแจงแบบปกติที่ตำแหน่งเปอร์เซนไทล์ ($1-\alpha/2$)

n คือ จำนวนตัวอย่าง

σ คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร

เมื่อแทนค่าตัวเลขในสมการข้างบนจะได้ว่า

$$[\underset{\sim}{\mu}, \tilde{\mu}] = 13.88 \pm 1.96 (3/\sqrt{n})$$
$$= 13.88 \pm 1.47$$
$$= 12.41 \text{ ถึง } 15.35$$

หมายความว่า เรามีความมั่นใจ 95% ว่า ในกลุ่มประชากรของคนไข้โรคมะเร็งในเม็ดเลือด คนไข้จะมีชีวิตอยู่หลังจากได้รับการวินิจฉัยว่าเป็นมะเร็งระหว่าง 12.41 ถึง 15.35 เดือน

ช่วงความเชื่อมั่นแบบมีขอบเขตด้านล่างของค่าเฉลี่ย (μ) ที่ความเชื่อมั่น 95% คือ

$$\underset{\sim}{\mu} = \overline{X} - Z_{(1-\alpha)} (\sigma/\sqrt{n})$$
$$= 13.88 - 1.645 (3/\sqrt{16})$$
$$= 12.65$$

หมายความว่า เรามีความมั่นใจ 95% ว่าในประชากรของคนไข้ที่เป็นมะเร็งในเม็ดเลือดคนไข้จะมีชีวิตอยู่ไม่ต่ำกว่า 12.65 เดือน หลังจากได้รับวินิจฉัยว่าเป็นมะเร็ง

ช่วงความเชื่อมั่นแบบมีขอบเขตด้านบนของค่าเฉลี่ย (μ) ที่ความเชื่อมั่น 95% คือ

$$\begin{aligned}\tilde{\mu} &= \overline{X} + Z_{(1-\alpha)}(\sigma/\sqrt{n}) \\ &= 13.88 + 1.645\,(3/\sqrt{16}) \\ &= 13.88 + 1.23 \\ &= 15.11\end{aligned}$$

หมายความว่า เรามีความมั่นใจ 95% ว่าในประชากรของคนไข้ที่เป็นมะเร็งในเม็ดเลือดคนไข้จะมีชีวิตอยู่ไม่เกิน 15.11 เดือน หลังจากได้รับวินิจฉัยว่าเป็นมะเร็ง

ตัวอย่าง 1.2 จากการสุ่มตัวอย่างคนขับรถมอเตอร์ไซค์รับจ้างในซอยสุขุมวิท 23 จำนวน 25 คน เพื่อสัมภาษณ์จำนวนน้ำมันที่ใช้ในการรับ-ส่งผู้โดยสารใน 1 ชั่วโมง พบว่า ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของจำนวนน้ำมันที่ใช้มีค่า 1.186 ลิตร ให้ประมาณค่าแบบช่วงของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

ขั้นตอนการคำนวณ

1. สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นมีค่าเท่ากับ .95 ดังนั้น α = .05

2. ใช้การแจกแจงแบบเซตไคสแควร์ (Chi-square distribution)

3. คำนวณขีดจำกัดล่าง ขีดจำกัดบน

ช่วงความเชื่อมั่นของ σ^2 แบบมีขอบเขตสองด้าน ที่ความเชื่อมั่น 95% คือ

$$[\underset{\sim}{\sigma}^2, \tilde{\sigma}^2] = [(n-1)S^2/\chi^2{1-\alpha/2, n-1}, \; (n-1)S^2/\chi^2{\alpha/2, n-1}]$$

เมื่อ s^2 = ค่าความแปรปรวน

n = ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

χ^2 = ค่าสถิติจากตารางไคสแควร์

เมื่อแทนค่าตัวเลขจะได้ว่า

$$\begin{aligned}[\underset{\sim}{\sigma}^2, \tilde{\sigma}^2] &= [(25-1)(1.407)/39.4, (25-1)(1.407)/12.4] \\ &= [857, 2.723] \\ [\underset{\sim}{\sigma}, \tilde{\sigma}] &= [926, 1.65]\end{aligned}$$

หมายความว่า เรามีความมั่นใจ 95% ว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการใช้น้ำมันในกลุ่มประชากรคนขับมอเตอร์ไซค์รับจ้างมีค่าระหว่าง .926 ถึง 1.65 ลิตร

ช่วงความเชื่อมั่นของ σ แบบมีขอบเขตด้านล่างด้านเดียว ที่ความเชื่อมั่น 95% คือ

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^2 &= [(n-1)S^2/\chi^2 .95, 24] \\ &= (24)(1.407)/36.4 \\ &= 0.93 \\ \underset{\sim}{\sigma} &= 0.96\end{aligned}$$

หมายความว่า เรามีความเชื่อมั่นใจ 95% ว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการใช้น้ำมันเป็นกลุ่มประชากรคนขับรถมอเตอร์ไซค์รับจ้างมีค่าไม่น้อยกว่า 96 ลิตร

ช่วงความเชื่อมั่นของ σ แบบมีขอบเขตด้านบนด้านเดียว ที่ความเชื่อมั่น 95% คือ

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^2 &= [(n-1)S^2/\chi^2 .05;24] \\ &= (24)(1.407)/13.8 \\ &= 2.45 \\ \tilde{\sigma} &= 1.57\end{aligned}$$

หมายความว่า เรามีความมั่นใจ 95% ว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการใช้น้ำมันในกลุ่มประชากรคนขับรถมอเตอร์ไซค์รับจ้างมีค่าไม่เกิน 1.57 ลิตร

2. การคำนวณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับสัดส่วนเมื่อกลุ่มตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่มีแจกแจงแบบไบโนเมียล (binomial distribution) เช่น ช่วงความเชื่อมั่นของสัดส่วน (p) ของการเกิด - ไม่เกิดเหตุการณ์ที่พึงประสงค์

ตัวอย่าง ในการตรวจสอบการทำงานของเครื่องจักรที่ใช้ผลิตหลอดไฟฟ้าว่าผ่านมาตรฐานหรือไม่ บริษัทสุ่มหลอดไฟจำนวน 10 หลอด ตรวจสอบมาตรฐาน พบว่ามีหลอดไฟ 1 หลอดที่ผ่านมาตรฐาน ให้ทำการประมาณค่าสัดส่วนของหลอดไฟที่ผ่านมาตรฐานที่ความเชื่อมั่น 95%

ขั้นตอนในการคำนวณ

1. สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นมีค่า .95 ดังนั้น $\alpha = .05$

2. ใช้การแจกแจงของ F (F distribution)

3. คำนวณขีดจำกัดบน และ ขีดจำกัดล่าง

ช่วงความเชื่อมั่นของ π แบบมีขอบเขตสองด้านที่ความเชื่อมั่น 95% คือ

$$[\underset{\sim}{\pi}, \tilde{\pi}] = [\{1 + (n - x + 1)F(1 - \alpha/2 ; 2n - 2x + 2, 2x)/x\}^{-1}$$

$$\{1 + (n - x)/(x + 1)F(1 - \alpha/2, 2x + 2, 2n - 2x)\}^{-1}]$$

เมื่อ n คือ จำนวนตัวอย่าง

x คือ จำนวนตัวอย่างที่มีลักษณะที่ต้องการสังเกต

F คือ ค่าสถิติจากการแจกแจงแบบ F

ดังนั้นเมื่อแทนค่าในสมการข้างต้นจะได้

$$[\underset{\sim}{\pi}, \tilde{\pi}] = [\{1 + (10)(39.45)\}^{-1}, \{1 + 9/(2)(3.606)\}^{-1}]$$

$$= [\ 0.0025, 0.44]$$

หมายความว่า เรามีความมั่นใจ 95% ว่าในจำนวนหลอดไฟทั้งหมดที่เครื่องจักรผลิตหลอดไฟที่ผ่านมาตรฐานที่สัดส่วนอยู่ระหว่าง .0025 ถึง 44 หลอด

ช่วงความเชื่อมั่นของ π แบบมีขอบเขตด้านบนด้านเดียว ที่ความเชื่อมั่น 95% คือ

$$\tilde{\pi} = [1 + \{(n - x) / (x + 1) F(1 - \alpha ; 2x + 2, 2n - 2x)\}]^{-1}$$

$$= [1 + \{9 / (2) (2.928)\}]^{-1}$$

$$= 0.39$$

หมายความว่า เรามีความมั่นใจ 95% ว่าในจำนวนหลอดไฟทั้งหมดที่เครื่องจักรผลิตมีหลอดไฟที่ผ่านมาตรฐาน คิดเป็นสัดส่วนแล้วไม่เกิน .39

ช่วงความเชื่อมั่นของ π แบบมีขอบเขตด้านล่างด้านเดียว ที่ความเชื่อมั่น 95% คือ

$$\underset{\sim}{\pi} = [\{1+(n - x + 1)F(1 - \alpha ; 2n - 2x + 2, 2x)\}]^{-1}$$

$$= [\{1 + (10) (19.45)\}]^{-1}$$

$$= .005$$

หมายความว่า เรามีความมั่นใจ 95% ว่าในจำนวนหลอดไฟทั้งหมดที่เครื่องจักรผลิตมีสัดส่วนของหลอดไฟผ่านมาตรฐานอย่างน้อย .005

ประโยชน์

ประโยชน์ของช่วงความเชื่อมั่นมีดังต่อไปนี้

1. ใช้ในการกำหนดขนาดของกลุ่มตัวอย่าง (sample size) เช่นผู้วิจัยอาจต้องการทราบว่าจะต้องสุ่มตัวอย่างจำนวนเท่าใด เพื่อให้การประมาณค่าเฉลี่ยมีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 1 ที่ความเชื่อมั่น 95% และมีข้อมูลว่า ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของประชากรมีค่าเท่ากับ 15 ผู้วิจัยคำนวณขนาดของกลุ่มตัวอย่างโดยการแก้สมการ $1.96(15/\sqrt{n}) = 1$ จะได้ว่าขนาดของกลุ่มตัวอย่างคือ 864 เป็นต้น

2. ใช้ช่วงความเชื่อมั่นเพื่อการทดสอบสมมติฐานเช่น ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 = \mu = 0$ ที่ $\alpha = .05$ ทำได้โดยการคำนวณช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับค่าเฉลี่ย ถ้าช่วงความเชื่อมั่นรวมค่าศูนย์แสดงว่าไม่มีหลักฐานเพียงพอในการที่จะปฏิเสธ H_0

ดุษฎี โยเหลา

บรรณานุกรม

Hahn, G.J. and W.Q Meeker. **Statistical Intervals**. New York : John Wiley & Sons, 1991.

Hogg, R.V. and E.A. Tanis. **Probability and Statistical Inference**. New York : Macmillan, 1977.

Milton, J.S. and J.C. Arnold, **Introduction to Probability and Statistics**. New York : McGraw Hill, 1990.

Yaremko, R.M. and Others. **Reference Handbook of Research and Statistical Methods in Psychology : for Students and Professionals**. New York : Harper & Row, 1982.